УДК 517.9

П. О. Касьянов (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),

В. С. Мельник (Ін-т прикл. систем. аналізу НАН України та М-ва освіти і науки України, Київ)

ЕВОЛЮЦІЙНІ НЕРІВНОСТІ З НЕКОЕРЦИТИВНИМИ w_{λ_0}-ПСЕВДОМОНОТОННИМИ ВІДОБРАЖЕННЯМИ ТИПУ ВОЛЬТЕРРА

We consider a class of differential-operator inequalities with noncoercive w_{λ_0}-pseudomonotone operators. The problem of the existence of solutions of the Cauchy problem for these inequalities is investigated by using the Dubinsky method. A priori estimates for these solutions and their derivatives are obtained. We give a model example that illustrates the results and generalizations obtained.

Рассмотрен класс дифференциально-операторных неравенств с некоэрцитивными операторами w_{λ_0}-псевдомонотонного типа. С помощью метода Ю. А. Дубинского исследована проблема существования решения задачи Коши для данных неравенств. Установлены априорные оценки для полученных решений и их производных. Приведен модельный пример, иллюстрирующий полученные результаты.

1. Вступ. Диференціально-операторні включення та еволюційні варіаційні нерівності вивчаються досить інтенсивно. За аналогією з диференціально-операторними рівняннями відомі, принаймні, чотири підходи: метод Фаедо – Гальоркіна, еліптична регуляризація, теорія напівгруп, різницеві апроксимації. Розповсюдження цих підходів на еволюційні включення наштовхується на ряд принципових труднощів. Для диференціально-операторних включень метод напівгруп реалізовано в працях А. А. Толстоногова, Ю. І. Уманського [1, 2], метод сингулярних збурень (Х. Брезис і Ю. А. Дубінський) — в роботах О. М. Вакуленка та В. С. Мельника [3 – 5]. Метод Фаедо – Гальоркіна для диференціально-операторних включень для w_{λ_0}-псевдомонотонних багатозначних відображень розглянуто в [6 – 9]. Метод скінченних різниць на еволюційні включення та варіаційні нерівності було вперше розповсюджено в роботі П. О. Касьянова, В. С. Мельника і Л. Тоскано [10].

Схема Ю. А. Дубінського [11] для диференціально-операторних включень та еволюційних варіаційних нерівностей з некоерцитивними багатозначними w_{λ_0}-псевдомонотонними відображеннями до цього часу систематично не була досліджена.

У даній роботі розглядаються еволюційні варіаційні нерівності з некоерцитивними багатозначними відображеннями. Доведено ряд теорем про розв'язність даних об'єктів.

2. Постановка задачі. Нехай $(V_1, \|\cdot\|_{V_1})$ та $(V_2, \|\cdot\|_{V_2})$ — рефлексивні банахові простори над полем дійсних чисел, неперервно вкладені в дійсний гільбертів простір $(H, (\cdot,\cdot))$, такі що для деякої зліченної множини $\Phi \subset V = V_1 \cap V_2$

$$\Phi \quad \text{щільна в просторах} \quad V,\ V_1,\ V_2 \quad \text{та в} \quad H. \tag{2.1}$$

Після ототожнення $H \equiv H^*$ одержимо

$$V_1 \subset H \subset V_1^*, \qquad V_2 \subset H \subset V_2^*, \tag{2.2}$$

з неперервними та щільними вкладеннями, де $(V_i^*, \|\cdot\|_{V_i^*})$, $i = 1, 2,$ — топологічно спряжений до V_i простір відносно форми

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{V_i}\colon V_i^*\times V_i\to\mathbb{R},$$

яка співпадає на $H\times V$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ в H [12].

Розглянемо функціональні простори $X_i=L_{r_i}(S;H)\cap L_{p_i}(S;V_i)$, де S — скінченний інтервал часу, $1<p_i\le r_i<+\infty$. Простори X_i є рефлексивними банаховими просторами з нормами

$$\|y\|_{X_i}=\|y\|_{L_{p_i}(S;V_i)}+\|y\|_{L_{r_i}(S;H)}.$$

Розглянемо також рефлексивний банахів простір $X=X_1\cap X_2$ з нормою $\|y\|_X = \|y\|_{X_1}+\|y\|_{X_2}$. Нехай X_i^* $(i=1,2)$ спряжений до X_i. Тоді

$$X^*=X_1^*+X_2^*=L_{q_1}(S;V_1^*)+L_{q_2}(S;V_2^*)+L_{r_1'}(S;H)+L_{r_2'}(S;H),$$

де ${r_i}^{-1}+{r_i'}^{-1}={p_i}^{-1}+{q_i}^{-1}=1$, $i=1,2$. Визначимо спарювання на $X^*\times X$:

$$\langle f,y\rangle=\int\limits_S(f_{11}(\tau),y(\tau))_H\,d\tau+\int\limits_S(f_{12}(\tau),y(\tau))_H\,d\tau+$$

$$+\int\limits_S\langle f_{21}(\tau),y(\tau)\rangle_{V_1}d\tau+\int\limits_S\langle f_{22}(\tau),y(\tau)\rangle_{V_2}d\tau=\int\limits_S(f(\tau),y(\tau))\,d\tau,$$

де $f=f_{11}+f_{12}+f_{21}+f_{22}$, $f_{1i}\in L_{r_i'}(S;H)$, $f_{2i}\in L_{q_i}(S;V_i^*)$, $i=1,2$. Зауважимо, що $\langle\cdot,\cdot\rangle$ співпадає зі скалярним добутком в $\mathcal{H}=L_2(S;H)$ на $\mathcal{H}\times X$.

Нехай $A\colon X\rightrightarrows X^*$ — багатозначне відображення. Розглядаються розв'язки в класі $W=\{y\in X\mid\ y'\in X^*\}$ наступної задачі:

$$\begin{cases}\langle y',\xi\rangle+[A(y),\xi]_+\ge\langle f,\xi\rangle\qquad\forall\xi\in W,\\ y(0)=\bar{0},\end{cases}\tag{2.3}$$

де $f\in X^*$ довільне, y' — похідна від елемента $y\in X$ в сенсі простору скалярних розподілів $D^*(S;V^*)=L(D(S);V_w^*)$, з $V=V_1\cap V_2$; V_w^* співпадає з $V^*=V_1^*+V_2^*$ з топологією $\sigma(V^*,V)$ [13].

Для доведення розв'язності задачі (2.3) використаємо окремий випадок методу стаціонарних апроксимацій, представлений у роботі Ю. А. Дубінського [11] для диференціально-операторних рівнянь. Окрім розв'язності даний метод дозволить нам одержати ряд апріорних оцінок, за допомогою яких, наприклад, можна досліджувати динаміку розв'язків для широкого класу прикладних задач, які описуються за допомогою еволюційних нерівностей з некоерцитивними багатозначними відображеннями типу Вольтерра. Цей метод полягає у тому, щоб від задачі (2.3) перейти до диференціально-операторного включення другого порядку

$$-\varepsilon y_\varepsilon''+y_\varepsilon'+\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,Ay_\varepsilon\ni f,\qquad y_\varepsilon(0)=\bar{0},\quad y_\varepsilon'(T)=\bar{0}.\tag{2.4}$$

Потім, довівши розв'язність даної задачі при фіксованому $\varepsilon>0$, одержавши апріорні оцінки розв'язків і спрямувавши $\varepsilon\to 0+$, одержати розв'язки задачі (2.3) з рядом властивостей.

Введемо на рефлексивному банаховому просторі W норму графіка $\|y\|_W = \|y\|_X+\|y'\|_{X^*}$, де

$$\|f\|_{X^*} = \inf_{\substack{f = f_{11}+f_{12}+f_{21}+f_{22}: \\ f_{1i}\in L_{r_i'}(S;H),\ f_{2i}\in L_{q_i}(S;V_i^*),\, i=1,2}} \max\Big\{ \|f_{11}\|_{L_{r_1'}(S;H)};$$

$$\|f_{12}\|_{L_{r_2'}(S;H)};\ \ \|f_{21}\|_{L_{q_1}(S;V_1^*)};\ \ \|f_{22}\|_{L_{q_2}(S;V_2^*)}\Big\}.$$

Зауважимо, що $W\subset C(S;H)$ неперервно. Більш того, для кожних $y,\xi\in W$ та $s,t\in S$ має місце формула інтегрування частинами

$$\big(y(t),\xi(t)\big)-\big(y(s),\xi(s)\big)=\int_s^t\Big\{(y'(\tau),\xi(\tau))+(y(\tau),\xi'(\tau))\Big\}d\tau. \qquad (2.5)$$

Зокрема, при $y=\xi$ маємо

$$\frac{1}{2}\Big(\|y(t)\|_H^2-\|y(s)\|_H^2\Big)=\int_s^t(y'(\tau),y(\tau))d\tau.$$

3. Класи відображень. Нехай Y — деякий банахів простір, Y^* — його топологічно спряжений простір, $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y: Y^*\times Y\to\mathbb{R}$ — спарювання, $A\colon Y\rightrightarrows Y^*$ — строге багатозначне відображення. Для нього визначимо верхню $[A(y),\omega]_+ = \sup\limits_{d\in A(y)}\langle d,w\rangle_X$ і нижню $[A(y),\omega]_- = \inf\limits_{d\in A(y)}\langle d,w\rangle_X$ опорні функції, де $y,\omega\in X$, і також верхню $\|A(y)\|_+ = \sup\limits_{d\in\mathcal{A}(y)}\|d\|_{X^*}$ і нижню $\|A(y)\|_- = \inf\limits_{d\in\mathcal{A}(y)}\|d\|_{X^*}$ норми.

Розглянемо пов'язані з A відображення $\mathrm{co}A\colon Y\rightrightarrows Y^*$ та $\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A\colon Y\rightrightarrows Y^*$, визначені співвідношеннями $(\mathrm{co}A)(y)=\mathrm{co}(A(y))$ та $\Big(\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A(y)\Big)=\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,(A(y))$ відповідно, де $\overset{*}{\overline{}}$ — $*$-слабке замикання в Y^*, $\mathrm{co}(A(y))$ — опукла оболонка множини $A(y)$.

Пропозиція 1 [14]. *Нехай A, $B\colon Y\rightrightarrows Y^*$. Тоді справджуються наступні співвідношення*:

1) $\big[A(y),v_1+v_2\big]_+\le\big[A(y),v_1\big]_++\big[A(y),v_2\big]_+$,
$[A(y),v_1+v_2]_-\ge[A(y),v_1]_-+[A(y),v_2]_-$,
$[A(y),v_1+v_2]_+\ge[A(y),v_1]_++[A(y),v_2]_-$,
$[A(y),v_1+v_2]_-\le[A(y),v_1]_++[A(y),v_2]_-\ \forall y,\,v_1,v_2\in Y$;
2) $[A(y),v]_+=-[A(y),-v]_-$,
$[A(y)+B(y),v]_{+(-)}=[A(y),v]_{+(-)}+[B(y),v]_{+(-)}\ \forall y,v\in Y$;
3) $[A(y),v]_{+(-)}=\Big[\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A(y),v\Big]_{+(-)}\ \forall y,v\in Y$;
4) $[A(y),v]_{+(-)}\le\|A(y)\|_{+(-)}\|v\|_Y$,
$d_H\big(A(y),B(y)\big)\ge\big|\|A(y)\|_{+(-)}-\|B(y)\|_{+(-)}\big|$,
$\|A(y)-B(y)\|_+\ge\big|\|A(y)\|_+-\|B(y)\|_-\big|$, *де $d_H(\cdot,\cdot)$ — метрика Хаусдорфа*;
5) $\Big\|\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A(y)\Big\|_+=\|A(y)\|_+$ *і якщо простір Y рефлексивний, то* $\Big\|\overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\,A(y)\Big\|_-=\|A(y)\|_-\ \forall y\in Y$;
6) *функціонал* $\|\cdot\|_+: C_v(X^*)\to\mathbb{R}_+$ *задовольняє аксіоми норми на* $C_v(X^*)$;
7) *функціонал* $\|\cdot\|_-: C_v(X^*)\to\mathbb{R}_+$ *задовольняє наступні умови*:
   a) $\overline{0}\in A(y)\Leftrightarrow\|A(y)\|_-=0$,

b) $\|\alpha A(y)\|_- = |\alpha| \|A(y)\|_- \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, y \in X$,

c) $\|A(y) + B(y)\|_- \leq \|A(y)\|_- + \|B(y)\|_-$;

Пропозиція 2 [14]. *Включення $d \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y)$ виконується тоді і тільки тоді, коли*

$$[A(y), v]_+ \geq \langle d, v\rangle_Y \quad \forall v \in Y.$$

Пропозиція 3 [14]. *Нехай $a(\cdot\,,\cdot)\colon (D \subset Y) \times Y \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Для кожного $y \in D \subset Y$ функціонал $Y \ni w \mapsto a(y, w)$ є додатньо однорідним, опуклим та напівнеперервним знизу тоді і тільки тоді, коли існує багатозначне відображення $A : Y \rightrightarrows Y^*$ таке, що $D(A) = D$ та*

$$a(y, w) = [A(y), w]_+ \qquad \forall y \in D(A), \quad w \in Y.$$

Нагадаємо, що багатозначне відображення $A\colon Y \rightrightarrows Y^*$ називається *монотонним*, якщо $\forall y_1, y_2 \in Y$ $\langle d_1 - d_2, y_1 - y_2\rangle_Y \geq 0$ $\forall d_1 \in A(y_1)$, $d_2 \in A(y_2)$.

Використовуючи наведені вище дужки, легко показати, що багатозначний оператор $A\colon Y \rightrightarrows Y^*$ монотонний тоді і тільки тоді, коли

$$[A(y_1), y_1 - y_2]_- \geq [A(y_2), y_1 - y_2]_+ \quad \forall y_1,\ y_2 \in Y.$$

Надалі, $y_n \rightharpoonup y$ в Y означатиме, що y_n слабко збігається до y в просторі Y. Якщо Y не рефлексивний, то $y_n \rightharpoonup y$ в Y^* означатиме, що y_n $*$-слабко збігається до y в просторі Y^*. Позначимо через $C_v(Y^*)$ сім'ю всіх непорожніх $*$-слабко замкнених опуклих обмежених підмножин з Y^*.

Означення 1. *Багатозначне відображення $A : Y \rightrightarrows Y^*$ називається*:

– *+(–)-коерцитивним, якщо існує дійсна функція $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, обмежена знизу на обмежених в $\mathbb{R}_+$ множинах, така що $\gamma(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$ та $[A(y), y]_{+(-)} \geq \gamma(\|y\|_Y)\|y\|_Y$ $\forall y \in Y$;*

– *обмеженим, якщо для кожного $L > 0$ існує таке $l > 0$, що $\|A(y)\|_+ \leq l$ $\forall y \in Y : \|y\|_Y \leq L$;*

– *локально обмеженим, якщо для довільного фіксованого $y \in Y$ існують такі сталі $m, M > 0$, що $\|A(\xi)\|_+ \leq M$ при $\|y - \xi\|_Y \leq m$.*

Нехай W — деякий нормований простір з нормою $\|\cdot\|_W$. Припускається, що $W \subset Y$ неперервно, $C \in \Phi$, тобто $C(r_1; \cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ є неперервною функцією для кожного $r_1 \geq 0$, причому $\tau^{-1}C(r_1; \tau r_2) \to 0$ при $\tau \to +0$ $\forall r_1, r_2 \geq 0$, $\|\cdot\|'_W$ — деяка (напів-)норма на Y, компактна відносно $\|\cdot\|_W$ на W та неперервна відносно $\|\cdot\|_Y$ на Y.

Означення 2. *Багатозначне відображення $A\colon Y \rightrightarrows Y^*$ називається*:

– *радіально напівнеперервним знизу (р.н.н.зн.), якщо для кожних фіксованих $y, \xi \in Y$*

$$\varliminf_{t \to +0} \big[A(y + t\xi), \xi\big]_+ \geq [A(y), \xi]_-;$$

– *оператором з напівобмеженою варіацією на W (з (Y, W)-н.о.в.), якщо $\forall y_1$, $y_2 \in Y$, $\|y_1\|_Y \leq R$, $\|y_2\|_Y \leq R$ виконується нерівність*

$$\big[A(y_1), y_1 - y_2\big]_- \geq \big[A(y_2), y_1 - y_2\big]_+ - C(R; \|y_1 - y_2\|'_W);$$

– *λ_0-псевдомонотонним на W (w_{λ_0}-псевдомонотонним), якщо для будь-якої послідовності $\{y_n\}_{n\geq 0} \subset W$ такої, що $y_n \rightharpoonup y_0$ в W, $d_n \rightharpoonup d_0$ в Y^*, де $d_n \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y_n)$ $\forall n \geq 1$, з нерівності*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \langle d_n, y_n - y_0\rangle_Y \leq 0,$$

випливає існування $\{y_{n_k}\}_{k\geq 1}$ з $\{y_n\}_{n\geq 1}$ та $\{d_{n_k}\}_{k\geq 1}$ з $\{d_n\}_{n\geq 1}$:

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\, \langle d_{n_k}, y_{n_k} - w\rangle_Y \geq \big[A(y_0), y_0 - w\big]_- \quad \forall w \in Y.$$

***Зауваження* 1.** Ідею переходу до підпослідовностей в означенні однозначного псевдомонотонного оператора було запропоновано в роботі І. В. Скрипника [15].

***Зауваження* 2.** Надалі $A\colon Y \rightrightarrows Y^*$ означатиме, що A відображає Y в $2^{Y^*} \setminus \varnothing$, тобто A — строге багатозначне замкненозначне відображення.

Лема 1 [14]. *Будь-який строгий багатозначний оператор $A\colon Y \rightrightarrows Y^*$ з $(Y;W)$-напівобмеженою варіацією є обмеженозначним, локально обмеженим та задовольняє властивість* (П), *тобто якщо k_1, $k_2 > 0$, $B \subset Y$ та селектор $d \in A$ такі, що*

$$\langle d(y), y\rangle_Y \leq k_1 \quad \text{для всіх} \ \ y \in B\colon \|y\|_Y \leq k_2,$$

то існує таке $C > 0$, що

$$\|d(y)\|_{Y^*} \leq C \quad \text{для всіх} \ \ y \in B\colon \|y\|_Y \leq k_2.$$

4. Про розв'язність еволюційних нерівностей. Доведемо тепер теорему про розв'язність диференціально-операторних нерівностей з нелінійними коерцитивними відображеннями w_λ-псевдомонотонного типу, використовуючи схему Ю. А. Дубінського, розроблену в [11]. В подальшому вважаємо, що або $r_1 \geq 2$, або $r_2 \geq 2$.

Теорема 1. *Нехай $A\colon X \rightrightarrows X^*$ — $+$-коерцитивний, р.н.н.зн. багатозначний оператор з $(X;W)$-н.о.в. Тоді для кожного $f \in X^*$ існує принаймні один розв'язок $y \in W$ задачі* (2.3).

***Зауваження* 3.** В теоремі 1 відображення A не обов'язково набирає опуклих слабко компактних значень.

***Зауваження* 4.** В наведеній теоремі схема, розроблена в роботі Ю. А. Дубінського [11] для еволюційних рівнянь, розповсюджується на еволюційні нерівності з багатозначними відображеннями з $(X;W)$-н.о.в. Дана схема є новою для нашого класу задач і дозволяє нам не тільки доводити розв'язність, але й одержувати ряд оцінок для розв'язків, що є важливим для подальших досліджень даних об'єктів. Наприклад, в роботах [11, 14] розглядається така ж схема, але для рівнянь, в роботах [3, 4, 7, 8, 21] використовуються інші схеми для диференціально-операторних включень з багатозначними відображеннями монотонного типу, що набирають слабо компактних опуклих значень.

***Зауваження* 5.** Із щільності W в X та із пропозиції 2 випливає, що задача (2.3) еквівалентна наступній:

$$y' + \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y) \ni f, \quad y(0) = \bar{0}, \quad y \in W.$$

Доведення. Для спрощення доведення припустимо, що $S = [0,T]$. Розглянемо простір

$$W_{\bar{0}} := \{y \in W \mid y(0) = \bar{0}\} \quad \text{з нормою} \;\; \|\cdot\|_W.$$

Розглянемо лінійний простір

$$\widetilde{W} = \Big\{y \in L_{p_1}(S; V_1) \cap L_{p_2}(S; V_2) \,\Big|\, y' \in L_2(S; H) = \mathcal{H},\, y(0) = \bar{0}\Big\}$$

з нормою $\|y\|_{\widetilde{W}} = \|y\|_{L_{p_1}(S;V_1)} + \|y\|_{L_{p_2}(S;V_2)} + \|y'\|_{\mathcal{H}}$, $y \in \widetilde{W}$. Зауважимо, що $\widetilde{W} \subset C(S; H)$ неперервно і, більше того, із припущення $\max\{r_1, r_2\} \geq 2$ випливає, що $\widetilde{W} \subset W_{\bar{0}} \subset X$ неперервно. Застосувавши до (2.4) формулу (2.5) (взявши до уваги $y'_\varepsilon(T) = \bar{0}$ та припущення $y''_\varepsilon \in \mathcal{H} + X^*$), одержимо

$$\varepsilon(y'_\varepsilon, \xi')_{\mathcal{H}} + \langle y'_\varepsilon, \xi\rangle + [Ay_\varepsilon, \xi]_+ \geq \langle f, \xi\rangle \quad \forall \xi \in \widetilde{W}. \tag{4.1}$$

Під розв'язком задачі (2.4) розумітимемо такий елемент $y_\varepsilon \in \widetilde{W}$, для якого виконується нерівність (4.1).

Використаємо тепер умову коерцитивності на A. Для кожного $y \in \widetilde{W}$

$$\varepsilon(y', y')_{\mathcal{H}} + \langle y', y\rangle + [Ay, y]_+ - \langle f, y\rangle \geq$$
$$\geq \frac{\|y(T)\|_H^2 - \|y(0)\|_H^2}{2} + [Ay, y]_+ - \|f\|_{X^*}\|y\|_X \geq$$
$$\geq [Ay, y]_+ - \|f\|_{X^*}\|y\|_X \geq \|y\|_X\left(\gamma_A(\|y\|_X) - \|f\|_{X^*}\right),$$

де $\gamma_A(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Тому існує таке $R_1 > 0$, що $\forall \varepsilon > 0$

$$\varepsilon(y', y')_{\mathcal{H}} + \langle y', y\rangle + [Ay, y]_+ - \langle f, y\rangle \geq 0 \quad \forall y \in \widetilde{W}\colon \|y\|_X = R_1. \tag{4.2}$$

Покажемо, що для кожного $\varepsilon > 0$ задача (2.4) має принаймні один розв'язок $y_\varepsilon \in \widetilde{W}$, для якого справджується оцінка

$$\varepsilon\|y'_\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2 + \|y_\varepsilon\|_X \leq k, \tag{4.3}$$

де $k = k(f)$ не залежить від ε.

Оскільки простір V сепарабельний одночасно з $\widetilde{W}$ (це легко перевірити, використовуючи доведення леми VI.1.5 із роботи [12]), то нехай $\{h_n\}_{n\geq 1}$ — повна система в $\widetilde{W}$. Зауважимо, що $h_i(0) = \bar{0}$ для $i \geq 1$. Наближений розв'язок (2.4) шукатимемо у вигляді

$$y_{\varepsilon n} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_\varepsilon^{j,n} h_j,$$

де сталі $\alpha_\varepsilon^{j,n}$ визначаються з наступної системи нерівностей:

$$\varepsilon(y'_{\varepsilon n}, h')_{\mathcal{H}} + \langle y'_{\varepsilon n}, h\rangle + [Ay_{\varepsilon n}, h]_+ \geq \langle f, h\rangle \quad \forall h \in H_n, \tag{4.4}$$

де H_n — лінійна оболонка $\{h_i\}_{i=1}^n$. Зазначимо, що H_n — скінченновимірний сепарабельний банахів простір з нормою $\|\cdot\|_X$. Отже, нехай $\{v_i\}_{i\geq 1} \subset H_n$ — щільна система векторів в H_n.

Покажемо, що для кожного $n \geq 1$ задача (4.4) має принаймні один розв'язок $y_{\varepsilon n} \in H_n$, для якого справджується оцінка $\|y_{\varepsilon n}\|_X \leq R_1$.

Розв'язки (4.4) будемо наближати скінченними системами алгебраїчних нерівностей

$$\begin{cases} \varepsilon(y'_{\varepsilon nm}, v'_i)_{\mathcal{H}} + \langle y'_{\varepsilon nm}, v_i\rangle + [Ay_{\varepsilon nm}, v_i]_+ \geq \langle f, v_i\rangle, \\ \varepsilon(y'_{\varepsilon nm}, v'_i)_{\mathcal{H}} + \langle y'_{\varepsilon nm}, v_i\rangle + [Ay_{\varepsilon nm}, v_i]_- \leq \langle f, v_i\rangle, \quad i = \overline{1,m}, \end{cases} \tag{4.5}$$

де $m \geq 1$ довільне та $y_{\varepsilon nm} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{\varepsilon,m}^{j,n} v_j$.

Покажемо, що для кожного $m \geq 1$ задача (4.5) має принаймні один розв'язок $\bar{\alpha}_{\varepsilon,n}^m = (\alpha_{\varepsilon,m}^{j,n})_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$ такий, що для $y_{\varepsilon nm}(\bar{\alpha}_{\varepsilon,n}^m) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{\varepsilon,m}^{j,n} v_j$ справджується оцінка $\|y_{\varepsilon nm}(\bar{\alpha}_{\varepsilon,n}^m)\|_X \leq R_1$ та множина

$$G_{\varepsilon n}(m) = \left\{ y_{\varepsilon nm}(\bar{\alpha}_{\varepsilon,n}^m) \in H_n \,\middle|\, y_{\varepsilon nm}(\bar{\alpha}_{\varepsilon,n}^m) \text{ - розв'язок } (4.5),\ \|y_{\varepsilon nm}(\bar{\alpha}_{\varepsilon,n}^m)\|_X \leq R_1 \right\}$$

є компактною в H_n.

Для фіксованого $m \geq 1$ розглянемо багатозначне відображення $B\colon \mathbb{R}^m \to \to C_v(\mathbb{R}^m)$, визначене таким чином:

$$\forall \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^m \quad B(\bar{\alpha}) = \big(B_i(\bar{\alpha})\big)_{i=1}^m,$$

де для кожного $i = \overline{1,m}$

$$B_i(\bar{\alpha}) = \Big[\varepsilon(y'(\bar{\alpha}), v'_i)_{\mathcal{H}} + \langle y'(\bar{\alpha}), v_i\rangle + [Ay(\bar{\alpha}), v_i]_- - \langle f, v_i\rangle,$$

$$\varepsilon(y'(\bar{\alpha}), v'_i)_{\mathcal{H}} + \langle y'(\bar{\alpha}), v_i\rangle + [Ay(\bar{\alpha}), v_i]_+ - \langle f, v_i\rangle\Big] \in C_v(\mathbb{R}),$$

$$\bar{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^m, \qquad y(\bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i, \qquad y'(\bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i v'_i.$$

Розглянемо на $\mathbb{R}^m$ норму

$$\|\bar{\alpha}\|_{\mathbb{R}^m} = \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \right\|_X \quad \forall \bar{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$$

та спарювання

$$\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta}\rangle = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i \quad \forall \bar{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m, \quad \bar{\beta} = (\beta_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m.$$

Внаслідок пропозиції 1 та (4.2) для кожного $\bar{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$

$$\big[B(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}\big]_+ = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m b_i \alpha_i \,\middle|\, b_i \in B_i(\bar{\alpha}),\ i = \overline{1,n} \right\} \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^m \Big(\varepsilon(y'(\bar{\alpha}), v'_i)_{\mathcal{H}} + \langle y'(\bar{\alpha}), v_i\rangle + [Ay(\bar{\alpha}), v_i]_+ - \langle f, v_i\rangle \Big)\alpha_i =$$

$$= \sum_{i=1}^m \varepsilon(y'(\bar{\alpha}), \alpha_i v'_i)_{\mathcal{H}} + \langle y'(\bar{\alpha}), \alpha_i v_i\rangle + [Ay(\bar{\alpha}), \alpha_i v_i]_+ - \langle f, \alpha_i v_i\rangle \geq$$

$$\geq \varepsilon(y'(\bar{\alpha}), y'(\bar{\alpha}))_{\mathcal{H}} + \langle y'(\bar{\alpha}), y(\bar{\alpha})\rangle + [Ay(\bar{\alpha}), y(\bar{\alpha})]_+ - \langle f, y(\bar{\alpha})\rangle \geq 0$$

при $\|\bar{\alpha}\|_{\mathbb{R}^m} = \|y(\bar{\alpha})\|_X = R_1$. Таким чином,

$$[B(\bar{\alpha}), \bar{\alpha}]_+ \geq 0 \quad \text{для всіх } \ \bar{\alpha} \in \mathbb{R}^m \colon \|\bar{\alpha}\|_{\mathbb{R}^m} = R_1. \tag{4.6}$$

Аналогічно, для кожного $\bar\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$ та $\bar\beta = (\beta_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$

$$\big[B(\bar\alpha), \bar\beta\big]_+ = \sup\left\{\sum_{i=1}^m b_i\beta_i \;\middle|\; b_i \in B_i(\bar\alpha),\ i = \overline{1,n}\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^m \Big(\varepsilon(y'(\bar\alpha), v_i')_{\mathcal{H}} + \langle y'(\bar\alpha), v_i\rangle - \langle f, v_i\rangle\Big)\beta_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \Big(\max\{[Ay(\bar\alpha), v_i]_+,\ [Ay(\bar\alpha), -v_i]_+\}\Big)\cdot|\beta_i|.$$

Відображення

$$\mathbb{R}^m \ni \bar\alpha \to \sum_{i=1}^m \Big(\varepsilon(y'(\bar\alpha), v_i')_{\mathcal{H}} + \langle y'(\bar\alpha), v_i\rangle - \langle f, v_i\rangle\Big)\beta_i$$

афінне, а отже, неперервне. Напівнеперервність зверху

$$\mathbb{R}^m \ni \bar\alpha \to \max\Big\{\big[Ay(\bar\alpha), v_i\big]_+,\ \big[Ay(\bar\alpha), -v_i\big]_+\Big\} \quad \forall i = \overline{1,m}$$

випливає з того ж твердження для

$$\mathbb{R}^m \ni \bar\alpha \to \big[Ay(\bar\alpha), v_i\big]_+ \quad \text{та} \quad \mathbb{R}^m \ni \bar\alpha \to \big[Ay(\bar\alpha), -v_i\big]_+ \quad i = \overline{1,m}.$$

Останнє випливає з (скінченновимірної) локальної обмеженості та з $(X;W)$-н.о.в. A (див., наприклад, [16]). Звідси для кожного $\bar\beta \in \mathbb{R}^m$ відображення $\mathbb{R}^m \ni$ $\ni \bar\alpha \to \big[B(\bar\alpha), \bar\beta\big]_+$ напівнеперервне зверху. Тому з теореми Кастеня [17] B — напівнеперервне зверху на $\mathbb{R}^m$.

Тепер, завдяки (4.6), можемо застосувати до відображення B багатозначний аналог леми про гострий кут [18]. Звідси одержимо, що для кожного $m \geq 1$ існує принаймні один розв'язок (4.5) $\bar\alpha_{\varepsilon n}^m = (\alpha_{\varepsilon,m}^{j,n})_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$ такий, що $\|\bar\alpha_{\varepsilon n}^m\|_{\mathbb{R}^m} \leq R_1$. Отже, для $y_{\varepsilon nm} = \sum_{j=1}^m \alpha_\varepsilon^{j,n} v_j$ справджується оцінка $\|y_{\varepsilon nm}\|_X \leq R_1$.

Компактність $G_{\varepsilon n}(m)$ легко випливає з обмеженості $G_{\varepsilon n}(m)$ та напівнеперервності зверху B на $\mathbb{R}^m$.

Розглянемо множину

$$G_{\varepsilon n} = \bigcap_{m \geq 1} G_{\varepsilon n}(m).$$

Вона непорожня, бо для кожного $m \geq 1$ $G_{\varepsilon n}(m+1) \subset G_{\varepsilon n}(m)$ та $G_{\varepsilon n}(m)$ — компакт. Отже, існує $y_{\varepsilon n} \in G_{\varepsilon n}$ таке, що $\|y_{\varepsilon n}\|_X \leq R_1$ та

$$\varepsilon(y_{\varepsilon n}', v_i')_{\mathcal{H}} + \langle y_{\varepsilon n}', v_i\rangle + [Ay_{\varepsilon n}, v_i]_+ \geq \langle f, v_i\rangle \quad \forall i \geq 1.$$

Оскільки $\{v_i\}_{i\geq 1}$ щільна в H_n, то виконується (4.4).

З пропозиції 2, пропозиції 3 та (4.4) одержимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ та $n \geq 1$ існує таке $d_{\varepsilon n} \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, Ay_{\varepsilon n}$, що

$$\varepsilon(y_{\varepsilon n}', \xi')_{\mathcal{H}} + \langle y_{\varepsilon n}', \xi\rangle + \langle d_{\varepsilon n}, \xi\rangle = \langle f, \xi\rangle \quad \forall \xi \in H_n. \tag{4.7}$$

Поклавши в останньому $\xi = y_{\varepsilon n} \in H_n$, одержимо

$$\varepsilon\|y'_{\varepsilon n}\|^2_{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\|y_{\varepsilon n}(T)\|^2_H + \langle d_{\varepsilon n}, y_{\varepsilon n}\rangle = \langle f, y_{\varepsilon n}\rangle. \tag{4.8}$$

Звідси

$$\langle d_{\varepsilon n}, y_{\varepsilon n}\rangle \le \|f\|_{X^*}R_1 \quad \forall\varepsilon > 0, \quad n \ge 1.$$

Отже, в силу властивості (П) для A (див. лему 1) існує таке $C > 0$, що

$$\|d_{\varepsilon n}\|_{X^*} \le C \quad \forall\varepsilon > 0, \quad n \ge 1. \tag{4.9}$$

З оцінки (4.8) випливає, що

$$\varepsilon\|y'_{\varepsilon n}\|^2_{\mathcal{H}} \le (C + \|f\|_{X^*})R_1 \quad \forall\varepsilon > 0, \quad n \ge 1.$$

Звідси випливає така оцінка:

$$\varepsilon\|y'_{\varepsilon n}\|^2_{\mathcal{H}} + \|y_{\varepsilon n}\|_X \le k(f) \quad \forall\varepsilon > 0, \quad n \ge 1.$$

Таким чином, можемо припустити, що для довільного $\varepsilon > 0$ послідовність $\{y_{\varepsilon n}\}_{n\ge 1}$ (точніше, деяка її підпослідовність) слабко збігається в рефлексивному банаховому просторі $\widetilde{W}$ до деякої функції y_ε, а отже, $y'_{\varepsilon n} \rightharpoonup y'_\varepsilon$ в $\mathcal{H}$ та $y_\varepsilon(0) = \bar{0}$.

Внаслідок (4.9) для всіх $\varepsilon > 0$ можемо вважати, що з точністю до підпослідовності $d_{\varepsilon n} \rightharpoonup \varkappa_\varepsilon$ в X^*. Перейшовши до границі в рівнянні (4.7), одержимо

$$\varepsilon(y'_\varepsilon, \xi')_{\mathcal{H}} + \langle y'_\varepsilon, \xi\rangle + \langle \varkappa_\varepsilon, \xi\rangle = \langle f, \xi\rangle \quad \forall\xi \in \widetilde{W}. \tag{4.10}$$

Покажемо тепер, що $\varkappa_\varepsilon \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, Ay_\varepsilon$. З $(X;W)$-н.о.в. A маємо

$$\begin{aligned}\varepsilon(y'_{\varepsilon n} - \xi', y'_{\varepsilon n} - \xi')_{\mathcal{H}} + \langle y'_{\varepsilon n} - \xi', y_{\varepsilon n} - \xi\rangle + [Ay_{\varepsilon n}, y_{\varepsilon n} - \xi]_- \ge \\ \ge [A\xi, y_{\varepsilon n} - \xi]_+ - C_A\big(R; \|y_{\varepsilon n} - \xi\|'_W\big) \quad \forall\xi \in \widetilde{W},\end{aligned} \tag{4.11}$$

де $\|\cdot\|'_W$ — напівнорма, компактна відносно норми в W та норми в $\widetilde{W}$. Тут $R > 0$ таке, що $\|y_{\varepsilon n}\|_X \le R$, $\|\xi\|_X \le R$, $k(f) \le R$.

Внаслідок щільності $\cup_{n\ge 1}H_n$ в $\widetilde{W}$ існує послідовність $v_{\varepsilon n} \in H_n$ така, що для фіксованого $\varepsilon > 0$

$$v_{\varepsilon n} \to y_\varepsilon \quad \text{сильно в } \widetilde{W} \text{ при } n \to \infty.$$

Звідси за допомогою (4.7) та (4.11) одержимо

$$\begin{aligned}&\varepsilon(y'_{\varepsilon n}, y'_{\varepsilon n} - \xi')_{\mathcal{H}} + \langle y'_{\varepsilon n}, y_{\varepsilon n} - \xi\rangle + \\ &+ \langle d_{\varepsilon n}, y_{\varepsilon n} - \xi\rangle - \varepsilon(\xi', y'_{\varepsilon n} - \xi')_{\mathcal{H}} - \langle \xi', y_{\varepsilon n} - \xi\rangle = \\ &= \langle f, y_{\varepsilon n} - v_{\varepsilon n}\rangle + \varepsilon(y'_{\varepsilon n}, v'_{\varepsilon n} - \xi')_{\mathcal{H}} + \\ &+ \langle y'_{\varepsilon n}, v_{\varepsilon n} - \xi\rangle + \langle d_{\varepsilon n}, v_{\varepsilon n} - \xi\rangle - \varepsilon(\xi', y'_{\varepsilon n} - \xi')_{\mathcal{H}} - \langle \xi', y_{\varepsilon n} - \xi\rangle \ge \\ &\ge \varepsilon(y'_{\varepsilon n} - \xi', y'_{\varepsilon n} - \xi')_{\mathcal{H}} + \langle y'_{\varepsilon n} - \xi', y_{\varepsilon n} - \xi\rangle + [Ay_{\varepsilon n}, y_{\varepsilon n} - \xi]_- \ge \\ &\ge [A\xi, y_{\varepsilon n} - \xi]_+ - C_A(R; \|y_{\varepsilon n} - \xi\|'_W).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Виконуються наступні співвідношення:

$$\langle f, y_{\varepsilon n} - v_{\varepsilon n}\rangle \to 0, \qquad (y'_{\varepsilon n}, v'_{\varepsilon n} - \xi')_{\mathcal{H}} \to (y'_\varepsilon, y'_\varepsilon - \xi')_{\mathcal{H}},$$

$$\langle y'_{\varepsilon n}, v_{\varepsilon n} - \xi\rangle \to \langle y'_\varepsilon, y_\varepsilon - \xi\rangle, \qquad \langle d_{\varepsilon n}, v_{\varepsilon n} - \xi\rangle \to \langle \varkappa_\varepsilon, y_\varepsilon - \xi\rangle,$$
$$(\xi', y'_{\varepsilon n} - \xi')_{\mathcal{H}} \to (\xi', y'_\varepsilon - \xi')_{\mathcal{H}}, \qquad \langle \xi', y_{\varepsilon n} - \xi\rangle \to \langle \xi', y_\varepsilon - \xi\rangle,$$
$$\varliminf_{n\to\infty} [A\xi, y_{\varepsilon n} - \xi]_+ \ge [A\xi, y_\varepsilon - \xi]_+,$$
$$C_A(R; \|y_{\varepsilon n} - \xi\|'_W) \to C_A(R; \|y_\varepsilon - \xi\|'_W)$$

при $n \to \infty$. Тоді, перейшовши в (4.12) до границі при $n \to \infty$, одержимо

$$\varepsilon(y'_\varepsilon, y'_\varepsilon - \xi')_{\mathcal{H}} + \langle y'_\varepsilon, y_\varepsilon - \xi\rangle + \langle \varkappa_\varepsilon, y_\varepsilon - \xi\rangle - \varepsilon(\xi', y'_\varepsilon - \xi')_{\mathcal{H}} - \langle \xi', y_\varepsilon - \xi\rangle =$$
$$= \varepsilon(y'_\varepsilon - \xi', y'_\varepsilon - \xi')_{\mathcal{H}} + \langle y'_\varepsilon - \xi', y_\varepsilon - \xi\rangle + \langle \varkappa_\varepsilon, y_\varepsilon - \xi\rangle \ge$$
$$\ge [A\xi, y_\varepsilon - \xi]_+ - C_A(R; \|y_\varepsilon - \xi\|'_W). \tag{4.13}$$

Покладемо в останній нерівності $\xi = y_\varepsilon - \tau\omega$, де $\omega \in \widetilde{W}$, і отримаємо

$$\tau\varepsilon(\omega', \omega')_{\mathcal{H}} + \tau\langle \omega', \omega\rangle + \langle \varkappa_\varepsilon, \omega\rangle \ge$$
$$\ge [A(y_\varepsilon - \tau\omega), \omega]_+ - \frac{1}{\tau} C_A(R; \|\tau\omega\|'_W).$$

Завдяки р.н.н.зн. A можемо перейти до границі при $\tau \to +0$, одержимо

$$\langle \varkappa_\varepsilon, \omega\rangle \ge [Ay_\varepsilon, \omega]_- \quad \forall \omega \in \widetilde{W}.$$

Тому $\varkappa_\varepsilon \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, Ay_\varepsilon$, тобто y_ε задовольняє нерівність (4.1).

Зауважимо також, що з (4.10) та із означення похідної в сенсі $\mathcal{D}(S; V^*)$ випливає, що

$$\varepsilon y''_\varepsilon = d_{1\varepsilon} + d_{2\varepsilon}, \qquad y'_\varepsilon(T) = \bar{0}, \tag{4.14}$$

де $d_{1\varepsilon} = \varkappa_\varepsilon - f \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y_\varepsilon) - f \subset X^*$ та $d_{2\varepsilon} = y'_\varepsilon \in \mathcal{H}$. Тому $y''_\varepsilon \in X^* + \mathcal{H}$.

Нехай $\varepsilon \to 0$. Тоді з точністю до підпослідовності $y_\varepsilon \rightharpoonup y$ в X. Отже, з (4.14) та умови $y'_\varepsilon(T) = \bar{0}$ маємо

$$y'_\varepsilon(t) = -\varepsilon^{-1} \int\limits_0^{T-t} d_{1\varepsilon}(T - \tau) e^{-(T-t-\tau)/\varepsilon} d\tau, \quad t \in S,$$

де $\{d_{1\varepsilon}\}$ — обмежена множина в X^*. Оскільки $\varepsilon^{-1} \displaystyle\int_0^\infty e^{-(\tau/\varepsilon)} d\tau = 1$, то з нерівності для згорток випливає, що $\{y'_\varepsilon\}$ — обмежена множина в X^*. Таким чином, можемо припустити, що $y_\varepsilon \rightharpoonup y$ в W з точністю до підпослідовності.

Використавши (4.3), одержимо

$$\varepsilon\left|(y'_\varepsilon, \xi')_{\mathcal{H}}\right| \le \varepsilon\|y'_\varepsilon\|_{\mathcal{H}}\|\xi'\|_{\mathcal{H}} \le \sqrt{k}\sqrt{\varepsilon}\|\xi'\|_{\mathcal{H}} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0+.$$

Тоді, внаслідок рівності (4.10) $\Big($зауважимо, що $\varkappa_\varepsilon \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, Ay_\varepsilon\Big)$,

$$\langle y', \xi\rangle + \langle \varkappa, \xi\rangle = \langle f, \xi\rangle \quad \forall \xi \in \widetilde{W}, \tag{4.15}$$

де $\varkappa$ — слабка границя послідовності $\varkappa_\varepsilon$ в X^*. Зауважимо, однак, що рівність (4.15) виконується для будь-якого $\xi \in W$. Внаслідок пропозиції 2 залишилось показати, що $\langle \varkappa, \xi \rangle \leq [Ay, \xi]_+ \ \forall \xi \in W$. З нерівності (4.13), істинної для y_ε, та з (4.10) випливає співвідношення

$$\langle f, y_\varepsilon - \xi \rangle - \varepsilon(\xi', y_\varepsilon' - \xi')_{\mathcal{H}} - \langle \xi', y_\varepsilon - \xi \rangle \geq$$
$$\geq [A\xi, y_\varepsilon - \xi]_+ - C_A\big(R; \|y_\varepsilon - \xi\|_W'\big),$$

і після переходу до границі при $\varepsilon \to 0+$ (внаслідок (4.15)) з точністю до підпослідовності маємо нерівність

$$\langle y' - \xi', y - \xi \rangle + \langle \varkappa, y - \xi \rangle \geq [A\xi, y - \xi]_+ - C_A\big(R; \|y - \xi\|_W'\big)$$

істинну для будь-якого $\xi \in W$. Поклавши в ній $\xi = y - \tau\omega$, $\omega \in W$, знаходимо

$$\tau\langle \omega', \omega \rangle + \langle \varkappa, \omega \rangle \geq \big[A(y - \tau\omega), \omega\big]_+ - \frac{1}{\tau} C_A\big(R; \tau\|\omega\|_W'\big).$$

Звідси, перейшовши до границі при $\tau \to +0$, внаслідок р.н.н.зн. оператора A та властивостей функції C_A, одержимо необхідне співвідношення:

$$\langle \varkappa, \omega \rangle \geq [A(y), \omega]_- \quad \forall \omega \in W.$$

Теорему 1 доведена.

Означення 3. *Оператор $A\colon X \rightrightarrows X^*$ називається оператором типу Вольтерра, якщо для довільного $t \in S$ із рівності $u(s) = v(s)$ для майже всіх $s \in [0, t]$ $(u, v \in X)$ випливає, що $\Big(\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(u)\Big)(s) = \Big(\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(v)\Big)(s)$ для майже всіх $s \in [0, t]$ в тому сенсі, що $[A(u), \xi_t]_+ = [A(v), \xi_t]_+ \ \forall \xi_t \in X$ таких, що $\xi_t(s) = 0$ для майже всіх $s \in S \backslash [0, t]$.*

***Зауваження* 6.** Нехай в останній теоремі A — оператор Вольтерра, $[\cdot]_{V_i}$ — деяка напівнорма на V_i, $i = 1, 2$; припустимо, що $[y]_{X_i} = \left(\int_S [y(\tau)]_{V_i}^{p_i} d\tau\right)^{1/p_i}$. Очевидно, що $[\cdot]_{X_i}$ — напівнорма на X. Можемо отримати рівномірну обмеженість розв'язків задачі (4.4), якщо замість +-коерцитивності оператора $A\colon X \rightrightarrows X^*$ виконується така умова:

$$\exists \lambda_0 > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{та} \quad f \in X^* \quad \text{такі, що} \ \ \forall y \in W$$

$$\langle y', y \rangle + \langle d(y), y \rangle \leq \langle f, y \rangle \quad \text{для заданого} \ \ d \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A, \tag{4.16}$$

$$[y]_{X_1} + [y]_{X_2} + \lambda_0 \|y\|_{L_{p_0}(S;H)} \geq \beta \|y\|_X, \tag{4.17}$$

$$\langle d(y), y \rangle \geq \gamma_1 [y]_{X_1}^{p_1} + \gamma_2 [y]_{X_2}^{p_2} + \alpha, \tag{4.18}$$

де $p_0 = \max\{r_1, r_2\}$.

Зауважимо, що достатніми умовами для (4.16) – (4.18) є наступні: для кожного $y \in X$

$$[y]_{X_1} + [y]_{X_2} + \lambda_0 \|y\|_{L_{p_0}(S;H)} \geq \beta \|y\|_X, \tag{4.17$'$}$$

$$[Ay, y]_- \geq \gamma_1 [y]_{X_1}^{p_1} + \gamma_2 [y]_{X_2}^{p_2} + \alpha, \tag{4.18$'$}$$

але умови (4.16) – (4.18) слабші за (4.17$'$), (4.18$'$.)

Відмінність у доведенні теореми 1, за цих умов, полягає лише в одержанні оцінки

$$\|y_{\varepsilon n}\|_X \leq R_1 \quad \text{для кожних } \ \varepsilon > 0, \ \ n \geq 1,$$

оскільки розв'язність задачі (4.4) в багатьох випадках випливає з теорії розв'язності алгебраїчних нерівностей та включень (в теоремі 1 ми спочатку вибираємо обмежену множину, якій належатимуть розв'язки, а тут ми покажемо, що розв'язки задачі (4.4) (якщо вони існують) є рівномірно обмеженими). Оскільки A — оператор Вольтерра з н.о.в. на W, то з (4.16) – (4.18) випливає, що для кожного $t \in S$

$$(\|y(t)\|_H^2 - \|y(0)\|_H^2)/2 + \langle d(y), y\rangle_{X_t} \leq \langle f, y\rangle_{X_t} \quad \text{для заданого } \ d \in A, \qquad (4.19)$$

$$[y]_{X_{1t}} + [y]_{X_{2t}} + \lambda_0 \|y\|_{L_{p_0}(0,t;H)} \geq \beta \|y\|_{X_t}, \qquad (4.20)$$

та

$$\langle d(y), y\rangle_{X_t} \geq \gamma_1 [y]_{X_{1t}}^{p_1} + \gamma_2 [y]_{X_{2t}}^{p_2} + \widetilde{\alpha}, \qquad (4.21)$$

де при $i = 1,2$ $[y]_{X_{it}} = \left(\int_0^t \big[y(\tau)\big]_V^{p_i} d\tau\right)^{1/p_i}$ — напівнорма на $X_t = X([0,t])$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{X_t}$ — спарювання на $X_t^* \times X_t$. Тоді, використавши нерівності Коші та Юнга, а також (4.7), (4.8), (4.19), (4.20), (4.21) та $y_{\varepsilon n}(0) = \bar{0}$, одержимо

$$\frac{1}{2}\|y_{\varepsilon n}(t)\|_H^2 + \gamma_1 \int_0^t [y_{\varepsilon n}(\tau)]_{V_1}^{p_1} d\tau + \gamma_2 \int_0^t [y_{\varepsilon n}(\tau)]_{V_2}^{p_2} d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|y_{\varepsilon n}(t)\|_H^2 + \langle d_{\varepsilon n}, y_{\varepsilon n}\rangle_{X_t} - \widetilde{\alpha} \leq \langle f, y_{\varepsilon n}\rangle_{X_t} - \widetilde{\alpha} \leq \|f\|_{X^*{}_t}\|y_{\varepsilon n}\|_{X_t} - \widetilde{\alpha} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta}\|f\|_{X^*{}_t}\Big([y_{\varepsilon n}]_{X_{1t}} + [y_{\varepsilon n}]_{X_{2t}} + \lambda_0\|y_{\varepsilon n}\|_{L_{p_0}(0,t;H)}\Big) - \widetilde{\alpha} \leq$$

$$\leq C_1 + \frac{\gamma_1}{2}\int_0^t [y_{\varepsilon n}(\tau)]_{V_1}^{p_1} d\tau + \frac{\gamma_2}{2}\int_0^t [y_{\varepsilon n}(\tau)]_{V_2}^{p_2} d\tau + C_2\left(\int_0^t \|y_{\varepsilon n}(\tau)\|_H^{p_0} d\tau\right)^{2/p_0} \leq$$

$$\leq C_1 + \frac{\gamma_1}{2}[y_{\varepsilon n}]_{X_{1t}}^{p_1} + \frac{\gamma_2}{2}[y_{\varepsilon n}]_{X_{2t}}^{p_2} + C_2\|y_{\varepsilon n}\|_{L_{p_0}([0,t];H)}^2.$$

Тому

$$\|y_{\varepsilon n}(t)\|_H^2 + \gamma_1[y_{\varepsilon n}]_{X_{1t}}^{p_1} + \gamma_2[y_{\varepsilon n}]_{X_{2t}}^{p_2} \leq 2C_1 + 2C_2\|y_{\varepsilon n}\|_{L_{p_0}([0,t];H)}^2,$$

звідси

$$\|y_{\varepsilon n}(t)\|_H^{p_0} \leq C_3 + C_3\int_0^t \|y_{\varepsilon n}(\tau)\|_H^{p_0} d\tau \quad \text{для всіх } \ t \in S, \ \ \varepsilon > 0 \ \text{ та } \ n \geq 1.$$

І, внаслідок леми Гронуола, $\|y_{\varepsilon n}(t)\|_H^{p_0} \leq C_4 e^{C_4 t}$, тобто $\|y_{\varepsilon n}(t)\|_H \leq C_5$. Тоді $[y_{\varepsilon n}]_{X_{it}} \leq C_6$, $i = 1,2$, та $\|y_{\varepsilon n}\|_{X_t} \leq C_7$. Внаслідок довільності $t \in S$ одержимо, що $\|y_{\varepsilon n}\|_X \leq C_7$.

5. Диференціально-операторні нерівності з некоерцитивними відображеннями. Теорема 2 та її наслідок 1 стосуються розв'язності еволюційних нерівностей з некоерцитивними багатозначними операторами Вольтерра з $(X;W)$-н.о.в. Доведення даних тверджень грунтується на результатах теореми 1. Для диференціально-операторних рівнянь аналогічні результати для монотонних однозначних відображень містяться в [12], для однозначних відображень з напівобмеженою варіацією — в [14]. Результати щодо розв'язності диференціально-операторних включень та еволюційних варіаційних нерівностей з коерцитивними багатозначними відображеннями містяться в [1 – 10, 14, 21]. Для диференціально-операторних включень та еволюційних нерівностей аналогічних результатів не існує.

Теорема 2. *Нехай* $\max\{r_1, r_2\} \geq 2$, $A\colon X \rightrightarrows X^*$ *— р.н.н.зн. багатозначний оператор, і для деякого* $\lambda > 0$

$$\sup_{\zeta(y)\in A(y)} \int\limits_S e^{-2\lambda t}\big(\zeta(y)(t) + \lambda y(t), y(t)\big)dt \geq \gamma(\|y\|_X)\|y\|_X \quad \forall y \in X, \tag{5.1}$$

де $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *— обмежена знизу на обмежених в* $\mathbb{R}_+$ *множинах функція така, що* $\gamma(r) \to +\infty$ *при* $r \to \infty$, *та* $\forall R > 0$, $\forall y, \xi \in X\colon \|y\|_X \leq R$, $\|\xi\|_X \leq R$,

$$\inf_{\zeta(y)\in A(y)} \int\limits_S e^{-2\lambda t}\big(\zeta(y)(t) + \lambda y(t), y(t) - \xi(t)\big)dt \geq$$

$$\geq \sup_{\zeta(\xi)\in A(\xi)} \int\limits_S e^{-2\lambda t}\big(\zeta(\xi)(t) + \lambda\xi(t), y(t) - \xi(t)\big)dt -$$

$$- C_A(R; \|y - \xi\|_{L_{p_0}(S;V_0)}), \tag{5.2}$$

де $C_A \in \Phi$, $p_0 = \min\{p_1, p_2\}$, V *компактно вкладений в банахів простір* V_0 *і* $V_0 \subset V^*$ *неперервно. Тоді справджується твердження теореми* 1.

Доведення. Введемо позначення $y_\lambda(t) = e^{-\lambda t}y(t)$, $f_\lambda(t) = e^{-\lambda t}f(t)$, $(A_\lambda y_\lambda)(t) = e^{-\lambda t}(Ay)(t) + \lambda y_\lambda(t)$, тобто

$$(d_\lambda \in A_\lambda(y_\lambda)) \Leftrightarrow (\forall w \in X \quad \langle d_\lambda, w\rangle_X \leq [A(y) + \lambda y, w_\lambda]_+).$$

Тоді $A_\lambda\colon X \rightrightarrows X^*$ та $y \in W$ є розв'язком задачі (2.3) тоді і тільки тоді, коли y_λ задовольняє наступне:

$$\langle y_\lambda', \xi\rangle + [A_\lambda y_\lambda, \xi]_+ \geq \langle f_\lambda, \xi\rangle \quad \forall \xi \in W, \quad y_\lambda(0) = \bar{0}.$$

Тому потрібно перевірити, що A_λ задовольняє всі умови теореми 1. Радіальна напівнеперервність знизу очевидна. Далі, оскільки $\|y_\lambda\|_X \leq \|y\|_X$ та

$$\|y_\lambda\|_X^{-1}[A_\lambda y_\lambda, y_\lambda]_+ \geq$$

$$\geq \|y\|_X^{-1} \sup_{\zeta(y)\in A(y)} \int\limits_S e^{-2\lambda t}\big(\zeta(y)(t) + \lambda y(t), y(t)\big)dt \geq \gamma(\|y\|_X)\|y\|_X,$$

то оператор A_λ — +-коецитивний. Відповідно до означення

$$[A_\lambda y_\lambda, y_\lambda - \xi_\lambda]_- =$$

$$= \inf_{\zeta(y)\in A(y)} \int\limits_S \big(e^{-\lambda t}\zeta(y)(t) + \lambda y(t)e^{-\lambda t}, e^{-\lambda t}(y(t) - \xi(t))\big)dt =$$

$$= \inf_{\zeta(y)\in A(y)} \int\limits_S e^{-2\lambda t}\big(\zeta(y)(t) + \lambda y(t), y(t) - \xi(t)\big)dt \geq$$

$$\geq \sup_{\zeta(\xi)\in A(\xi)} \int\limits_S e^{-2\lambda t}\big(\zeta(\xi)(t) + \lambda \xi(t), y(t) - \xi(t)\big)dt - C_A(R; \|y-\xi\|_{L_{p_0}(S;V_0)}) =$$

$$= \sup_{\zeta(\xi)\in A(\xi)} \int\limits_S \big(e^{-\lambda t}\zeta(\xi)(t) + \lambda \xi(t)e^{-\lambda t}, e^{-\lambda t}(y(t) - \xi(t))\big)dt -$$

$$- C_A(R; \|y-\xi\|_{L_{p_0}(S;V_0)}) =$$

$$= [A_\lambda \xi_\lambda, y_\lambda - \xi_\lambda]_+ - C_A(R; \|y-\xi\|_{L_{p_0}(S;V_0)}). \tag{5.3}$$

Розглянемо ваговий простір $L_{p_0,\lambda}(S;V_0)$, що складається з вимірних функцій $y_\lambda\colon S \to$ $\to V_0$, для яких інтеграл $\int\limits_S e^{\lambda t p_0}\|y_\lambda(t)\|_{V_0}^{p_0}dt$ скінченний. Тоді

$$\|y-\xi\|_{L_{p_0}(S;V_0)} = \left(\int\limits_S e^{\lambda t p_0}\|y_\lambda(t) - \xi_\lambda(t)\|_{V_0}^{p_0}dt\right)^{1/p_0} = \|y_\lambda - \xi_\lambda\|_{L_{p_0,\lambda}(S;V_0)}.$$

Тому з (5.3) отримуємо

$$[A_\lambda y_\lambda, y_\lambda - \xi_\lambda]_- \geq [A_\lambda \xi_\lambda, y_\lambda - \xi_\lambda]_+ - C_A(R; \|y_\lambda - \xi_\lambda\|_{L_{p_0,\lambda}(S;V_0)}).$$

Доведення теореми завершує той факт, що вкладення $W \subset L_{p_0,\lambda}(S;V_0)$ компактне. Це прямий наслідок неперервності вкладення

$$W \subset \Big\{ y \in L_{p_0}(S;V) \,\Big|\, y' \in L_{\min\{r_1', r_2'\}}(S;V^*)\Big\}$$

та леми про компактність (див. [19], теорема 1.5.1) з $B_0 = V$, $B = V_0$, $B_1 = V^*$, $p_0 = p_0$ та $p_1 = \min\{r_1', r_2'\}$.

Надалі припускатимемо виконання такої умови для $A\colon X \rightrightarrows X^*$.

Означення 4. *Багатозначне відображення* $A\colon X \rightrightarrows X^*$ *задовольняє умову* (H), *якщо для довільних* $y \in X$, $n \geq 1$, $\{d_i\}_{i=1}^n \subset A(y)$ *та* $E_j \subset S$, $j = \overline{1,n}$: $\forall j = \overline{1,n}$ E_j *— вимірна,* $\cup_{j=1}^n E_j = S$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ $\forall i \neq j$, $i,j = \overline{1,n}$, *елемент* $d(\cdot) = \sum_{j=1}^n d_j(\cdot)\chi_{E_j}(\cdot) \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y)$, *де* $\chi_{E_j}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in E_j, \\ 0, & \textit{інакше.} \end{cases}$

***Наслідок* 1.** *Нехай* $\max\{r_1, r_2\} \geq 2$, *для деякого* $\lambda \geq 0$ $A + \lambda I\colon X \rightrightarrows X^*$ *є р.н.н.зн. +-коерцитивним оператором типу Вольтерра з* $(X;W)$*-н.о.в. з* $\|\cdot\|_W' =$ $= \|\cdot\|_{L_{p_0}(S;V_0)}$ *(*p_0, V_0 *задовольняють умови теореми* 2), *що задовольняє умову* (H). *Тоді справджується твердження теореми* 2.

***Зауваження* 7.** В наслідку 1 умову (H) для A та +-коерцитивність для $A + \lambda I$ на X можна замінити на −-коерцитивність для $A + \lambda I$ на X.

Доведення. Доведемо, що за виконання умов наслідку, мають місце співвідношення (5.1) та (5.2). Радіальна напівнеперервність знизу легко перевіряється. Доведемо напівобмеженість варіації. Нехай для всіх $R > 0$, $y, \xi \in X$: $\|y\|_X \leq R$, $\|\xi\|_X \leq R$ виконується

$$\big[A(y) - A(\xi) + \lambda y - \lambda\xi, y - \xi\big]_- + C_A(R; \|y-\xi\|_W') \geq 0.$$

Покладемо $\hat{C_A}(R;\cdot) = \max\limits_{\tau\in[0,t]} C_A(R;\tau)$ для всіх $R, t\geq 0$ ($\hat{C_A}\in\Phi$),

$$z_t(\tau) = \begin{cases} z(\tau), & 0\leq\tau\leq t, \\ \bar{0}, & t<\tau\leq T, \end{cases} \qquad t\in S, \quad z\in X.$$

Нехай $\zeta,\eta\in A$ — фіксовані селектори. Оскільки A — оператор типу Вольтерра, то $\forall t\in S$

$$\int\limits_0^t \big(\zeta(y)(\tau)+\lambda y(\tau)-\eta(\xi)(\tau)-\lambda\xi(\tau), y(\tau)-\xi(\tau)\big)d\tau + \hat{C_A}\left(R;\|y-\xi\|'_{W_t}\right) =$$

$$= \int\limits_0^T \big(\zeta(y_t)(\tau)+\lambda y_t(\tau)-\eta(\xi_t)(\tau)-\lambda\xi_t(\tau), y_t(\tau)-\xi_t(\tau)\big)d\tau +$$

$$+ \hat{C}_A\left(R;\|y_t-\xi_t\|'_W\right)\geq$$

$$\geq [(A+\lambda I)(y_t)-(A+\lambda I)(\xi_t), y_t-\xi_t]_- + \hat{C}_A(R;\|y_t-\xi_t\|'_W)\geq 0,$$

бо $\|y_t\|_X\leq\|y\|_X$ та $\|\xi_t\|_X\leq\|\xi\|_X$. Тут $\|\cdot\|'_{W_t} = \|\cdot\|_{L_{p_0}([0,t];V_0)}$.

Покладемо

$$g(\tau) = \big(\zeta(y)(\tau)+\lambda y(\tau)-\eta(\xi)(\tau)-\lambda\xi(\tau), y(\tau)-\xi(\tau)\big), \quad \tau\in S,$$

$$h(t) = \hat{C}_A\left(R;\|y-\xi\|'_{W_t}\right), \quad t\in S.$$

Зауважимо, що функція $S\ni t\to h(t)$ — монотонно неспадна та

$$\int\limits_0^t g(\tau)d\tau\geq -h(t) \quad \forall t\in S.$$

Отже,

$$\int\limits_0^T e^{-2\lambda\tau}\big(\zeta(y)(\tau)+\lambda y(\tau)-\eta(\xi)(\tau)-\lambda\xi(\tau), y(\tau)-\xi(\tau)\big)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^T e^{-2\lambda\tau}g(\tau)d\tau = e^{-2\lambda T}\int\limits_0^T g(\tau)d\tau + 2\lambda\int\limits_0^T e^{-2\lambda\tau}\int\limits_0^\tau g(s)dsd\tau\geq$$

$$\geq -e^{-2\lambda T}h(T) - 2\lambda\int\limits_0^T e^{-2\lambda\tau}h(\tau)d\tau \geq -h(T)\left[e^{-2\lambda T}+2\lambda\int\limits_0^T e^{-2\lambda\tau}d\tau\right] =$$

$$= -h(T) = -\hat{C}_A\big(R;\|y-\xi\|'_W\big),$$

звідки випливає (5.2).

Перевіримо (5.1). Нехай

$$[(A+\lambda I)y, y]_+\geq\gamma(\|y\|_X)\|y\|_X \quad \forall y\in X,$$

де $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — обмежена знизу на обмежених в $\mathbb{R}_+$ множинах функція така, що $\gamma(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$ (це очевидно випливає з +-коерцитивності $A + \lambda I$). Звідси $\inf\limits_{s \geq 0} \gamma(s) = a > -\infty$. Для довільного $b > a$ розглянемо непорожню обмежену в $\mathbb{R}_+$ множину $A_b = \{c \geq 0 \mid \gamma(c) \leq b\}$. Нехай $c_b = \sup A_b$ для довільного $b > a$. Зауважимо, що $\forall b_1 > b_2 > a$ $+\infty > c_{b_1} \geq c_{b_2}$ і $c_b \to +\infty$ при $b \to +\infty$. Покладемо

$$\hat{\gamma}(t) = \begin{cases} a, & t \in [0, c_{a+1}], \\ a + k, & t \in (c_{a+k}, c_{a+k+1}],\ k \geq 1. \end{cases}$$

Тоді $\hat{\gamma}\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — обмежена знизу на обмежених в $\mathbb{R}_+$ множинах неспадна функція така, що $\hat{\gamma}(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$ та $\gamma(t) \geq \hat{\gamma}(t)$ $\forall t \geq 0$. Оскільки A — оператор типу Вольтерра, то

$$\forall t \in S \quad \sup_{\zeta \in A} \int\limits_0^t \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau)\big) d\tau =$$

$$= \sup_{\zeta \in A} \int\limits_0^T \big(\zeta(y_t)(\tau) + \lambda y_t(\tau), y_t(\tau)\big) d\tau \geq \hat{\gamma}(\|y_t\|_X)\|y_t\|_X = \hat{\gamma}(\|y\|_{X_t})\|y\|_{X_t},$$

де $\|y\|_{X_t} = \|y_t\|_X$. Нехай

$$g_\zeta(\tau) = \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau)\big), \quad \zeta \in A, \quad \tau \in S,$$

$$h(t) = \hat{\gamma}(\|y\|_{X_t})\|y\|_{X_t}, \quad t \in S.$$

Для всіх $t \in S$ $h(t) \geq \min\{\hat{\gamma}(0), 0\}\|y\|_X$ та

$$\sup_{\zeta \in A} \int\limits_0^t g_\zeta(\tau) d\tau \geq h(t) \quad \forall t \in S.$$

Для довільних $y \in X$, $t \in S$ покладемо

$$(A_1 y)(t) = \Big[e^{-2\lambda t} - e^{-2\lambda T}\Big]\big((Ay)(t) + \lambda y(t)\big),$$

$$(A_2 y)(t) = e^{-2\lambda T}\big((Ay)(t) + \lambda y(t)\big).$$

Внаслідок того, що для довільної опуклої множини $B \subset X^*$ та додатних сталих α, β виконується $(\alpha + \beta)B = \alpha B + \beta B$, то

$$(\hat{A}y)(t) := e^{-2\lambda t}\big((Ay)(t) + \lambda y(t)\big) = (A_1 y)(t) + (A_2 y)(t) \quad \forall y \in X, \ \forall t \in S.$$

Тому, внаслідок пропозиції 1 та умови (H),

$$\sup_{\zeta \in A} \int\limits_0^T e^{-2\lambda\tau}\big(\zeta(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau)\big) d\tau = [\hat{A}y, y]_+ = [A_1 y, y]_+ + [A_2 y, y]_+ =$$

$$= e^{-2\lambda T} \sup_{\zeta \in A} \int\limits_0^T g_\zeta(\tau) d\tau + \sup_{\zeta \in A} \int\limits_0^T \Big[e^{-2\lambda\tau} - e^{-2\lambda T}\Big] g_\zeta(\tau) d\tau =$$

$$= e^{-2\lambda T} \sup_{\zeta \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A} \int_0^T g_\zeta(\tau) d\tau + \sup_{\zeta \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A} \int_0^T \Big[e^{-2\lambda\tau} - e^{-2\lambda T} \Big] g_\zeta(\tau) d\tau \geq$$

$$\geq e^{-2\lambda T} h(T) + 2\lambda \sup_{\zeta \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A} \int_0^T e^{-2\lambda s} \int_0^s g_\zeta(\tau) d\tau ds \geq$$

$$\geq e^{-2\lambda T} h(T) + 2\lambda T \sup_{\zeta \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A} \inf_{s \in S} e^{-2\lambda s} \int_0^s \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau) \big) d\tau =$$

$$= e^{-2\lambda T} h(T) + 2\lambda T \sup_{\zeta \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A} \inf_{s \in S} e^{-2\lambda s} \int_0^s \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau) \big) d\tau.$$

Доведемо, що для всіх $y \in X$

$$\sup_{\zeta \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A} \inf_{s \in S} e^{-2\lambda s} \int_0^s \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau) \big) d\tau \geq -c_1 \|y\|_X,$$

де $c_1 = \max\{-\hat{\gamma}(0), 0\} \geq 0$ не залежить від $y \in X$.

Нехай $y \in X$ — фіксоване. Покладемо

$$\varphi(s, d) = e^{-2\lambda s} \int_0^s \big(d(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau) \big) d\tau, \qquad a = \sup_{d \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y)} \inf_{s \in S} \varphi(s, d),$$

$$A_d = \big\{ s \in S \,\big|\, \varphi(s, d) \leq a \big\}, \quad s \in S, \quad d \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y).$$

Із неперервності $\varphi(\cdot, d)$ на S випливає, що A_d — непорожня замкнена множина для довільного $d \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y)$. Дійсно, для фіксованого $d \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y)$ існує $s_d \in S$ таке, що

$$\varphi(s_d, d) = \min_{\hat{s} \in S} \varphi(\hat{s}, d) \leq a.$$

Замкненість A_d випливає із неперервності $\varphi(\cdot, d)$ на S.

Доведемо тепер, що система $\{A_d\}_{d \in A(y)}$ — центрована. Для фіксованих $\{d_i\}_{i=1}^n \subset \subset A(y)$, $n \geq 1$, покладемо

$$\psi_i(\tau) = \big(d_i(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau) \big), \qquad \psi(\tau) = \max_{i=1}^n \psi_i(\tau), \quad \tau \in S,$$

$$E_0 = \varnothing, \qquad E_j = \left\{ \tau \in S \setminus \left(\cup_{i=0}^{j-1} E_i \right) \,\middle|\, \psi_j(\tau) = \psi(\tau) \right\}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$d(\tau) = \sum_{j=1}^n d_j(\tau) \chi_{E_j}(\tau), \qquad \chi_{E_j}(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in E_j, \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases}$$

Зауважимо, що для будь-якого $j = \overline{1, n}$ E_j — вимірна, $\cup_{j=1}^n E_j = S$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ $\forall i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, $d \in X^*$. Більше того,

$$\varphi(s, d_i) = e^{-2\lambda s} \int_0^s \psi_i(\tau) d\tau \leq e^{-2\lambda s} \int_0^s \psi(\tau) d\tau = \varphi(s, d), \quad s \in S, \;\; i = \overline{1, n}.$$

Отже, завдяки умові (H) для A, $d \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A(y)$ та для деякого $s_d \in S$

$$\varphi(s_d, d_i) \leq \varphi(s_d, d) = \min_{\hat{s} \in S} \varphi(\hat{s}, d) \leq a, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким чином, $s_d \in \cap_{i=1}^n A_{d_i} \neq \varnothing$.

Оскільки S — компакт, а система замкнених множин $\{A_d\}_{d \in A(y)}$ центрована, то $\exists s_0 \in S : s_0 \in \cap_{d \in A(y)} A_d$ [13]. Це означає, що

$$\sup_{\zeta \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}}\, A} \inf_{s \in S} e^{-2\lambda s} \int_0^s \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau)\big) d\tau \geq$$

$$\geq \sup_{\zeta \in A} e^{-2\lambda s_0} \int_0^{s_0} \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau)\big) d\tau =$$

$$= e^{-2\lambda s_0} \sup_{\zeta \in A} \int_0^{s_0} g_\zeta(\tau) d\tau \geq e^{-2\lambda s_0} h(s_0) \geq$$

$$\geq e^{-2\lambda s_0} \min\{\hat{\gamma}(0), 0\} \|y\|_X \geq -\max\{-\hat{\gamma}(0), 0\} \|y\|_X = -c_1 \|y\|_X.$$

Таким чином,

$$\sup_{\zeta \in A} \int_0^T e^{-2\lambda\tau} \big(\zeta(y)(\tau) + \lambda y(\tau), y(\tau)\big) d\tau \geq \Big[e^{-2\lambda T} \hat{\gamma}(\|y\|_X) - 2\lambda c_1 T\Big] \|y\|_X.$$

Отже, властивість (5.1) встановлена.

***Зауваження* 8.** Умову (5.1) в теоремі 2 можна замінити аналогом (4.17′)–(4.18′), а саме для кожного $y \in X$

$$[y]_{X_1} + [y]_{X_2} + \lambda_0 \|y\|_{L_{p_0}(S;H)} \geq \beta \|y\|_X,$$

$$\inf_{\zeta(y) \in A(y)} \int_S e^{-2\lambda t} \big(\zeta(y)(t) + \lambda y(t), y(t)\big) dt \geq \gamma_1 [y]_{X_1}^{p_1} + \gamma_2 [y]_{X_2}^{p_2} + \alpha.$$

Дійсно (див. доведення теореми 2), $\|y\|_X \geq \|y_\lambda\|_X$ та $[y]_{X_i} \geq [y_\lambda]_{X_i}$, $i = 1, 2$. Тому

$$[A_\lambda y_\lambda, y_\lambda]_- = \inf_{\zeta(y) \in A(y)} \int_S e^{-2\lambda t} \big(\zeta(y)(t) + \lambda y(t), y(t)\big) dt \geq$$

$$\geq \gamma_1 [y]_{X_1}^{p_1} + \gamma_2 [y]_{X_2}^{p_2} + \alpha \geq \gamma_1 [y_\lambda]_{X_1}^{p_1} + \gamma_2 [y_\lambda]_{X_2}^{p_2} + \alpha.$$

Тоді, застосовуючи еквівалентність вагових норм, легко показати виконання нерівності

$$[y_\lambda]_{X_1} + [y_\lambda]_{X_2} + \widehat{\lambda}_0 \|y_\lambda\|_{L_{p_0}(S;H)} \geq \widehat{\beta} \|y_\lambda\|_X.$$

***Наслідок* 2.** *Нехай $V_2 = H$, $r_1 \geq 2$, $p_2 = r_2 = 2$, $\lambda_0 > 0$, $A + \lambda_0 I \colon X_1 \rightrightarrows X_1^*$ — $+$-коерцитивний, р.н.н.зн. багатозначний оператор з (X_1, W)-н.о.в., $\varphi \colon X_2 \to \mathbb{R}$ — опуклий напівнеперервний знизу функціонал. Тоді для будь-якого $f \in X^*$ існує принаймні один розв'язок $y \in W$ задачі*

$$\langle y', \xi - y\rangle + [Ay, \xi - y]_+ + \varphi(\xi) - \varphi(y) \geq \langle f, \xi - y\rangle \quad \forall \xi \in W, \quad y(0) = \bar{0}, \quad (5.8)$$

за умови, що A та $\partial\varphi$ — оператори типу Вольтерра, які задовольняють умову (H).

Доведення. Покажемо, що оператор $C = \lambda I + \lambda_0 I + A + \partial\varphi \colon X \rightrightarrows X^*$ задовольняє всі умови наслідку 1 для деякого $\lambda > 0$. Для цього досить показати те ж саме для багатозначного оператора

$$B(y) = \lambda y + \partial\varphi(y) \quad \forall y \in X_2,$$

де $\lambda > 0$ — довільне фіксоване [8]. Радіальна напівнеперервність знизу випливає з напівнеперервності зверху $\partial\varphi$ на X_2 (див. [17, 20]). Внаслідок монотонності $\partial\varphi$ на X_2 (див. [17, 20]) для кожного $y \in X_2$

$$[B(y), y]_+ = \big[(\lambda I + \partial\varphi)(y), y\big]_+ = \lambda\langle y, y\rangle + [\partial\varphi(y), y]_+ =$$
$$= \lambda(y, y)_{\mathcal{H}} + [\partial\varphi(y), y - \bar{0}]_+ \geq \lambda\|y\|^2_{\mathcal{H}} + [\partial\varphi(\bar{0}), y - \bar{0}]_+ \geq$$
$$\geq \lambda\|y\|^2_{X_2} - \|\partial\varphi(\bar{0})\|_+\|y\|_{X_2}.$$

Таким чином, для всіх $y \in X_2$

$$\frac{[B(y), y]_+}{\|y\|_{X_2}} \geq \lambda\|y\|_{X_2} - \|\partial\varphi(\bar{0})\|_+ \to +\infty \quad \text{при} \ \ \|y\|_{X_2} \to +\infty.$$

Отже, B — +-коерцитивний оператор. Оскільки $\lambda > 0$, з монотонності $\partial\varphi$ випливає, що B також монотонний, а отже, має напівобмежену варіацію на W. Таким чином, задача (5.9) має принаймні один розв'язок $y \in W$ такий, що $y(0) = \bar{0}$. Отже, y — розв'язок (5.8).

***Зауваження* 9.** В наслідку 2 умову (H) для A та $\partial\varphi$ та +-коерцитивність для $A + \lambda_0 I$ можна замінити на −-коерцитивність для $A + \lambda_0 I$ на X_1.

***Зауваження* 10.** Нерівність в (5.8) еквівалентна наступній нерівності:

$$\langle y', \xi - y\rangle + [Ay, \xi - y]_+ + [\partial\varphi(y), \xi - y]_+ \geq \langle f, \xi - y\rangle \quad \forall \xi \in W, \qquad (5.9)$$

де

$$\partial\varphi(y) = \{p \in X_2^* \mid \varphi(\xi) - \varphi(y) \geq \langle p, \xi - y\rangle \quad \forall \xi \in X_2\}$$

— субдиференціал опуклого функціоналу φ.

Нерівність (5.9) випливає з наступної формули [17,20]: $\forall u, v \in X_2$

$$D_+\varphi(u; v - u) := \lim_{t \to 0+} \frac{\varphi(u + t(v - u)) - \varphi(u)}{t} = [\partial\varphi(u), v - u]_+.$$

***Зауваження* 11.** В останньому наслідку ми не вимагаємо коерцитивності від φ (відповідно, від $\partial\varphi$) на X_2.

6. Приклад. Нехай $n \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з межею $\partial\Omega$, $S = [0; T]$, $Q = S \times \Omega$, $p \in (1; 2] \colon W_0^{1,p}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$; функціонал $\Phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — вимірний і задовольняє умови

$$\exists C_1, C_2 > 0 \colon |\Phi(t)| \leq C_1|t| + C_2 \quad \forall t \in \mathbb{R};$$
$$\exists C_3 > 0 \colon (\Phi(t) - \Phi(s))(t - s) \geq -C_3(s - t)^2 \quad \forall t, s \in \mathbb{R};$$

функціонал $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — опуклий, напівнеперервний знизу і задовольняє умові росту

$$\exists C_4, C_5 > 0\colon |\psi(t)| \le C_4|t| + C_5 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Нехай $q \ge 2\colon 1/p + 1/q = 1$. Покладемо

$$X = L_p(S; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L_2(S; L_2(\Omega)),$$
$$X^* = L_q(S; W_0^{-1,q}(\Omega)) + L_2(S; L_2(\Omega)).$$

Розглянемо таку задачу:

$$\int\limits_Q \frac{\partial y(t,x)}{\partial t}(v(t,x) - y(t,x))dtdx +$$
$$+ \sum_{i=1}^n \int\limits_Q \left(\left| \frac{\partial y(t,x)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial y(t,x)}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v(t,x)}{\partial x_i} - \frac{\partial y(t,x)}{\partial x_i} \right) dtdx +$$
$$+ \int\limits_Q \Phi(y(t,x))(v(t,x) - y(t,x))dtdx +$$
$$+ \int\limits_Q \psi(v(t,x))dtdx - \int\limits_Q \psi(y(t,x))dtdx \ge$$
$$\ge \int\limits_Q f(t,x)(v(t,x) - y(t,x))dtdx \quad \forall v \in X, \tag{6.1}$$

$$y(t,x)\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{для майже всіх} \quad t \in S, \tag{6.2}$$

$$y(t,x)\big|_{t=0} = 0 \quad \text{для майже всіх} \quad x \in \Omega, \tag{6.3}$$

де $f \in X^*$ — довільне фіксоване.

Покладемо $X_1 = X$, $X_2 = L_2(Q)$,

$$A(y) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \quad \forall y \in X_1,$$

$$\varphi(y) = \int\limits_Q \psi(y(t,x))dtdx, \quad y \in X_2.$$

Після інтегрування частинами нерівності (6.1) одержимо таку задачу:

$$\langle y', v - y\rangle + \langle A(y), v - y\rangle + \varphi(v) - \varphi(y) \ge \langle f, v - y\rangle, \qquad y(0) = \bar{0}. \tag{6.4}$$

Під узагальненим розв'язком (6.1) – (6.3) будемо розуміти розв'язок задачі (6.4) в класі $W = \{y \in X \mid y' \in X^*\}$. Завдяки наслідку 2, має місце така пропозиція.

Пропозиція 4. *За перерахованих вище умов задача* (6.1) – (6.3) *має узагальнений розв'язок* $y \in W$.

Зауважимо, що задача (6.1) – (6.3) за перерахованих вище умов є суттєво некоерцитивною, оскільки $C_1 > 0$ — довільне, а на функціонал φ накладається лише умова росту. Дана задача є багатозначною (багатозначність забезпечує наявність ψ) і не вкладається в жодну з існуючих схем. Даний приклад частково ілюструє переваги обраної авторами методології в порівнянні з результатами [1 – 12, 14, 21].

1. *Толстоногов А. А.* О решениях эволюционных включений. I // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 3. – С. 145 – 162.
2. *Толстоногов А. А., Уманский Ю. И.* О решениях эволюционных включений. II // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 4. – С. 163 – 174.
3. *Вакуленко А. Н., Мельник В. С.* Топологічний метод для операторних включень з щільнозначеними відображеннями в банахових просторах // Нелін. гран. задачі. – 2000. – № 10. – С. 125 – 142.
4. *Вакуленко А. Н., Мельник В. С.* Розв'язність і властивості розв'язків одного класу операторних включень в банахових просторах // Наукові вісті НТУУ „КПІ”. – 1999. – № 3. – С.105 – 112.
5. *Вакуленко А. Н., Мельник В. С.* Про один клас операторних включень в банахових просторах // Допов. НАН України. – 1998. – № 5.
6. *Касьянов П. О.* Метод Гальоркіна для класу диференціально-операторних включень із багатозначними відображеннями псевдомонотонного типу // Наукові вісті НТУУ „КПІ”. – 2005. – № 2. – С. 139 – 151.
7. *Касьянов П. О.* Метод Фаедо – Гальоркіна для одного класу диференціально-операторних включень // Допов. НАН України. – 2005. – № 9. – С. 20 – 24.
8. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* Метод Фаедо – Гальоркіна для диференціально-операторних включень в банахових просторах з відображеннями w_{λ_0}-псевдомонотонного типу // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**. – № 1. – С. 103 – 126.
9. *Kasyanov P. O., Mel'nik V. S.* Differential-operator inclusions in Banach spaces with W_λ-pseudomonotone maps // Нелиней. гранич. задачи. – 2006. – № 16. – P. 46 – 68.
10. *Kasyanov P. O., Mel'nik V. S., Toscano L.* Method of approximation of evolutionary inclusions and variational inequalities by stationary // Sys. Res. & Inf. Tech. – 2005. – № 4. – P. 106 – 119.
11. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники: ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. – 1976. – № 9. – С. 5 – 130.
12. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 337 с.
13. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики (в 4-х томах). – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 359 с.
14. *Згуровский М. З., Мельник В. С., Новиков А. Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – К.: Наук. думка, 2004. – 590 с.
15. *Скрыпник И. В.* Методы исследования эллиптических краевых задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.
16. *Мельник В. С.* Мультивариационные неравенства и операторные включения в банаховых пространствах с отображениями класса $(S)_+$ // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1513 – 1523.
17. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. – М.: Мир, 1988. – 512 с.
18. *Мельник В. С.* Топологические методы в теории операторных включений в банаховых пространствах // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 2, 4.
19. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
20. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* Про властивості субдиференціальних відображень в просторах Фреше // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 10. – С. 1385 – 1394.
21. *Denkowski Z., Migorski S., Papageorgiou N. S.* An Introduction to nonlinear analysis. Applications. – Boston, Dordrecht, London: Kluwer Acad. Publ., 2003.

Одержано 27.03.07,
після доопрацювання — 06.11.07