УДК 517.956

В. Г. Бондаренко, Ю. Ю. Прокопенко (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”, Киев)

БАРЬЕРНЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

For a parabolic quasilinear equation with a monotone convex potential, we construct superparabolic and subparabolic barrier functions by using the decomposition method.

Для параболічного квазілінійного рівняння з монотонним опуклим потенціалом методом декомпозиції побудовано супер- та субпараболічні бар’єрні функції.

1. Постановка задачи и предварительные сведения. Линейное параболическое уравнение как математическая модель процесса диффузии обладает рядом недостатков. Так, решению $u(t,x)$ задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad u(0,x) = f(x), \quad x \in R^n,$$

с эллиптическим оператором

$$Lu = a^{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \equiv \operatorname{tr} A(x)\nabla^2 u(t,x)$$

соответствует бесконечная скорость распространения возмущений.

Более естественной математической моделью является нелинейное параболическое уравнение (см. обзор [1]), например полулинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \Phi(x, u, \nabla u) \quad \text{в фазовом пространстве} \quad E = R^n.$$

В частности, отметим работу [2], посвященную исследованию свойств решения задачи Коши для уравнения „реакция–диффузия”

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - g(t,x)|u|^p \operatorname{sgn} u, \quad u(0,x) = f(x), \quad 0 < p < 1, \quad g(t,x) \ge 0,$$

в которой приведены условия мгновенной компактификации носителя (МКН) решения: при некоторых условиях на функции f и g $\operatorname{supp} u(t,x) \subset [a; b]$ для любого $t > 0$.

Аналогичные результаты получены и для более общих квазилинейных уравнений [3].

В настоящей работе рассмотрена задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu - \Phi(u), \quad u(0,x) = f(x) \ge 0, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

и при некоторых условиях на потенциал Φ для решения $u(t,x)$ построены барьерные функции — суперпараболическая и субпараболическая. Схема построения таких функций — метод расщепления (декомпозиции) уравнения (1): упомянутые функции являются суперпозицией решений уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Lv, \quad \frac{dw}{dt} = -\Phi(w).$$

Идея метода расщепления была еще в 70-х годах предложена Ю. Л. Далецким. Этот метод применялся в работах [4, 5] для линейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + L_1 u,$$

где возмущение L_1 — эллиптический оператор: в упомянутых работах получено представление

$$e^{t(L+L_1)} = e^{tL}e^{tL_1} + B(t)$$

и изучены свойства семейства операторов $B(t)$.

Всюду ниже предполагается, что операторное поле $A(x)$ диффузии ограничено и дифференцируемо.

Введем ряд обозначений и определений.

Фундаментальное решение невозмущенного параболического уравнения обозначим через $p(t, x, y)$, $t > 0$, $x, y \in E$, а соответствующую переходную вероятность

$$P(t, x, \Gamma) = \int_{\Gamma} p(t, x, y)\,dy$$

назовем диффузионной мерой. Тогда

$$v(t, x) = \int_{E} f(y)p(t, x, y)\,dy$$

есть решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Lv, \qquad v(0, x) = f(x) \geq 0.$$

Через $w(t, x)$ обозначим неотрицательное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dw}{dt} = -\Phi(w), \qquad w(0, x) = f(x) \geq 0.$$

Определение 1. *Пусть* μ *— вероятностная мера на борелевской* σ*-алгебре метрического пространства* X, f *— непрерывная вещественная функция на* X. *Назовем меру* μ:

непрерывной относительно f, *если*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu(D_{c,\varepsilon}) = 0;$$

липшицевой относительно f, *если отношение*

$$\frac{\mu(D_{c,\varepsilon})}{\varepsilon}$$

ограничено, где прообраз

$$D_{c,\varepsilon} = \{x : c < f(x) < c + \varepsilon\}.$$

Непрерывность относительно f означает абсолютную непрерывность μ относительно индуцированной меры μ_f.

Примером липшицевой меры является гауссова мера в R^n, если $f(x) = \varphi(\|x\|)$, где $\varphi(s)$ — монотонна с ограничениями снизу на скорость возрастания или φ имеет ограниченную вариацию на $[0; l]$ для всех l. Отсюда следует липшицевость диффузионной меры $P(t, x, \Gamma)$ для таких же функций, так как фундаментальное решение $p(t, x, y)$ допускает двустороннюю оценку гауссовыми плотностями. Одно из достаточных условий липшицевости для некоторых классов мер и функций приведено в [6, с. 193 – 194].

Обобщение. Пусть $\varphi(s)$ — возрастающая функция,

$$\Delta_{c,\varepsilon} = \{x : \varphi(c) < f(x) < \varphi(c + \varepsilon)\}.$$

Соотношения

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu(\Delta_{c,\varepsilon}) = 0, \qquad \frac{1}{\varepsilon}\mu(\Delta_{c,\varepsilon}) < \text{const}$$

означают соответственно непрерывность и липшицевость μ относительно композиции $\varphi^{-1}\circ f$. Если φ — липшицева, то из непрерывности и липшицевости μ относительно f следуют те же свойства относительно $\varphi^{-1}\circ f$.

Утверждение 1. *Пусть*

$$g(t) = \int_{D_t}(f(x)-t)\mu(dx), \qquad D_t = \{x : f(x) > t\}.$$

Если f непрерывна, μ липшицева относительно f, то $g'(t) = 0$.

2. Основные результаты. ***2.1. Степенной потенциал.*** Рассмотрим вначале задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu - bu^{\alpha}, \qquad x\in R^n, \qquad u(0,x) = f(x) \ge 0, \qquad b>0, \qquad \alpha>0,$$

и исследуем отдельно случаи $\alpha > 1$ и $0<\alpha<1$.

Пусть $\alpha > 1$. Положим

$$w(t,x) = f(x)\big(1+bt(\alpha-1)f^{\alpha-1}(x)\big)^{-1/(\alpha-1)}$$

и обозначим через u_1 и u_2 композиции, составленные из функций $v(t,x)$ и $w(t,x)$:

$$u_1(t,x) = \int_E w(t,y)p(t,x,y)dy,$$

$$u_2 = v(t,x)\big(1+bt(\alpha-1)v^{\alpha-1}(t,x)\big)^{-1/(\alpha-1)}.$$

Легко видеть, что $\dfrac{dw}{dt} = -bw^{\alpha}$, $w(0,x) = f(x)$.

Пусть $0<\alpha<1$.

Особенность такой задачи — обнуление $u(t,x)$ для $t>t_0$ при некоторых условиях на начальную функцию. Через $\tilde w(t,x)$ обозначим неотрицательное решение задачи Коши:

$$\frac{d\tilde w}{dt} = -b\tilde w^{\alpha}, \qquad \tilde w(0,x) = f(x) \ge 0,$$

т. е.

$$\tilde w(t,x) = \begin{cases} \big(f^{1-\alpha}(x) - b(1-\alpha)t\big)^{1/(1-\alpha)}, & t < \dfrac{f^{1-\alpha}(x)}{b(1-\alpha)}, \\[2ex] 0, & t \ge \dfrac{f^{1-\alpha}(x)}{b(1-\alpha)}, \end{cases}$$

и положим

$$u_3(t,x) = \int_E \tilde w(t,y)p(t,x,y)dy = \int_{D_t}\big(f^{1-\alpha}(y) - bt(1-\alpha)\big)^{1/(1-\alpha)}p(t,x,y)dy,$$

$$u_4(t,x) = \begin{cases} \big(v^{1-\alpha}(t,x) - bt(1-\alpha)\big)^{1/(1-\alpha)}, & t < \dfrac{v^{1-\alpha}(t,x)}{b(1-\alpha)}, \\[2ex] 0, & t \ge \dfrac{v^{1-\alpha}(t,x)}{b(1-\alpha)}, \end{cases}$$

где

$$D_t = \{y : f(y) > (bt(1-\alpha))^{1/(1-\alpha)}\}.$$

Теорема 1. *Функция* u_1 *— субпараболическая, функция* u_2 *— суперпараболическая, т. е. имеют место неравенства*

$$u_1(t,x) \le u(t,x) \le u_2(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in R^n, \quad \alpha > 1.$$

Если диффузионная мера $P(t,x,\Gamma)$ *липшицева, то функция* u_3 *— суперпараболическая, функция* u_4 *— субпараболическая, т. е.*

$$u_4(t,x) \le u(t,x) \le u_3(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in R^n, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Доказательство состоит в использовании принципа максимума, т. е. в установлении знака невязок

$$h_k = \frac{\partial u_k}{\partial t} - Lu_k + bu_k^{\alpha}.$$

Так,

$$h_1(t,x) = b\left(\left(\int_E w(t,y)p(t,x,y)dy\right)^{\alpha} - \int_E w^{\alpha}(t,y)p(t,x,y)dy\right) \le 0$$

в силу неравенства Гельдера для вероятностной меры $P(t,x,dy)$.

Вторая невязка

$$h_2(t,x) =$$

$$= \alpha(\alpha-1)btv^{\alpha-2}(t,x)\left(1+bt(\alpha-1)v^{\alpha-1}(t,x)\right)^{-1/(\alpha-1)-2}\left(A(x)\nabla v(t,x), \nabla v(t,x)\right) \ge 0$$

в силу положительности матрицы диффузии.

При вычислении следующей невязки используется утверждение 1:

$$h_3(t,x) = b\left(\left(\int_E \tilde{w}(t,y)p(t,x,y)dy\right)^{\alpha} - \int_E \tilde{w}^{\alpha}(t,y)p(t,x,y)dy\right) \ge 0$$

в силу неравенства Гельдера.

Наконец,

$$h_4(t,x) =$$

$$= -\frac{bt\alpha(1-\alpha)}{v^{\alpha+1}(t,x)}\left(v^{1-\alpha}(t,x) - bt(1-\alpha)\right)^{1/(1-\alpha)-2}\left(A(x)\nabla v(t,x), \nabla v(t,x)\right) \le 0,$$

если $t < \dfrac{v^{1-\alpha}(t,x)}{b(1-\alpha)}$.

Из полученных неравенств следует утверждение теоремы.

В частном случае $\alpha = \dfrac{1}{2}$ теорема 1 доказана в работе [7].

2.2. Выпуклый потенциал. В приведенных выше вычислениях знак невязки фактически определяется направлением выпуклости функции Φ. Обобщим результаты п. 2.1, рассмотрев уравнение (1), где потенциал Φ — строго возрастающая функция, $\Phi(0) = 0$, и введем два случая:

2.2.1. Φ выпукла вниз на $(0;\infty)$, $\int_\sigma^\infty \dfrac{dz}{\Phi(z)} < \infty$ для любого $\sigma > 0$. Положим

$$\psi(s) = \int_s^\infty \frac{dz}{\Phi(z)}, \qquad w(t,x) = \psi^{-1}(bt + \psi(f(x)))$$

и определим функции

$$u_1(t,x) = \int_E w(t,y)p(t,x,y)\,dy,$$

$$u_2(t,x) = \psi^{-1}\big(bt + \psi(v(t,x))\big).$$

Заметим, что в силу убывания ψ справедливо неравенство

$$u_2(t,x) \le v(t,x).$$

2.2.2. Пусть Φ выпукла вверх на $(0;\infty)$, $\int_0^\sigma \frac{dz}{\Phi(z)} < \infty$ для любого $\sigma > 0$. Положим

$$\tilde\psi(s) = \int_0^s \frac{dz}{\Phi(z)},$$

$$\tilde w(t,x) = \begin{cases} \tilde\psi^{-1}\big(\tilde\psi(f(x)) - bt\big), & t < \dfrac{\tilde\psi\big(f(x)\big)}{b}, \\ 0, & t \ge \dfrac{\tilde\psi\big(f(x)\big)}{b}, \end{cases}$$

$$u_3(t,x) = \int_E \tilde w(t,y)p(t,x,y)\,dy = \int_{D_t} \tilde\psi^{-1}\big(\tilde\psi(f(y)) - bt\big)p(t,x,y)\,dy,$$

$$u_4(t,x) = \begin{cases} \tilde\psi^{-1}\big(\tilde\psi(v(t,x)) - bt\big), & t < \dfrac{1}{b}\displaystyle\int_0^{v(t,x)} \frac{dz}{\Phi(z)}, \\ 0, & t \ge \dfrac{1}{b}\displaystyle\int_0^{v(t,x)} \frac{dz}{\Phi(z)}, \end{cases}$$

где

$$D_t = \{y : f(y) > \tilde\psi^{-1}(bt)\}.$$

Отметим очевидное неравенство $u_4 \le v$.

Теорема 2. *В случае* 2.2.1 *справедлива двусторонняя оценка*

$$u_1(t,x) \le u(t,x) \le u_2(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in R^n.$$

Если диффузионная мера $P(t,x,\Gamma)$ липшицева относительно функции $\psi(f)$, то в случае 2.2.2 *имеют место неравенства*

$$u_4(t,x) \le u(t,x) \le u_3(t,x), \qquad t > 0, \quad x \in R^n.$$

Доказательство опять же состоит в установлении знака невязок. Так,

$$\frac{h_1(t,x)}{b} = \Phi\left(\int_E w(t,y)p(t,x,y)\,dy\right) - \int_E \Phi\big(w(t,y)p(t,x,y)\,dy\big) \le 0$$

в силу выпуклости Φ вниз;

$$h_2(t,x) = \big(A(x)\nabla v(t,x), \nabla v(t,x)\big)\frac{\Phi(u_2)}{\Phi^2(v)}\big(\Phi'(v) - \Phi'(u_2)\big) \ge 0$$

в силу возрастания Φ';

Вычисление невязки h_3 опирается на утверждение 1:

$$\frac{h_3(t,x)}{b} = \Phi\left(\int_E \tilde w(t,y)p(t,x,y)\,dy\right) - \int_E \Phi\big(\tilde w(t,y)p(t,x,y)\,dy\big) \ge 0$$

в силу выпуклости Φ вверх;

$$h_4(t, x) \;=\; \big(A(x)\nabla v(t, x), \nabla v(t, x)\big)\,\frac{\Phi(u_4)}{\Phi^2(v)}\,\big(\Phi'(v) - \Phi'(u_4)\big) \;\le\; 0$$

в силу возрастания Φ'.

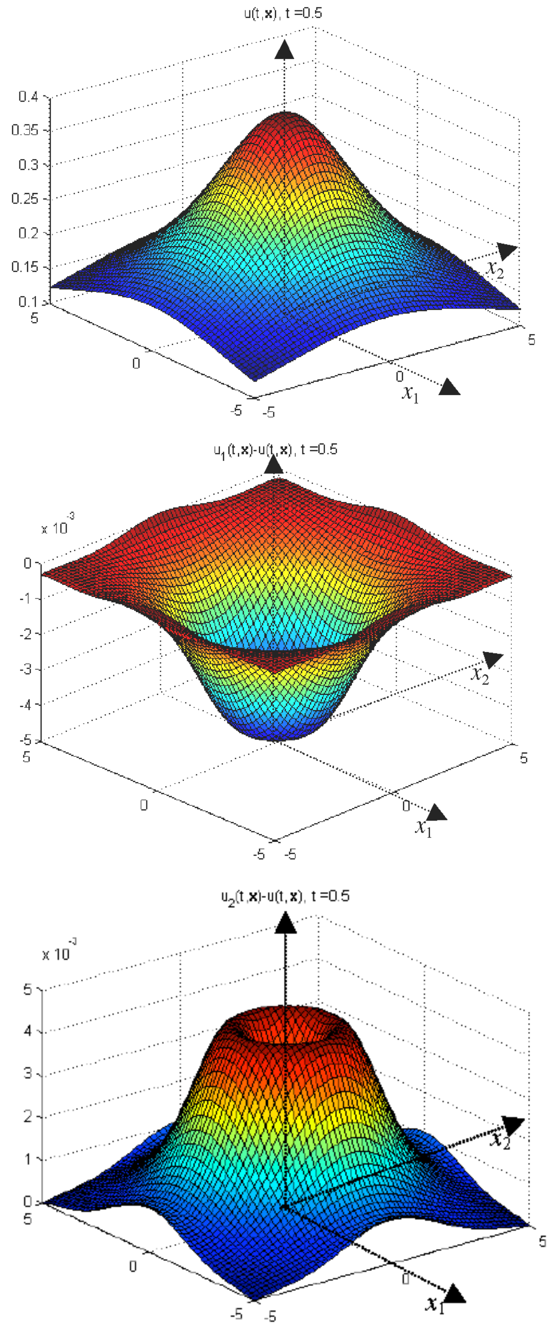

Рис. 1

Из установленных для невязок неравенств вытекает утверждение теоремы 2.

3. Результаты вычислительного эксперимента. В качестве примера была рассмотрена задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - bu^{\alpha}, \qquad u(0, x, x_2) = \frac{1}{\sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2}}$$

при $\alpha = 2$ и при $\alpha = 0.5$.

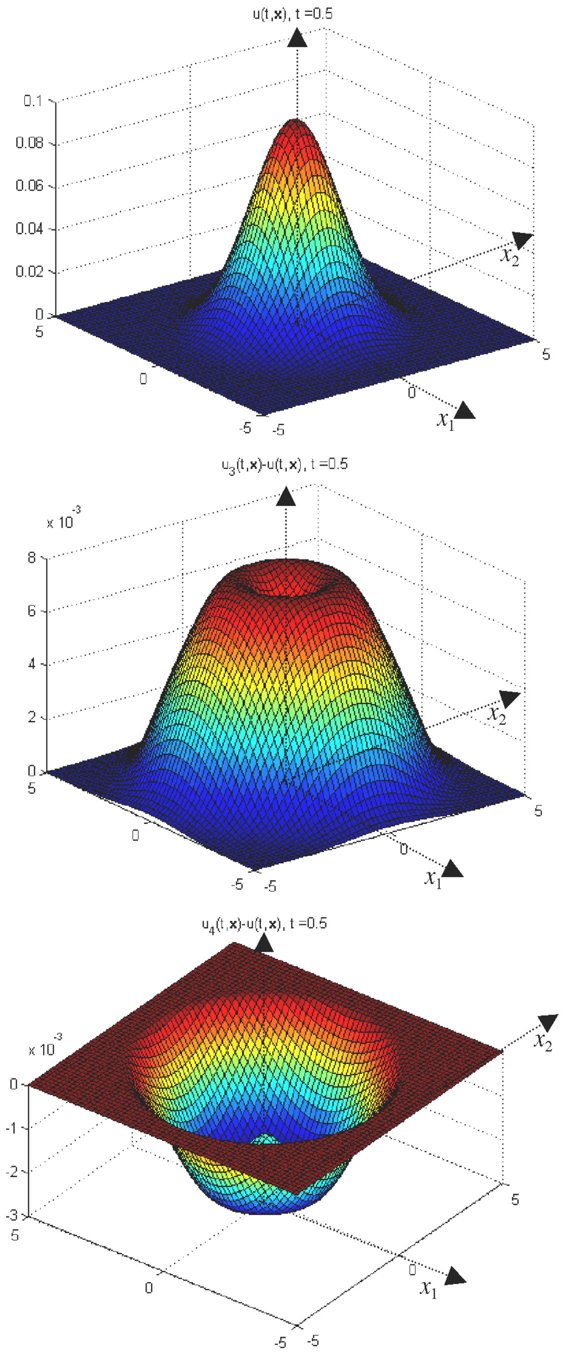

Рис. 2

Для данного начального условия были численно получены значения барьерных функций $u_1(t, x_1, x_2)$ и $u_2(t, x_1, x_2)$ при $\alpha = 2$ и $u_3(t, x_1, x_2)$ и $u_4(t, x_1, x_2)$ при $\alpha = 0.5$, а также методом конечных разностей получено решение этого уравнения $u(t, x_1, x_2)$.

На рис. 1 показаны графики численного решения для $\alpha = 2$, а также разница между численным решением и субпараболической функцией и разница между численным решением и суперпараболической функцией. Графики соответствуют $t = 0.5$. Параметр b взят равным 2.

На рис. 2 показаны графики численного решения для $\alpha = 0.5$, а также разница между численным решением и субпараболической функцией и разница между численным решением и суперпараболической функцией. Графики соответствуют $t = 0.5$. Параметр b взят равным 2. На рис. 2 видно наличие МКН.

Вследствие этого эффекта барьерные функции и решение за конечное время оказываются тождественно равными нулю, причем тем быстрее, чем больше значение параметра b. При $b = 2$ $u_3(t, 0, 0) = 0$ начиная с $t = 1$, $u(t, 0, 0) = 0$ начиная с $t = 0.774$, $u_4(t, 0, 0) = 0$ начиная с $t = 0.767$.

1. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**, № 3. – С. 135 – 176.
2. *Калашников А. С.* Об условиях мгновенной компактификации носителей решений полулинейных параболических уравнений и систем // Мат. заметки. – 1990. – **47**, № 1. – С. 74 – 80.
3. *Galaktionov V. A., Shishkov A. E.* Saint-Venant's principle in blow-up for higher-order quasi-linear parabolic equations // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – 2003. – **113A**. – P. 1075 – 1119.
4. *Бондаренко В. Г.* Возмущенное параболическое уравнение на римановом многообразии // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 977 – 982.
5. *Бондаренко В. Г.* Построение фундаментального решения возмущенного параболического уравнения // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 8. – С. 1011 – 1021
6. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М: Наука, 1987. – 760 с.
7. *Бондаренко В. Г., Селин А. Н.* Оценки решения уравнения типа „реакция – диффузия" // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2007. – № 1. – С. 124 – 128.

Получено 22.05.07,
после доработки — 28.08.07