УДК 531.36; 531.011

С. П. Сосницький (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО СТІЙКІСТЬ РУХУ ЗА ХІЛЛОМ У ЗАДАЧІ ТРЬОХ ТІЛ

We consider a special case of the three-body problem, where the mass of one of these bodies is considerably less than masses of other ones, and explore relations between the Lagrange stability of the pair of massive bodies and the Hill stability of the whole system. We prove a theorem, which states the existence of Hill stable motions in the three-body problem under consideration. Additionally, we suggest an analogy with the restricted three-body problem. The obtained theorem implies that Hill stable motions exist also in the case of the elliptic restricted three-body problem.

Рассмотрен частный случай задачи трех тел, когда масса одного из них значительно меньше массы каждого из двух других тел. Исследована связь между устойчивой по Лагранжу парой массивных тел и устойчивостью по Хиллу системы всех трех тел. Доказана теорема, устанавливающая в рассматриваемом случае существование устойчивых по Хиллу движений. Проведена аналогия с ограниченной задачей трех тел. Полученная теорема позволяет сделать вывод о существовании устойчивых по Хиллу движений в случае эллиптической ограниченной задачи трех тел.

1. Вступ. Підхід, запропонований Хіллом у випадку обмеженої задачі трьох тіл, знайшов своє конструктивне застосування і в загальній задачі трьох тіл (див., наприклад, книги [1, 2] і наведену в них бібліографію). У статті, що пропонується, розглядається вужча задача: дослідити можливості підходу Хілла у випадку, досить наближеному до обмеженої задачі трьох тіл, коли маса m_3 третього тіла є надто малою, щоб істотно впливати на рух пари двох масивних тіл (m_1, m_2). Разом з тим у подальшому, на відміну від обмеженої задачі, не будемо нехтувати масою m_3 і вважатимемо, що хоч маса m_3 і мала, проте $m_3 \neq \neq 0$. В рамках такого підходу вдається одержати ширші умови стійкості за Хіллом розглядуваної системи в порівнянні з моделлю обмеженої задачі трьох тіл.

Розглянемо у тривимірному евклідовому просторі рух трьох матеріальних точок відповідно з масами m_1, m_2, m_3 під дією сил взаємного гравітаційного притягання. В інерційній системі відліку з початком у центрі мас m_i, $i = 1, 2, 3$, відповідний лагранжіан має вигляд

$$L = T + U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 + G\left(\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{12}|} + \frac{m_1 m_3}{|\mathbf{r}_{13}|} + \frac{m_2 m_3}{|\mathbf{r}_{23}|}\right). \tag{1.1}$$

Тут $\mathbf{r}_i$ — радіуси-вектори точок у вибраній системі відліку, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$, $i, j = = 1, 2, 3$, $G > 0$ — гравітаційна стала. Рівняння руху системи на підставі виразу для лагранжіана L набирають вигляду

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= G\left(m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{12}|^3} + m_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{13}|^3}\right), \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= G\left(-m_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{12}|^3} + m_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_{23}|^3}\right), \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 &= G\left(-m_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{13}|^3} - m_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_{23}|^3}\right). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Переходячи у системі (1.2) до безрозмірного часу

$$\frac{\sqrt{GM}}{r_0^{3/2}} t = \tau, \qquad M = \sum_{i=1}^{3} m_i,$$

де r_0 — параметр, що має розмірність одиниці довжини, отримуємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1'' &= r_0^3\left(\mu_2\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\mu_3\frac{\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{13}|^3}\right),\\
\mathbf{r}_2'' &= r_0^3\left(-\mu_1\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{12}|^3}+\mu_3\frac{\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_{23}|^3}\right),\\
\mathbf{r}_3'' &= r_0^3\left(-\mu_1\frac{\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_{13}|^3}-\mu_2\frac{\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_{23}|^3}\right).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Тут штрих означає диференціювання за часом τ, $\mu_i = m_i/M$.

Якщо в (1.3) перейти до відносних довжин векторів

$$\boldsymbol{\rho}_i = \frac{\mathbf{r}_i}{r_0}, \tag{1.4}$$

то рівняння руху (1.3) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_1'' &= \mu_2\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}+\mu_3\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3},\\
\boldsymbol{\rho}_2'' &= -\mu_1\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}+\mu_3\frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3},\\
\boldsymbol{\rho}_3'' &= -\mu_1\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3}-\mu_2\frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Як відомо [3], для системи (1.5) існують інтеграл енергії

$$T - U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\mu_i\boldsymbol{\rho}_i'^2 - \left(\frac{\mu_1\mu_2}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|}+\frac{\mu_1\mu_3}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|}+\frac{\mu_2\mu_3}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|}\right) = h \tag{1.6}$$

та інтеграл моменту кількостей руху

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{3}\mu_i(\boldsymbol{\rho}_i\times\boldsymbol{\rho}_i') = \mathbf{C}. \tag{1.7}$$

Останній можна подати у вигляді

$$\mathbf{M}_x = C_1 = \text{const}, \qquad \mathbf{M}_y = C_2 = \text{const}, \qquad \mathbf{M}_z = C_3 = \text{const}. \tag{1.8}$$

Величини $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_z$ в (1.8) означають проекції моменту кількостей руху $\mathbf{M}$ відповідно на осі Ox, Oy, Oz інерційної системи відліку $Oxyz$.

Зрозуміло, що вираз

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\mu_i\boldsymbol{\rho}_i'^2 - \left(\frac{\mu_1\mu_2}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|}+\frac{\mu_1\mu_3}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|}+\frac{\mu_2\mu_3}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|}\right) - \mathbf{M}_z = h - C_3 \tag{1.9}$$

також є інтегралом системи (1.5).

Оскільки для даної системи існують інтеграли руху центра мас, то далі, відповідно до вибору системи відліку, без обмеження загальності розгляду вважатимемо, що

$$\sum_{i=1}^{3}\mu_i\boldsymbol{\rho}_i' = \mathbf{0}, \qquad \sum_{i=1}^{3}\mu_i\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0},$$

і, як наслідок,

$$\sum_{i=1}^{3}\mu_i\rho_i^2 = \sum_{i<j}\mu_i\mu_j\left|\rho_{ij}\right|^2. \tag{1.10}$$

2. Теорема про стійкість за Хіллом.

Означення 1. *Фіксовану пару тіл* (*матеріальних точок*) (μ_i, μ_j), $i < j$, *системи* (1.5) *назвемо стійкою за Лагранжем*, *якщо відповідна її відстань* $\left|\rho_{ij}(t)\right|$ *задовольняє нерівність*

$$c_1 \le \left|\rho_{ij}(t)\right| \le c_2 \quad \forall t \in R =]-\infty, \infty[, \tag{2.1}$$

де c_1 *і* c_2 — *додатні сталі*.

Означення 2. *Фіксований рух* $\rho(t) = (\rho_1(t),\ \rho_2(t),\ \rho_3(t))^T$ *системи* (1.5) *назвемо стійким за Хіллом*, *якщо виконується умова*

$$\left|\rho_{ij}(t)\right| \le c_3 \quad \forall t \in R \quad \forall i < j, \tag{2.2}$$

де c_3 — *додатна стала*.

***Зауваження* 1.** Оскільки, згідно з (1.4), величини ρ_i є відносними довжинами, то без порушення загальності розгляду можемо вважати, що в (2.1) $c_2 =$ $= 1$. Зокрема, якщо рух пари (μ_i, μ_j), $i<j$, є рухом по колу, то $\left|\rho_{ij}\right| = 1$, якщо еліптичним з малим ексцентриситетом, то $\left|\rho_{ij}\right|$ коливається з малою амплітудою в околі усередненого значення $\left|\rho_{ij}\right|^0$, що мало відрізняється від одиниці.

Теорема. *Нехай у системі* (1.5) *виконуються умови*:

1) $T - U = h < 0$;

2) $\mu_1 \ge \mu_2$ *й існує таке мале число* $\varepsilon > 0$, *що при* $\mu_3/\mu_2 < \varepsilon$ *тіло з масою* μ_3 *істотно не впливає на якісний характер руху пари тіл* (μ_1, μ_2).

Тоді якщо пара тіл (μ_1, μ_2) *є стійкою за Лагранжем*, *то область стійких за Хіллом рухів системи* (1.5) *не є порожньою*.

***Доведення*.** Зауважуючи, що $\rho_i = (x_i,\ y_i,\ z_i)^T$ і, отже,

$$\mathbf{M}_z = \sum_{i=1}^{3}\mu_i(x_i y_i' - y_i x_i'), \tag{2.3}$$

зображуємо інтеграл (1.9) у формі

$$\sum_{i=1}^{3}\mu_i\left[\rho_i'^2 - 2(x_i y_i' - y_i x_i') + \rho_i^2\right] - \sum_{i=1}^{3}\mu_i\rho_i^2 - 2\sum_{i<j}\frac{\mu_i\mu_j}{\left|\rho_{ij}\right|} = 2(h - C_3). \tag{2.4}$$

Перепишемо тепер (2.4) у вигляді рівності

$$\sum_{i=1}^{3}\mu_i\left[\rho_i'^2 - 2(x_i y_i' - y_i x_i') + \rho_i^2\right] = \sum_{i=1}^{3}\mu_i\rho_i^2 + 2\sum_{i<j}\frac{\mu_i\mu_j}{\left|\rho_{ij}\right|} + 2(h - C_3). \tag{2.5}$$

Беручи до уваги рівність (1.10), а також враховуючи невід'ємність лівої частини рівності (2.5), отримуємо

$$\sum_{i<j}\mu_i\mu_j\left(\rho_{ij}^2 + \frac{2}{\left|\rho_{ij}\right|}\right) \ge 2(C_3 - h). \tag{2.6}$$

За умови стійкості за Лагранжем пари тіл (μ_1, μ_2) нерівність (2.6) зручно записати у вигляді

$$\mu_1 \boldsymbol{\rho}_{13}^2 + \mu_2 \boldsymbol{\rho}_{23}^2 + \frac{2\mu_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|} + \frac{2\mu_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|} \geq \frac{1}{\mu_3}\left[2(C_3 - h) - \mu_1\mu_2\left(\boldsymbol{\rho}_{12}^2 + \frac{2}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|}\right)\right]. \quad (2.7)$$

Зауважуючи, що $(-h) > 0$, вибираємо сталу C_3 також додатною і, зокрема, такою, що стала $(C_3 - h)$ є достатньо великою, щоб забезпечити додатність виразу в квадратних дужках у правій частині нерівності (2.7).

Оскільки згідно з вибором h і C_3 виконується нерівність

$$\left[2(C_3 - h) - \mu_1\mu_2\left(\boldsymbol{\rho}_{12}^2 + \frac{2}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|}\right)\right] \geq h^*, \quad 0 < h^* = \text{const}, \quad (2.8)$$

то (2.7) зручно переписати у вигляді

$$\mu_1 \boldsymbol{\rho}_{13}^2 + \mu_2 \boldsymbol{\rho}_{23}^2 + \frac{2\mu_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|} + \frac{2\mu_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|} \geq \frac{1}{\mu_3} h^*. \quad (2.9)$$

Враховуючи тепер мализну параметра μ_3, завжди можна досягти того, щоб права частина нерівності (2.9) перевищувала будь-яке наперед задане додатне число γ:

$$\frac{1}{\mu_3} h^* \geq \gamma > 0, \ \gamma = \text{const}. \quad (2.10)$$

При достатньо великому γ, в залежності від відстані матеріальної точки з масою μ_3 від матеріальних точок з масами μ_1 і μ_2 відповідно, на підставі (2.9) визначаємо області можливих рухів точки з масою μ_3. Зокрема, якщо відстані ρ_{13}, ρ_{23} достатньо великі, то область можливих рухів малої частки можна зобразити вигляді

$$\mu_1 \boldsymbol{\rho}_{13}^2 + \mu_2 \boldsymbol{\rho}_{23}^2 \geq h_1^* > 0, \ h_1^* = \text{const}. \quad (2.11)$$

Оскільки великій сталій γ можуть відповідати і малі відстані ρ_{13}, ρ_{23}, то в залежності від того, в околі якої з точок пари (μ_1, μ_2) знаходиться мала частка, область її можливих рухів визначаємо з допомогою нерівностей

$$\frac{2\mu_1}{\rho_{13}} \geq h_2^*, \quad (2.12)$$

$$\frac{2\mu_2}{\rho_{23}} \geq h_3^*, \quad (2.13)$$

де h_2^* і h_3^* — достатньо великі додатні сталі.

Відповідно до нерівностей (2.12), (2.13) область обмежених по координатах рухів точки з масою μ_3 не є порожньою. Для більш точного визначення області обмежених рухів, особливо коли відстані ρ_{13} і ρ_{23} є малими, але сумірними, цілком природно скористатися більш строгою нерівністю (2.9).

Беручи до уваги означення 2, робимо висновок про справедливість теореми.

Зауваження 2. Як бачимо, отримана теорема залишає в силі ключові положення класичної моделі обмеженої задачі трьох тіл, за винятком того моменту, що маса $\mu_3(m_3)$ хоч і мала, але не дорівнює нулю. В свою чергу, відмінність від нуля маси $\mu_3(m_3)$ дозволяє скористатися всіма інтегралами системи (1.5). Нехтуючи ж в обмеженій задачі масою $\mu_3(m_3)$, ми істотно змінюємо вихідну математичну модель і, мабуть, не завжди адекватно відображаємо сутність вихідної задачі.

***Зауваження* 3.** Рівняння

$$\mu_1\boldsymbol{\rho}_{13}^2 + \mu_2\boldsymbol{\rho}_{23}^2 + \frac{2\mu_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|} + \frac{2\mu_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|} = \frac{1}{\mu_3}h^*$$

у розглядуваному випадку визначає межу області можливих рухів (рівняння поверхонь Хілла) лише наближено. Це пояснюється тим, що у праву частину вихідної нерівності (2.7) входить змінна відстань $|\boldsymbol{\rho}_{12}|$.

***Зауваження* 4.** Беручу до уваги рівність [4]

$$\rho_3^2 = -\mu_1\mu_2\rho_{12}^2 + \mu_1(\mu_1+\mu_2)\rho_{13}^2 + \mu_2(\mu_1+\mu_2)\rho_{23}^2, \tag{2.14}$$

можна зобразити (2.7) у вигляді

$$\boldsymbol{\rho}_3^2 + \frac{2\mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\left(\dfrac{2\mu_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|} + \dfrac{2\mu_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|}\right)} \geq$$

$$\geq \frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_3}\left[2(C_3-h) - \mu_1\mu_2\left(\boldsymbol{\rho}_{12}^2 + \frac{2}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|}\right)\right] - \mu_1\mu_2\boldsymbol{\rho}_{12}^2. \tag{2.15}$$

З урахуванням мализни параметра μ_3 нерівність (2.15) можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{\rho}_3^2 + (\mu_1+\mu_2)\left(\frac{2\mu_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|} + \frac{2\mu_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|}\right) \geq \gamma^* > 0, \quad \gamma^* = \text{const},$$

що дуже нагадує нерівність для області можливих рухів у класичній моделі обмеженої задачі трьох тіл.

3. Про обмежену задачу трьох тіл. У випадку обмеженої задачі трьох тіл, як відомо [3, 5], замість (1.5) маємо рівняння

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_1'' &= \mu\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\ \boldsymbol{\rho}_2'' &= -(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\ \boldsymbol{\rho}_3'' &= -(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu\frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

де

$$\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}, \quad 0 < \mu \leq 1/2. \tag{3.2}$$

Як бачимо, перші два векторні рівняння системи (3.1), утворюючи замкнену систему, становлять собою задачу двох тіл, і тому, підбираючи належним чином початкові умови, легко сформувати стійку за Лагранжем пару точок $((1-\mu), \mu)$. Таким чином, мализна маси m_3 і, як наслідок, незначний вплив малої частки з даною масою на рух двох масивних тіл відтворюються в розглядуваній моделі з допомогою рівності $m_3 = 0$, хоча фактично маса m_3 завжди відмінна від нуля.

В подальшому, враховуючи зауваження 1, вважатимемо, що $|\boldsymbol{\rho}_{12}| \leq 1$.

Однією з переваг моделі обмеженої задачі трьох тіл є зведення її до системи меншої розмірності, яка до того ж має перший інтеграл (інтеграл Якобі) у випадку кругового руху пари $((1-\mu),\ \mu)$:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\rho}_3'^2 - (xy' - yx') - \left(\frac{1-\mu}{\rho_{13}} + \frac{\mu}{\rho_{23}}\right) = \tilde{h} = \text{const.} \qquad (3.3)$$

На підставі (3.3) можемо отримати вже відомий результат про існування областей Хілла, що містять обмежені по координатах рухи системи (3.1). Для цього достатньо зобразити рівність (3.3) у вигляді

$$\boldsymbol{\rho}_3'^2 - 2(xy' - yx') + \boldsymbol{\rho}_3^2 = 2\tilde{h} + \boldsymbol{\rho}_3^2 + 2\left(\frac{1-\mu}{\rho_{13}} + \frac{\mu}{\rho_{23}}\right) \qquad (3.4)$$

і при умові, що $\tilde{h} < 0$, дотримуватись стандартної схеми Хілла [5]. Перехід до рівнянь у системі координат, що обертається, як це зазвичай робиться при визначенні областей Хілла, не є обов'язковим.

Дійсно, на підставі (3.4) для областей можливих рухів одержуємо нерівність

$$\boldsymbol{\rho}_3^2 + 2\left(\frac{1-\mu}{\rho_{13}} + \frac{\mu}{\rho_{23}}\right) \geq -2\tilde{h}. \qquad (3.5)$$

Згідно з (3.5) можемо зробити висновок, що коли відстані ρ_{13}, ρ_{23} і стала $(-\tilde{h})$ є достатньо великими, то область можливих рухів можна зобразити у вигляді

$$\rho_3^2 \geq h_1^*. \qquad (3.6)$$

Якщо ж стала $(-\tilde{h})$ достатньо велика, а відстані ρ_{13} і ρ_{23} є малими, то, зауважуючи, що

$$\rho_3^2 = -(1-\mu)\mu + (1-\mu)\rho_{13}^2 + \mu\rho_{23}^2, \qquad (3.7)$$

в залежності від того, в околі якої з точок пари (μ_1, μ_2) знаходиться мала частка, область її можливих рухів визначається з допомогою нерівностей

$$\rho_{13} \leq \frac{2(1-\mu)}{h_2^*}, \qquad (3.8)$$

$$\rho_{23} \leq \frac{2\mu}{h_3^*}. \qquad (3.9)$$

Тут додатні сталі h_2^* і h_3^* є достатньо великими.

Нарешті, якщо відстані ρ_{13} і ρ_{23} є малими, але сумірними, для визначення області можливих рухів використовуємо точну нерівність

$$(1-\mu)\rho_{13}^2 + \mu\rho_{23}^2 + 2\left(\frac{1-\mu}{\rho_{13}} + \frac{\mu}{\rho_{23}}\right) \geq \mu(1-\mu) - 2\tilde{h}, \qquad (3.10)$$

яка дуже схожа на нерівність (2.9) у рамках необмеженої задачі.

Тепер бачимо, що принаймні нерівності (3.8), (3.9) дозволяють зробити висновок про існування обмежених по координатах рухів. При цьому нам вдалося уникнути переходу до системи координат, що обертається.

Однак розглядувана схема перестає працювати у випадку еліптичного руху пари $((1-\mu),\ \mu)$, коли інтеграл Якобі не існує. В цій ситуації істотно корисною може виявитися якраз отримана вище теорема, яка, як про це вже згадувалося вище, залишає в силі ключові положення класичної моделі обмеженої задачі трьох тіл. Дійсно, замість нерівності (3.5) в цьому випадку використовуємо нерівність (2.7), підставляючи у її праву частину замість ρ_{12}^2 і $2/\rho_{12}$ величини, які відповідають еліптичному рухові в задачі двох тіл, що цілком виправдано.

Адже відповідно до вихідної постановки задачі матеріальна точка з масою m_3 слабко впливає на рух двох масивних тіл. Отже, останні, утворюючи стійку за Лагранжем пару, здійснюють рух, близький до того, який ми отримуємо на підставі задачі двох тіл. Зрозуміло, що в рамках такого підходу наявна деяка похибка, оскільки пара (μ_1, μ_2) у системі (1.5) в умовах теореми точно не відтворює еліптичний рух, який відповідає задачі двох тіл. Проте ця похибка, враховуючи, що ми оперуємо нерівностями, не заважає нам зробити висновки якісного характеру про рух малої частки.

Отже, у випадку обмеженої еліптичної задачі трьох тіл, переходячи до повних рівнянь (1.5), на підставі наведеної вище теореми приходимо до висновку, що множина стійких за Хіллом рухів не є порожньою.

На завершення зауважимо, що питання про доцільність застосування повних рівнянь (1.5), коли розглядається обмежена задача, вже розглядалось автором у статті [6]. Однак тут, на відміну від [6], наводиться менш жорстке означення стійкої за Лагранжем пари, мабуть, більш наближене до реальної картини руху в рамках загальної задачі трьох тіл.

1. *Неустойчивости* в динамических системах. Приложения к небесной механике / Под ред. В. Дж. Себехея. – М.: Мир, 1982. – 168 с.
2. *Голубев В. Г., Гребенников Е. А.* Проблема трех тел в небесной механике. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 240 с.
3. *Рой А. Е.* Движение по орбитам. – М.: Мир, 1981. – 544 с.
4. *Сосницький С. П.* Про стійкість руху за Лагранжем у задачі трьох тіл // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 8. – С. 1137 – 1143.
5. *Себехей В. Дж.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. – М.: Наука, 1982. – 656 с.
6. *Sosnitskii S. P.* On the Lagrange and Hill stability of the motion of certain systems with Newtonian potential // Astron. J. – 1999. – **117**, № 6. – P. 3054 – 3058.

Одержано 12.06.07