УДК 519.21

Т. В. Маловичко (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”, Киев)

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ПОТОКУ АРРАТЬЯ

We consider the solution x_ε of the equation

$$dx_\varepsilon(u,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon\big(x_\varepsilon(u,t)-r\big)W(dr,dt),$$

$$x_\varepsilon(u,0) = u,$$

where W is a Wiener sheet on $\mathbb{R}\times[0;1]$. For the case where φ_ε^2 converges to $p\delta(\cdot-a_1) + q\delta(\cdot-a_2)$, i.e., where a boundary function describing the influence of a random medium is singular more than at one point, we prove that the weak convergence of $\big(x_\varepsilon(u_1,\cdot),\ldots,x_\varepsilon(u_d,\cdot)\big)$ to $\big(X(u_1,\cdot),\ldots,X(u_d,\cdot)\big)$ takes place as $\varepsilon\to 0_+$ (here, X is the Arratia flow).

Розглянуто розв'язок x_ε рівняння

$$dx_\varepsilon(u,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon\big(x_\varepsilon(u,t)-r\big)W(dr,dt),$$

$$x_\varepsilon(u,0) = u,$$

де W — вінерів лист на $\mathbb{R}\times[0;1]$. Доведено, що у випадку, коли φ_ε^2 збігається до $p\delta(\cdot-a_1) + q\delta(\cdot-a_2)$, тобто гранична функція, що описує вплив випадкового серидовища, сингулярна більш ніж у одній точці, має місце слабка збіжність $\big(x_\varepsilon(u_1,\cdot),\ldots,x_\varepsilon(u_d,\cdot)\big)$ до $\big(X(u_1,\cdot),\ldots,X(u_d,\cdot)\big)$, де X— потік Арратья, при $\varepsilon\to 0_+$.

Одним из основных объектов, рассматриваемых в данной работе, является поток Арратья [1]. На интуитивном уровне он может быть описан как семейство винеровских частиц, стартующих из каждой точки $\mathbb{R}$, движущихся независимо вплоть до момента встречи, при которой они склеиваются и далее движутся вместе, также совершая броуновское движение. Мы же будем пользоваться следующим его определением.

Потоком Арратья называется случайный процесс $\{X(u);\ u\in\mathbb{R}\}$ со значениями в $C([0;1])$ такой, что для любых $u_1<\ldots<u_n$:

1) $X(u_k,\cdot)$ — винеровский процесс, стартующий из точки u_k,

2) для любого $t\in[0;1]$

$$X(u_1,t) \le \ldots \le X(u_n,t),$$

3) на множестве

$$\Big\{f\in C\big([0;1],\mathbb{R}^n\big):\ f_k(0) = u_k,\ k = 1,\ldots,n,\quad f_1(t)<\ldots<f_n(t),\ t\in[0;1]\Big\}$$

распределение $\big(X(u_1,\cdot),\ldots,X(u_n,\cdot)\big)$ совпадает с распределением n-мерного винеровского процесса, стартующего из точки $(u_1,\ldots,u_n)$.

Пусть W — $\mathbb{R}$-значный винеровский лист на $\mathbb{R}\times[0;1]$.

Рассмотрим уравнение

$$
\begin{aligned}
dx_\varepsilon(u,t) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon\big(x_\varepsilon(u,t)-r\big)\, W(dr,dt), \\
x_\varepsilon(u,0) &= u.
\end{aligned} \tag{1}
$$

В работе [2] показано, что для дельтаобразной последовательности функций φ_ε^2 имеет место слабая сходимость $\big(x_\varepsilon(u_1,\cdot),\ldots,x_\varepsilon(u_d,\cdot)\big)$ при $\varepsilon\to 0+$ в пространстве $C\big([0;1],\mathbb{R}^d\big)$ к $\vec{X}(\cdot) = (X(u_1,\cdot),\ldots,X(u_d,\cdot))$. Наша цель состоит в том, чтобы показать, что аналогичный результат имеет место и в том случае, когда φ_ε^2 сходится в пространстве $\mathcal{D}'$ к обобщенной функции $p\delta(\cdot-a_1) + q\delta(\cdot-a_2)$, т. е. когда предельная функция, описывающая влияние случайной среды, сингулярна более чем в одной точке. Причина, по которой данное утверждение будет иметь место, заключается в том, что матрицы диффузии будут сходиться к единичной матрице, если расстояние между любыми двумя координатами отлично от нуля и от a_2-a_1. Тогда предельный процесс будет вести себя как винеровский до тех пор, пока расстояние между какими-либо его координатами не будет равно нулю или a_2-a_1. Как только некоторые две координаты станут равными между собой, диффузия выродится и эти координаты склеятся. А из-за невырожденности диффузии на множестве $\big\{v\in\mathbb{R}^d:\ \exists i_0, j_0\ v_{i_0}-v_{j_0} = a_2-a_1,\ \forall i,j\ v_i\neq v_j\big\}$ предельный процесс будет проводить на нем нулевое время, а потому будет совпадать по распределению с конечномерным сужением потока Арратья.

Рассмотрим $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, являющуюся симметричной неотрицательной функцией с тем свойством, что

$$
\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(u)\,du = 1.
$$

Для каждого $\varepsilon>0$ положим

$$
\varphi_\varepsilon(u) = \sqrt{\frac{p}{\varepsilon}\varphi\!\left(\frac{u-a_1}{\varepsilon}\right)} + \sqrt{\frac{q}{\varepsilon}\varphi\!\left(\frac{u-a_2}{\varepsilon}\right)},
$$

где $p+q=1$, $0<p<1$, $a_1<a_2$.

Для указанной функции φ_ε решение x_ε уравнения (1) существует, единственно и является потоком гомеоморфизмов (см. [3], теорема 4.5.1). Обозначим через $\{\mathcal{F}_t;\ t\ge 0\}$ поток σ-алгебр, порожденных W. Тогда при каждом $u\in\mathbb{R}$ $\{x_\varepsilon(u,t);\ t\ge 0\}$ — непрерывный $\mathcal{F}_t$-мартингал, причем совместная характеристика этих процессов с начальными точками u_1 и u_2 имеет вид

$$
\langle x_\varepsilon(u_1,\cdot), x_\varepsilon(u_2,\cdot)\rangle_t = \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon\big(x_\varepsilon(u_1,s)-r\big)\,\varphi_\varepsilon\big(x_\varepsilon(u_2,s)-r\big)\,dr\,ds,
$$

а при $u_1=u_2=u$

$$
\langle x_\varepsilon(u,\cdot)\rangle_t = \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon^2\big(x_\varepsilon(u,s)-r\big)\,dr\,ds = t.
$$

Следовательно, согласно теоремы Леви (см. [4], гл. II, теорема 6.1) процесс $\{x_\varepsilon(u,t);\ t\ge 0\}$ является винеровским.

Исследуем поведение процессов $\{\vec{x}_\varepsilon(t) = \big(x_\varepsilon(u_1,t),\ldots,x_\varepsilon(u_d,t)\big);\ t\in[0;1]\}$, где начальная точка $\vec{u} = (u_1,\ldots,u_d)$ фиксирована, при $\varepsilon\to 0+$.

Лемма 1. *Семейство* $\{\vec{x}_\varepsilon;\ \varepsilon > 0\}$ *слабо относительно компактно в* $C\big([0;1], \mathbb{R}^d\big)$.

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{E}\|\vec{x}_\varepsilon(0)\| = \mathrm{E}\|\vec{u}\| = \|\vec{u}\| < +\infty,$$

$$\mathrm{E}\|\vec{x}_\varepsilon(t_2) - \vec{x}_\varepsilon(t_1)\|_\infty^4 = \mathrm{E}\max_{1\le k\le d}|x_\varepsilon(u_k, t_2) - x_\varepsilon(u_k, t_1)|^4 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{d}\mathrm{E}|x_\varepsilon(u_k, t_2) - x_\varepsilon(u_k, t_1)|^4 = 3d(t_2 - t_1)^2.$$

Следовательно, семейство $\{\vec{x}_\varepsilon;\ \varepsilon > 0\}$ слабо относительно компактно (см. [4], гл. I, теорема 4.3).

Лемма доказана.

Таким образом, из любой последовательности $\{\vec{x}_{\varepsilon_n}\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть

$$\vec{x}_{\varepsilon_n} \Rightarrow \vec{y}, \quad n \to \infty,$$

где $\{\vec{x}_{\varepsilon_n}\}$ — некоторая слабо сходящаяся последовательность, причем

$$\varepsilon_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Наша цель состоит в том, чтобы показать, что предельный процесс $\vec{y}$ совпадает по распределению с конечномерным сужением $\vec{X}$ потока Арратья.

Отметим, что процессы y^i являются одномерными винеровскими процессами как слабые пределы одномерных винеровских процессов $\vec{x}^i_{\varepsilon_n}$.

Лемма 2. *Случайный процесс* $\vec{y}$ *является мартингалом.*

Доказательство. Покажем сначала, что для произвольной ограниченной непрерывной функции $\psi\colon \mathbb{R}^{dm} \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{E}\,x^i_{\varepsilon_n}(t)\,\psi\big(\vec{x}_{\varepsilon_n}(r_1), \ldots, \vec{x}_{\varepsilon_n}(r_m)\big) \to \mathrm{E}\,y^i(t)\,\psi(\vec{y}(r_1), \ldots, \vec{y}(r_m)), \quad n \to \infty.$$

Обозначим

$$\xi_n = x^i_{\varepsilon_n}(t)\,\psi\big(\vec{x}_{\varepsilon_n}(r_1), \ldots, \vec{x}_{\varepsilon_n}(r_m)\big),$$

$$\xi = y^i(t)\,\psi(\vec{y}(r_1), \ldots, \vec{y}(r_m)).$$

Поскольку

$$\sup_n \mathrm{E}\xi_n^2 < +\infty,$$

$$\xi_n \Rightarrow \xi, \quad n \to \infty,$$

то ξ_n, $n \ge 1$, равномерно интегрируемы и (см. [5], теорема 5.4)

$$\mathrm{E}\xi_n \to \mathrm{E}\xi, \quad n \to \infty.$$

Далее, так как $\vec{x}_{\varepsilon_n}$ — мартингал, то для любых непрерывных ограниченных функций $\psi_i\colon \mathbb{R}^{dm} \to \mathbb{R}$ и для произвольных $0 < r_1 < \ldots < r_m \le s < t$

$$\big(\mathrm{E}y^1(t)\psi_1(\vec{y}(r_1), \ldots, \vec{y}(r_m)), \ldots, \mathrm{E}y^d(t)\psi_d(\vec{y}(r_1), \ldots, \vec{y}(r_m))\big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\mathrm{E}x^1_{\varepsilon_n}(t)\psi_1\big(\vec{x}_{\varepsilon_n}(r_1), \ldots, \vec{x}_{\varepsilon_n}(r_m)\big), \ldots, \mathrm{E}x^d_{\varepsilon_n}(t)\psi_d\big(\vec{x}_{\varepsilon_n}(r_1), \ldots, \vec{x}_{\varepsilon_n}(r_m)\big)\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big(\mathrm{E}x^1_{\varepsilon_n}(s)\psi_1\big(\vec{x}_{\varepsilon_n}(r_1),\ldots,\vec{x}_{\varepsilon_n}(r_m)\big),\ldots,\mathrm{E}x^d_{\varepsilon_n}(s)\psi_d\big(\vec{x}_{\varepsilon_n}(r_1),\ldots,\vec{x}_{\varepsilon_n}(r_m)\big)\Big) =$$

$$= \big(\mathrm{E}y^1(s)\psi_1(\vec{y}(r_1),\ldots,\vec{y}(r_m)),\ldots,\mathrm{E}y^d(s)\psi_d(\vec{y}(r_1),\ldots,\vec{y}(r_m))\big).$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}\{\vec{y}(t)\,|\,\vec{y}(r),\, r\le s\} = \vec{y}(s),$$

т. е. $\vec{y}$ — мартингал.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Имеет место*

$$\left\langle y^i, y^j\right\rangle_t \le \lambda\left\{s\le t\colon\ y^i(s) = y^j(s)\right\} + \lambda\left\{s\le t\colon\ \left|y^i(s)-y^j(s)\right| = a_2-a_1\right\},$$

где λ *— мера Лебега.*

Доказательство. Пусть

$$\vec{\xi}_n(\cdot) = \left(x_{\varepsilon_n}(u_1,\cdot),\ldots,x_{\varepsilon_n}(u_d,\cdot),\int_0^{\cdot}\int_{\mathbb{R}}\varphi_{\varepsilon_n}\big(x_{\varepsilon_n}(u_i,s)-r\big)\varphi_{\varepsilon_n}\big(x_{\varepsilon_n}(u_j,s)-r\big)dr\,ds\right) =$$

$$= \left(x^1_{\varepsilon_n}(\cdot),\ldots,x^d_{\varepsilon_n}(\cdot),\int_0^{\cdot}\int_{\mathbb{R}}\varphi_{\varepsilon_n}\big(x^i_{\varepsilon_n}(s)-r\big)\varphi_{\varepsilon_n}\big(x^j_{\varepsilon_n}(s)-r\big)dr\,ds\right).$$

Поскольку

$$\mathrm{E}\left\|\vec{\xi}_n(0)\right\| = \mathrm{E}\|(u_1,\ldots,u_d,0)\| = \|(u_1,\ldots,u_d,0)\| < +\infty,$$

$$\mathrm{E}\left\|\vec{\xi}_n(t_2)-\vec{\xi}_n(t_1)\right\|^4_\infty =$$

$$= \mathrm{E}\max\left\{\max_{1\le k\le d}\left|x^k_{\varepsilon_n}(t_2)-x^k_{\varepsilon_n}(t_1)\right|^4;\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}}\varphi_{\varepsilon_n}\big(x^i_{\varepsilon_n}(s)-r\big)\varphi_{\varepsilon_n}\big(x^j_{\varepsilon_n}(s)-r\big)dr\,ds\right)^4\right\} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^d \mathrm{E}\left|x^k_{\varepsilon_n}(t_2)-x^k_{\varepsilon_n}(t_1)\right|^4 + (t_2-t_1)^4 = 3d(t_2-t_1)^2 + (t_2-t_1)^4 \le$$

$$\le (3d+1)(t_2-t_1)^2,\quad t_1,\ t_2\in[0;1],$$

семейство $\left\{\vec{\xi}_n; n\ge 1\right\}$ слабо относительно компактно в пространстве $C\big([0;1],\mathbb{R}^{d+1}\big)$. Следовательно, из последовательности $\left\{\vec{\xi}_n; n\ge 1\right\}$ можно выбрать такую подпоследовательность (для удобства обозначений отождествим ее с исходной), что

$$\vec{\xi}_n \Rightarrow \left(y^1,\ldots,y^d,\theta\right),\quad n\to\infty,$$

где θ — слабый предел

$$\int_0^{\cdot}\int_{\mathbb{R}}\varphi_{\varepsilon_n}\big(x^i_{\varepsilon_n}(s)-r\big)\varphi_{\varepsilon_n}\big(x^j_{\varepsilon_n}(s)-r\big)dr\,ds.$$

Для любого положительного $\delta < \frac{1}{4}(a_2-a_1)$, начиная с некоторого номера,

$$\operatorname{supp}\int_{\mathbb{R}}\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot-r)\varphi_{\varepsilon_n}(r)dr \subset [a_1-a_2-\delta; a_1-a_2+\delta]\cup[-\delta;\delta]\cup$$

$$\cup\,[a_2-a_1-\delta; a_2-a_1+\delta],$$

а значит, для любого $s \in [0;1]$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varepsilon_n}\left(x^i_{\varepsilon_n}(s) - r\right)\varphi_{\varepsilon_n}\left(x^j_{\varepsilon_n}(s) - r\right)dr \;\le\; h_\delta\left(x^i_{\varepsilon_n}(s) - x^j_{\varepsilon_n}(s)\right)$$

и для любого $t \in [0;1]$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varepsilon_n}\left(x^i_{\varepsilon_n}(s) - r\right)\varphi_{\varepsilon_n}\left(x^j_{\varepsilon_n}(s) - r\right)drds \;\le\; \int_0^t h_\delta\left(x^i_{\varepsilon_n}(s) - x^j_{\varepsilon_n}(s)\right)ds,$$

где

$$h_\delta(u) = \begin{cases} 1, & u \in [a_1 - a_2 - \delta; a_1 - a_2 + \delta] \cup \\ & \quad \cup\; [-\delta;\delta] \cup [a_2 - a_1 - \delta; a_2 - a_1 + \delta], \\ 0, & u \in (-\infty; a_1 - a_2 - 2\delta] \cup [a_1 - a_2 + 2\delta; -2\delta] \cup \\ & \cup [2\delta; a_2 - a_1 - 2\delta] \cup [a_2 - a_1 + 2\delta; \infty), \\ \dfrac{u + a_2 - a_1}{\delta} + 2, & u \in [a_1 - a_2 - 2\delta; a_1 - a_2 - \delta], \\ -\dfrac{u + a_2 - a_1}{\delta} + 2, & u \in [a_1 - a_2 + \delta; a_1 - a_2 + 2\delta], \\ \dfrac{u}{\delta} + 2, & u \in [-2\delta; -\delta], \\ -\dfrac{u}{\delta} + 2, & u \in [\delta; 2\delta], \\ \dfrac{u + a_1 - a_2}{\delta} + 2, & u \in [a_2 - a_1 - 2\delta; a_2 - a_1 - \delta], \\ -\dfrac{u + a_1 - a_2}{\delta} + 2, & u \in [a_2 - a_1 + \delta; a_2 - a_1 + 2\delta]. \end{cases}$$

Поскольку функция h_δ липшицева с константой $1/\delta$, отображение

$$C\left([0;1], \mathbb{R}^d\right) \ni z \to \int_0^{\cdot} h_\delta\left(z^i(s) - z^j(s)\right)ds \in C([0;1], \mathbb{R})$$

также липшецево с константой $2/\delta$, а значит, непрерывно. Поэтому

$$\left(\int_0^{\cdot} h_\delta\left(x^i_{\varepsilon_n}(s) - x^j_{\varepsilon_n}(s)\right)ds, \int_0^{\cdot}\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varepsilon_n}\left(x^i_{\varepsilon_n}(s) - r\right)\varphi_{\varepsilon_n}\left(x^j_{\varepsilon_n}(s) - r\right)drds\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^{\cdot} h_\delta\left(y^i(s) - y^j(s)\right)ds, \theta\right), \quad n \to \infty.$$

Вследствие того, что

$$\left\{f \in C\left([0;1], \mathbb{R}^2\right):\; \forall t \in [0;1]\, f_t^2 - f_t^1 \le 0\right\}$$

замкнуто, имеем

$$\mathrm{P}\left\{\theta_t - \int_0^t h_\delta\left(y^i(s) - y^j(s)\right)ds \le 0, t \in [0;1]\right\} \;\ge$$

$$\ge\; \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathrm{P}\left\{\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varepsilon_n}\left(x^i_{\varepsilon_n}(s) - r\right)\varphi_{\varepsilon_n}\left(x^j_{\varepsilon_n}(s) - r\right)dr\,ds \;-\right.$$

$$-\int_0^t h_\delta\left(x^i_{\varepsilon_n}(s)-x^j_{\varepsilon_n}(s)\right)ds \le 0, t\in[0;1]\Bigg\} = 1,$$

т. е. с вероятностью 1 для всех $t\in[0;1]$

$$\theta_t \le \int_0^t h_\delta\left(y^i(s)-y^j(s)\right)ds.$$

Переходя к пределу при $\delta\to 0$, в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости получаем, что с вероятностью 1 для всех $t\in[0;1]$

$$\theta_t \le \lambda\left\{s\le t:\ y^i(s) = y^j(s)\right\} + \lambda\left\{s\le t:\ \left|y^i(s)-y^j(s)\right| = a_2-a_1\right\}.$$

Покажем, что θ — характеристика y. Легко видеть, что θ — возрастающий процесс. Как и при доказательстве леммы 2, несложно проверить, что процесс

$$m^{ij} \overset{\text{def}}{=} y^i y^j - \theta$$

является мартингалом, а так как

$$y^i(t)y^j(t) = m^{ij}(t) + \theta_t,$$

то

$$\left\langle y^i, y^j\right\rangle_t = \theta_t \le \lambda\left\{s\le t:\ y^i(s) = y^j(s)\right\} + \lambda\left\{s\le t:\ \left|y^i(s)-y^j(s)\right| = a_2-a_1\right\}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим случайный процесс

$$\left\{\vec z(t) = \vec y(t\wedge\sigma)+\vec\omega((t-\sigma)\vee 0);\quad t\in[0;1]\right\},$$

где σ — момент первого выхода $\vec y$ из множества

$$G = \mathbb{R}^d\setminus\left\{(u_1,\ldots,u_d):\ \exists i\ne j\quad u_i=u_j\right\}$$

или 1, если для всех $t\in[0;1]$

$$\vec y(t)\in G,$$

а $\vec\omega$ — независимый от $\vec y$ d-мерный винеровский процесс, стартующий из 0.

Мы хотим показать, что $\vec z$ является d-мерным винеровским процессом, откуда будет следовать, что $\vec y$ до выхода из G ведет себя так же, как винеровский процесс. Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $0\le s<t\le 1$. *Тогда*

$$\mathrm{E}\left\{y^i(t\wedge\sigma)\omega^j((t-\sigma)\vee 0)\,|\,\vec z(r); r\le s\right\} = y^i(s\wedge\sigma)\omega^j((s-\sigma)\vee 0)\quad \textit{п.н.}$$

Доказательство. Измеримость $y^i(s\wedge\sigma)\omega^j\left((s-\sigma)\vee 0\right)$ относительно $\sigma\{\vec z(r); r\le s\}$ очевидна. Осталось показать только, что

$$\forall m_1, m_2\in\mathbb{N},\quad 0<t_1<\ldots<t_{m_1}\le s,\quad 0<r_1<\ldots<r_{m_2}\le s,$$

$$\forall A_1,\ldots,A_{m_1}, B_1,\ldots,B_{m_2}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d):$$

$$\mathrm{E}\, y^i(t\wedge\sigma)\omega^j((t-\sigma)\vee 0)\,\mathbf{1}_{\left\{\vec y(t_1\wedge\sigma)\in A_1,\ldots,\vec y(t_{m_1}\wedge\sigma)\in A_{m_1}\right\}}\times$$

$$\times\ \mathbf{1}_{\left\{\vec\omega((r_1-\sigma)\vee 0)\in B_1,\ldots,\vec\omega\left((r_{m_2}-\sigma)\vee 0\right)\in B_{m_2}\right\}} =$$

$$= \mathrm{E}\, y^i(s\wedge\sigma)\omega^j((s-\sigma)\vee 0)\mathbf{1}_{\left\{\vec y(t_1\wedge\sigma)\in A_1,\ldots,\vec y(t_{m_1}\wedge\sigma)\in A_{m_1}\right\}}\times$$

$$\times\ \mathbf{1}_{\left\{\vec\omega((r_1-\sigma)\vee 0)\in B_1,\ldots,\vec\omega\left((r_{m_2}-\sigma)\vee 0\right)\in B_{m_2}\right\}}.$$

В качестве множеств B_i достаточно рассмотреть только множества, мера Лебега границы которых равна 0. Будем приближать σ марковскими моментами σ_k, где

$$\sigma_k(\omega) = \frac{l}{2^k}, \quad \text{если} \quad \frac{l-1}{2^k} < \sigma(\omega) \le \frac{l}{2^k}, \quad l = \overline{1; 2^k}, \quad \omega \in \Omega.$$

Тогда по теореме Дуба (см. [4], глава I, теорема 6.11)

$$\sum_{l \in \mathbb{N} \cap [1; 2^k s)} \mathrm{E}\left\{\omega^j\left(t - \frac{l}{2^k}\right) \mathbf{1}_{\left\{\vec{\omega}\left(r_1 - \frac{l}{2^k}\right) \in B_1\right\}}\right\} \times$$

$$\times\ \mathrm{E}\left\{\mathbf{1}_{\left\{\sigma_k = \frac{l}{2^k}\right\}} y^i(t \wedge \sigma)\, \mathbf{1}_{\{\vec{y}(t_1 \wedge \sigma) \in A_1\}}\right\} =$$

$$= \sum_{l \in \mathbb{N} \cap [1; 2^k s)} \mathrm{E}\left\{\omega^j\left(s - \frac{l}{2^k}\right) \mathbf{1}_{\left\{\vec{\omega}\left(r_1 - \frac{l}{2^k}\right) \in B_1\right\}}\right\} \mathrm{E}\left\{\mathbf{1}_{\left\{\sigma_k = \frac{l}{2^k}\right\}} y^i(s \wedge \sigma)\, \mathbf{1}_{\{\vec{y}(t_1 \wedge \sigma) \in A_1\}}\right\}.$$

Переходя к пределу по k, получаем требуемое равенство для $m_1 = m_2 = 1$. Общий случай доказывается аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Случайный процесс* $\vec{z}$ *является мартингалом.*

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей леммы получаем, что

$$\mathrm{E}\{\vec{y}(t \wedge \sigma) \,|\, \vec{z}(r); r \le s\} = \vec{y}(s \wedge \sigma) \quad \text{п.н.},$$

$$\mathrm{E}\{\vec{\omega}((t \wedge \sigma) \vee 0) \,|\, \vec{z}(r); r \le s\} = \vec{\omega}((s - \sigma) \vee 0) \quad \text{п.н.}$$

Следовательно, $\vec{z}(\cdot)$ — мартингал.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любых* i, j

$$\lambda\left\{s \le t\colon \left|y^i(s) - y^j(s)\right| = a_2 - a_1\right\} = 0 \quad \textit{п.н.},$$

где λ *— мера Лебега.*

Доказательство. Обозначим

$$\alpha = a_2 - a_1,$$

$$l = \{(v_1, v_2)\colon v_2 - v_1 = \alpha\},$$

$$l_h = \{(v_1, v_2)\colon v_2 - v_1 \in (\alpha - h; \alpha + h)\}, \quad h > 0.$$

Тогда для любого $h > 0$

$$\mathrm{E}\lambda\left\{s \le t\colon y^i(s) - y^j(s) = a_2 - a_1\right\} = \mathrm{E}\lambda\left\{s \le t\colon \left(y^i(s), y^j(s)\right) \in l\right\} \le$$

$$\le \mathrm{E}\lambda\left\{s \le t\colon \left(y^i(s), y^j(s)\right) \in l_h\right\} = \mathrm{E}\int_0^t \mathbf{1}_{\left\{\left(y^i(s), y^j(s)\right) \in l_h\right\}} dt =$$

$$= \int_0^t \mathrm{P}\left\{\left(y^i(s), y^j(s)\right) \in l_h\right\} dt \le \int_0^t \varliminf_{n \to \infty} \mathrm{P}\left\{\left(x^i_{\varepsilon_n}(s), x^j_{\varepsilon_n}(s)\right) \in l_h\right\} dt.$$

Пусть

$$f(v_1, v_2) \;=\; \begin{cases} 0, & v_1 - v_2 \le \alpha - h, \\ \dfrac{1}{2}(v_1 - v_2 - \alpha + h)^2, & v_1 - v_2 \in (\alpha - h; \alpha + h), \\ 2h(v_1 - v_2 - \alpha), & v_1 - v_2 \ge \alpha + h. \end{cases}$$

По формуле Ито

$$\mathrm{E}_{(u_i,u_j)} f\Big(x^i_{\varepsilon_n}(t), x^j_{\varepsilon_n}(t)\Big) \;=\; f(u_1, u_2) \;+\; \mathrm{E}_{(u_i,u_j)} \int_0^t \mathbf{1}_{(\alpha-h;\alpha+h)}\Big(x^i_{\varepsilon_n}(s) - x^j_{\varepsilon_n}(s)\Big)ds \;-$$

$$-\;\mathrm{E}_{(u_i,u_j)} \int_0^t \mathbf{1}_{(\alpha-h;\alpha+h)}\Big(x^i_{\varepsilon_n}(s) - x^j_{\varepsilon_n}(s)\Big) \int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varepsilon_n}\Big(x^i_{\varepsilon_n}(s) - r\Big)\varphi_{\varepsilon_n}\Big(x^j_{\varepsilon_n}(s) - r\Big)dr ds.$$

Будем рассматривать только

$$\varepsilon \;<\; \frac{\alpha}{2D},$$

где $D = \operatorname{diam}\operatorname{supp}\varphi$.

Тогда при $h < \alpha/2$ и $x^i_\varepsilon(s) - x^j_\varepsilon(s) \in (\alpha - h;\, \alpha + h)$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon\Big(x^i_\varepsilon(s) - r\Big)\varphi_\varepsilon\Big(x^j_\varepsilon(s) - r\Big)dr \;\le\; \frac{1}{2}.$$

Действительно, поскольку

$$\varphi_\varepsilon(u) \;=\; \sqrt{\frac{p}{\varepsilon}\,\varphi\!\left(\frac{u - a_1}{\varepsilon}\right)} \;+\; \sqrt{\frac{q}{\varepsilon}\,\varphi\!\left(\frac{u - a_2}{\varepsilon}\right)},$$

то

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon\Big(x^i_\varepsilon(s) - r\Big)\varphi_\varepsilon\Big(x^j_\varepsilon(s) - r\Big)dr \;=$$

$$=\;\sqrt{pq}\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\varphi\!\left(r - \frac{x^i_\varepsilon(s) - x^j_\varepsilon(s) + a_1 - a_2}{\varepsilon}\right)\varphi(r)}\,dr \;\le\; \sqrt{pq} \;\le\; \frac{1}{2}$$

вследствие того, что

$$\left|\frac{x^i_\varepsilon(s) - x^j_\varepsilon(s)}{\varepsilon}\right| \;>\; \frac{\alpha}{2\varepsilon} \;>\; D,$$

$$\left|\frac{x^i_\varepsilon(s) - x^j_\varepsilon(s) + \alpha}{\varepsilon}\right| \;>\; \frac{2\alpha - h}{\varepsilon} \;>\; \frac{3\alpha}{2\varepsilon} \;>\; 3D.$$

Тогда

$$\mathrm{E}_{(u_i,u_j)} f\Big(x^i_{\varepsilon_n}(t), x^j_{\varepsilon_n}(t)\Big) - f(u_1 - u_2) \;=\; \mathrm{E}_{(u_i,u_j)} \int_0^t \mathbf{1}_{(\alpha-h;\alpha+h)}\Big(x^i_{\varepsilon_n}(s) - x^j_{\varepsilon_n}(s)\Big)ds \;-$$

$$-\;\mathrm{E}_{(u_i,u_j)} \int_0^t \mathbf{1}_{(\alpha-h;\alpha+h)}\Big(x^i_{\varepsilon_n}(s) - x^j_{\varepsilon_n}(s)\Big) \int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varepsilon_n}\Big(x^i_{\varepsilon_n}(s) - r\Big)\varphi_{\varepsilon_n}\Big(x^j_{\varepsilon_n}(s) - r\Big)dr ds \;\ge$$

$$\ge\; \frac{1}{2}\,\mathrm{E}_{(u_i,u_j)} \int_0^t \mathbf{1}_{(\alpha-h;\alpha+h)}\Big(x^i_{\varepsilon_n}(s) - x^j_{\varepsilon_n}(s)\Big)ds \;=$$

$$=\; \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{P}_{(u_i,u_j)}\Big\{x^i_{\varepsilon_n}(s) - x^j_{\varepsilon_n}(s) \in (\alpha - h; \alpha + h)\Big\}ds \;=$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{P}_{(u_i,u_j)}\left\{\left(x^i_{\varepsilon_n}(s),\, x^j_{\varepsilon_n}(s)\right) \in l_h)\right\} ds.$$

Поскольку функция f неотрицательна, то

$$\frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{P}_{(u_i,u_j)}\left\{x^i_{\varepsilon_n}(s) - x^j_{\varepsilon_n}(s) \in l_h)\right\} ds \;\le\; \mathrm{E}_{(u_i,u_j)} f\left(x^i_{\varepsilon_n}(t),\, x^j_{\varepsilon_n}(t)\right) \;=$$

$$= \mathrm{E}_{(u_i,u_j)} \frac{1}{2}\left(x^i_{\varepsilon_n}(t) - x^j_{\varepsilon_n}(t) - \alpha + h\right)^2 \mathbf{1}_{\left\{x^i_{\varepsilon_n}(t) - x^j_{\varepsilon_n}(t) \in (\alpha - h;\, \alpha + h)\right\}} +$$

$$+ \mathrm{E}_{(u_i,u_j)}\, 2h\left(x^i_{\varepsilon_n}(t) - x^j_{\varepsilon_n}(t) - \alpha\right)\mathbf{1}_{\left\{x^i_{\varepsilon_n}(t) - x^j_{\varepsilon_n}(t) \ge \alpha + h\right\}} \le$$

$$\le 2h^2 + 4h\sqrt{\mathrm{E}_{(u_i,u_j)}\left(\left(x^i_{\varepsilon_n}(t)\right)^2 + \left(x^j_{\varepsilon_n}(t)\right)^2 + \alpha^2\right)} = 2h^2 + 4h\sqrt{2t + \alpha^2}\,.$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}\lambda\left\{s \le t\colon\; y^i(s) - y^j(s) = a_2 - a_1\right\} \;\le$$

$$\le \int_0^t \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left(x^i_{\varepsilon_n}(s),\, x^j_{\varepsilon_n}(s)\right) \in l_h\right\} dt \;\le\; \limsup_{n\to\infty} \int_0^t \mathrm{P}\left\{\left(x^i_{\varepsilon_n}(s),\, x^j_{\varepsilon_n}(s)\right) \in l_h\right\} dt \;\le$$

$$\le 2h^2 + 4h\sqrt{2t + \alpha^2} \to 0, \quad h \to 0+.$$

Таким образом,

$$\lambda\left\{s \le t\colon\; y^i(s) - y^j(s) = a_2 - a_1\right\} = 0 \quad \text{п.н.}$$

Лемма доказана.

Следствие. *Имеет место*

$$\left\langle y^i, y^j\right\rangle_t \;\le\; \lambda\left\{s \le t\colon\; y^i(s) = y^j(s)\right\}.$$

Лемма 7. *Процесс* $\vec{z}$ *является винеровским.*

Доказательство. Найдем характеристику $\vec{z}$:

$$z^i(t)z^j(t) = \left(y^i(t\wedge\sigma) + \omega^i((t-\sigma)\vee 0)\right)\left(y^j(t\wedge\sigma) + \omega^j((t-\sigma)\vee 0)\right) =$$

$$= y^i(t\wedge\sigma)y^j(t\wedge\sigma) + \omega^i((t-\sigma)\vee 0)\omega^j((t-\sigma)\vee 0) +$$

$$+ y^i(t\wedge\sigma)\omega^j((t-\sigma)\vee 0) + y^j(t\wedge\sigma)\omega^i((t-\sigma)\vee 0) =$$

$$= \left\langle y^i, y^j\right\rangle_{t\wedge\sigma} + ((t-\sigma)\vee 0)\delta_{ij} + \theta_{ij}(t) =$$

$$= (t\wedge\sigma)\delta_{ij} + ((t-\sigma)\vee 0)\delta_{ij} + \theta_{ij}(t) = t\delta_{ij} + \theta_{ij}(t),$$

так как при $i = j$

$$\left\langle y^i, y^j\right\rangle_t = t$$

в силу того, что y^i — винеровский процесс, а при $i \ne j$

$$\left\langle y^i, y^j\right\rangle_{t\wedge\sigma} \;\le\; \lambda\left\{s \le t\wedge\sigma\colon\; y^i(s) = y^j(s)\right\} = 0.$$

Покажем, что $\theta_{ij}(\cdot)$ — мартингал относительно потока σ-алгебр $\{\mathcal{F}_s = \sigma\{\vec{z}(r);\, r \le s\wedge\sigma\};\; s \ge 0\}$.

По построению

$$\theta_{ij}(t) = y^i(t\wedge\sigma)\omega^j((t-\sigma)\vee 0) + y^j(t\wedge\sigma)\omega^i((t-\sigma)\vee 0) +$$

$$+\ m_{ij}(t \wedge \sigma) + \hat{m}_{ij}((t-\sigma) \vee 0),$$

где

$$m_{ij}(t) \ = \ y^i(t)\, y^j(t) - \left\langle y^i, y^j \right\rangle_t,$$

$$\hat{m}_{ij}(t) \ = \ \omega^i(t)\omega^j(t) - t\delta_{ij}.$$

Процессы $m_{ij}(\cdot)$ и $\hat{m}_{ij}(\cdot)$ — непрерывные мартингалы относительно потоков σ-алгебр $\left\{\sigma\{\vec{y}(r);\, r \le s\};\, s \ge 0\right\}$ и $\left\{\sigma\{\vec{\omega}(r);\, r \le s\};\, s \ge 0\right\}$ соответственно. По лемме 4 $y^i(\cdot \wedge \sigma)\,\omega^j((\cdot - \sigma) \vee 0)$ является мартингалом относительно $\left\{\mathcal{F}_s;\, s \ge 0\right\}$. Следовательно, $\theta_{ij}(\cdot)$ — мартингал.

Таким образом,

$$\langle \vec{z} \rangle_t \ = \ t\mathrm{I},$$

и согласно теореме Леви (см. [4], глава II, теорема 6.1) $\vec{z}$ — d-мерный винеровский процесс.

Лемма доказана.

Теорема. *Семейство* $\{\vec{x}_\varepsilon(\cdot) = (x_\varepsilon(u_1, \cdot), \ldots,\ x_\varepsilon(u_d, \cdot))\}$ *слабо сходится при* $\varepsilon \to 0+$ *в пространстве* $C\left([0;1], \mathbb{R}^d\right)$ *к* $\vec{X}(\cdot) = (X(u_1, \cdot), \ldots,\ X(u_d, \cdot))$, *где* X — *поток Арратья.*

Доказательство. Осталось показать, что любая предельная в слабом смысле точка $\vec{y}$ семейства $\{\vec{x}_\varepsilon;\, \varepsilon > 0\}$ равна по распределению $\vec{X}(\cdot)$.

Как уже отмечалось, y^i — одномерный винеровский процесс для любого i.

Поскольку для всех $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\{\vec{x}_\varepsilon \in \mathcal{G}\} \ = \ 1,$$

где

$$G \ = \ \mathbb{R}^d \setminus \left\{(u_1, \ldots, u_d)\colon\ \exists i \ne j\ \ u_i = u_j\right\},$$

$$\mathcal{G} \ = \ \left\{\vec{f} \in C\left([0;1], \mathbb{R}^d\right)\colon\ f_i(0) = u_i,\, i = \overline{1, d},\quad \vec{f}(t) \in G,\ \ t \in [0;1]\right\},$$

а множество $\mathcal{G}$ замкнуто, то в силу характеризации слабой сходимости

$$\mathrm{P}\{\vec{y} \in \mathcal{G}\} \ = \ 1.$$

Так как до момента первого выхода из множества G процесс $\vec{y}$ совпадает с винеровским процессом $\vec{z}$, ограничение распределения $\vec{y}$ на $\mathcal{G}$ совпадает с ограничением винеровской меры на это же множество.

Следовательно,

$$\vec{y} \ \stackrel{d}{=}\ \vec{X}.$$

Теорема доказана.

1. *Arratia R. A.* Brownian motion on the line: PhD dissertation. – Univ. Wisconsin, Madison, 1984.
2. *Dorogovtsev A. A.* One Brownian stochastic flow // Theory Stochast. Process. – 2004. – **10**, № 3-4. – P. 21-25.
3. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations // Text. Monogr. Cambridge Stud. Adv. Math. – 1990. – **24**. – 346 p.
4. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986. – 448 с.
5. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

Получено 22.05.07,
после доработки — 07.09.07