УДК 517.574

М. А. Гирнык (Львов. коммер. акад.)

ЛОГАРИФМЫ МОДУЛЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НИГДЕ НЕ ПЛОТНЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

We prove that the set of logarithms of the moduli of entire functions of several complex variables is nowhere dense in the space of plurisubharmonic functions equipped with topology which is a generalization of the topology of uniform convergence on compacts. This topology is generated by a metric in which plurisubharmonic functions form the complete metric space. Thus, the set of logarithms of the moduli of entire functions is a set of first category according to Baire.

Доведено, що множина логарифмів модулів цілих функцій кількох комплексних змінних ніде не щільна у просторі плюрісубгармонічних функцій, оснащеному топологією, що є узагальненням топології рівномірної збіжності на компактах. Вказана топологія породжується метрикою, в якій плюрісубгармонічні функції утворюють повний метричний простір. Таким чином, логарифми модулів цілих функцій є множиною першої категорії за Бером.

Пусть f — целая функция в $\mathbb{C}^p$, тогда $\log|f|$ является плюрисубгармонической функцией в $\mathbb{C}^p$, а при $p=1$ это субгармоническая функция в $\mathbb{C}$ (см. [1 – 3]). Мы докажем, что множество функций вида $\log|E|$ является исключительным в пространстве всех плюрисубгармонических функций $PSH(\mathbb{C}^p)$, а именно, множество $\log|E|$ нигде не плотно в $PSH(\mathbb{C}^p)$, оснащенном естественной топологией. Эта топология является обобщением топологии равномерной сходимости на компактах и порождается метрикой, в которой $PSH(\mathbb{C}^p)$ становится полным метрическим пространством. Поэтому $\log|E|$ образует множество первой категории по Бэру [4] в $PSH(\mathbb{C}^p)$. Отметим, что начиная с классических работ Н. Н. Лузина понятие бэровской категории применяют в комплексном анализе, в частности для доказательства теорем существования (см., например, [4 – 10]). В настоящей работе также будет доказана аналогичная теорема для функций, аналитических в полидиске. Мы предполагаем, что такое утверждение верно для произвольной области, однако вопрос остается открытым.

При изложении будем использовать стандартные обозначения и сведения из теории потенциала и теории плюрипотенциала. Напомним некоторые из них. Наделяем $\mathbb{C}^p$ евклидовой метрикой пространства $\mathbb{R}^{2p}$, которую обозначаем $|\ |$. Как обычно, $z := (z_1, z_2, \ldots, z_p) = (z_1, z') \in \mathbb{C}^p$. Обозначаем $D(a,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$, $\mathbb{D} := D(0,1)$, $C(a,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \le r\}$, $S(a,r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$, m_{2p} — мера Лебега в $\mathbb{R}^{2p}$, буквами M с индексами или без них отмечаем действительные постоянные, в скобках указываем зависимость от параметров. $SH(\Omega)$ — множество функций, субгармонических в области Ω, $PSH(\Omega)$ — множество плюрисубгармонических в Ω функций. Через G_γ обозначим γ-окрестность множества $G \subset \mathbb{C}^p$, т. е. $\bigcup_{z\in G}\{w \in \mathbb{C}^p : |w-z| < \gamma\}$, через μ_u — меру Рисса субгармонической функции u, $n(t,\mu_u) := \mu_u(C(0,t))$. Пусть $u \in PSH(\Omega)$, $v \in PSH(\Omega)$, положим $u \vee v(z) = \max(u(z), v(z))$. Известно, что $u \vee v \in PSH(\Omega)$.

Последовательность функций $u_n \in PSH(\Omega)$ экспоненциально сходится равномерно на компактах к функции u (обозначаем $u_n \overset{\exp}{\rightrightarrows} u$), если последовательность функций $\exp u_n$ равномерно на компактах сходится к функции $\exp u$

(обозначение $\exp u_n \rightrightarrows \exp u$). Понятно, что экспоненциальная равномерная сходимость на компактах является обобщением равномерной сходимости на компактах. Отметим, что при $u_n \overset{\exp}{\rightrightarrows} u$ множества $\{z : u_n(z) = -\infty\}$ могут отличаться от множества $\{z : u(z) = -\infty\}$. Автору не встречалась в литературе такая сходимость, возможно, что она вводится здесь впервые. Мотивация следующая: не только $\exp u \in PSH(\Omega)$, но и $u \in PSH(\Omega)$. Докажем это утверждение. Функция $\exp u$ полунепрерывна сверху как предел последовательности полунепрерывных сверху функций, это же свойство имеет и функция $u = \log(\exp u)$. Если $u(z) < M$ в замкнутом круге, то и $u_n(z) < M$ там же, начиная с некоторого номера n, поэтому $u_n \vee M \overset{\exp}{\rightrightarrows} u \vee M$. Далее, поскольку $u_n \vee M \geq M$ и $u \vee M \geq M$, то

$$|\exp(u_n(z) \vee M) - \exp(u(z) \vee M)| \;\geq\; \exp(M)\,|u_n(z) \vee M - u(z) \vee M|,$$

и из экспоненциальной равномерной сходимости на компактах $u_n \vee M$ к функции $u \vee M$ следует равномерная сходимость на компактах. Таким образом, $u \vee M \in PSH(\Omega)$. Заметим, что $u \vee M \downarrow u$, когда $M \downarrow -\infty$. Отсюда заключаем, что $u \in PSH(\Omega)$.

Топологию в $PSH(\Omega)$, заданную экспоненциально равномерной сходимостью на компактах, можно метризовать следующим образом. Пусть C_n — исчерпывающая Ω последовательность компактов, т. е.

$$C_n \subset C_{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \;=\; \Omega.$$

Положим $d_n(u, v) := \sup\{|\exp u(z) - \exp v(z)|: \; z \in C_n\}$ и определим метрику формулой

$$d(u, v) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}\, d_n(u, v)}{1 + d_n(u, v)}, \tag{1}$$

при этом $PSH(\Omega)$ становится полным метрическим пространством. Отметим, что порождаемая топология не зависит от выбора исчерпывания.

Теорема 1. *Множество* $\log|E|$ *нигде не плотно в* $PSH(\mathbb{C}^p)$, *оснащенном метрикой* (1).

Теорема 2. *Множество* $\log|A|$ *логарифмов модулей функций*, *аналитических в полидиске*, *нигде не плотно в* $PSH(\mathbb{D}^p)$, *оснащенном метрикой* (1).

***Доказательство теоремы* 1.** Далее удобно считать, что $C_n = C(0, \; r_n)^p$. Начнем с рассмотрения случая $p = 1$. Согласно определению нигде не плотного множества, мы должны доказать, что для произвольной целой функции f и для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует шар $B(u, \delta) := := \{v \in \in SH(\mathbb{C}): \; d(u, v) < \delta\} \subset SH \setminus \log|E|$, где $0 < \delta < \varepsilon$ и $d(\log|f|, u) < \varepsilon$. Не уменьшая общности, можем считать, что множество нулей целой функции f не пусто. Если функция f не имеет нулей, то умножим ее на $f_a(z) := (1 - z/a)$, $a > 0$. Положим $N = N(\varepsilon) := [\log(8/\varepsilon)] + 1$, тогда $\sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Имеем

$$d_n(\log|f|, \log|f \cdot f_a|) \;=\; \sup\{\|f(z)| - |f(z)||f_a(z)\|: \; z \in C_n\} \;\leq$$
$$\leq\; M_1(\varepsilon)|1 - |1 - z/a\| \;<\; M_1(\varepsilon)|z|/a \;<\; \varepsilon,$$

если $n \leq N$ и $a > M_1(\varepsilon)\, r_N/\varepsilon$.

Начнем с построения функции u. Такой выбор можно сделать разными способами. Предлагаемая ниже конструкция, возможно, не является самой простой и короткой. Ее преимущество заключается в том, что та же идея осуществима и для $p \geq 2$. Компакт C_N содержит только конечное множество $\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_l\}$ нулей функции f, причем это множество не пусто и хотя бы один нуль принадлежит C_{N-1}: при необходимости увеличим N, оставив прежним значение a. Представим $\log|f|$ в виде

$$\log|f(z)| = \sum_{j=1}^{l} \log\left|z - \zeta_j\right| + \log|g(z)|, \tag{2}$$

где целая функция g не имеет нулей на C_N. Положим (число α, $0 < \alpha < 1$, будет выбрано далее)

$$u(z) := \sum_{j=1}^{l} \pi^{-1}\alpha^{-2} \int\limits_{C(\zeta_j,\alpha)} \log|z-\zeta|\, dm_2(\zeta) + \log|g(z)|. \tag{3}$$

Ясно, что $u \in SH(\mathbb{C}) \setminus \log|E|$, так как носитель ее меры Рисса является несчетным множеством.

Оценим

$$d(u, \log|(f)|) \leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} d_n(u, \log|(f)|) + \frac{\varepsilon}{4} =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \sup\{|\exp u(z) - \exp\log|f(z)||:\ z \in C_n\} + \frac{\varepsilon}{4} <$$

$$< \sup\{|\exp u(z) - \exp\log|f(z)||:\ z \in C_N\} + \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4}$$

Пусть $z \in C' := C_N \cap \bigcup_{j=1}^{j=l} D\left(\zeta_j, \sqrt{\alpha}\right)$, тогда

$$\sup\{\exp u(z):\ z \in C'\} =$$

$$= \sup\left\{\exp\left(\pi^{-1}\alpha^{-2} \int\limits_{C(\zeta_j,\alpha)} \log\left|\zeta - \zeta_j\right| dm_2(\zeta)\right)|g(z)|:\ z \in C'\right\} \leq$$

$$\leq \sup\{|g(z)|:\ z \in C_N\} \exp\left(\sum_{j=1}^{j=l} \pi^{-1}\alpha^{-2} \int\limits_{C(\zeta_j,\alpha)} \log\left(\sqrt{\alpha} - \alpha\right) dm_2(\zeta)\right) \leq$$

$$\leq M_1(\varepsilon)\, \alpha^{l/2} < \frac{\varepsilon}{8}, \tag{5}$$

если α достаточно мало.

Аналогично показывается, что

$$\sup\{\exp\log|f(z)|:\ z \in C'\} < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{6}$$

Функции u и $|f|$ субгармонические, поэтому их наибольшие значения на множестве $C'' := C_N \setminus C'$ достигаются на границе этого множества, которая содержится в объединении множеств $\bigcup_{j=1}^{j=l} S\left(\zeta_j, \sqrt{\alpha}\right)$ и $S(0, r_N)$. Выше было доказано, что на $\bigcup_{j=1}^{j=l} S\left(\zeta_j, \sqrt{\alpha}\right)$ значения обеих функций меньше, чем $\frac{\varepsilon}{8}$, поэтому наибольшие значения в C'' и $\exp u$, и $|f|$ достигаются на $S(0, r_N)$. Оба эти значения меньше, чем $M_2(\varepsilon)$. Отсюда и из элементарных неравенств $(a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R})$

$$\min(\exp a, \exp b)\,|b-a| \;\le\; |\exp a - \exp b| \;\le\; \max(\exp a, \exp b)\,|b-a| \tag{7}$$

следует, что на C'' выполняется соотношение

$$\sup\{|\exp u(z) - \exp\log|f(z)||:\ z \in C''\} <$$

$$< M_2(\varepsilon)\sup\{|u(z) - \log|f(z)||:\ z \in C''\}. \tag{8}$$

Применим формулу [11, с. 125]

$$\log(\zeta - z) = \log(\zeta_j - z) + \frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta_j - z} - \int_{\zeta_j}^{\zeta} \frac{\zeta - t}{(t-z)^2}\,dt, \tag{9}$$

в которой интегрируем по отрезку $[\zeta_j, \zeta]$, а $\log(\zeta - z)$ — любая однозначная ветвь логарифма в плоскости с разрезом от z_j до ∞ по лучу, не проходящему через отрезок $[z, \zeta]$. Учитывая (2), (3), (9) и соотношение

$$\int_{C(\zeta_j, \alpha)} (\zeta - \zeta_j)\,dm_2(\zeta) = 0,$$

продолжаем оценку (8):

$$\sup\{|\exp u(z) - \exp\log|f(z)||:\ z \in C''\} \le$$

$$\le M_2(\varepsilon)\left|\sum_{j=1}^{j=l} \int_{C(\zeta_j, \alpha)} \Re\left(\frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta_j - z} - \int_{\zeta_j}^{\zeta} \frac{\zeta - t}{(t-z)^2}\,dt\right) dm_2(\zeta)\right| =$$

$$= M_2(\varepsilon)\left|\sum_{j=1}^{j=l} \int_{C(\zeta_j, \alpha)} \Re\left(\int_{\zeta_j}^{\zeta} \frac{\zeta - t}{(t-z)^2}\,dt\right) dm_2(\zeta)\right| \le$$

$$\le M_2(\varepsilon)\sum_{j=1}^{j=l} \int_{C(\zeta_j, \alpha)} \frac{1}{\pi\alpha^2} \int_{\zeta_j}^{\zeta} \frac{|\zeta - t|}{|t-z|^2}\,|dt|\,dm_2(\zeta). \tag{10}$$

В правой части последнего неравенства в (10) $|t - z| \ge \sqrt{\alpha} - \alpha$, $|\zeta - t| \le \alpha$, $\int_{\zeta_j}^{\zeta} |dt| \le \alpha$, поэтому

$$\int_{C(\zeta_j, \alpha)} \int_{\zeta_j}^{\zeta} \frac{|\zeta - t|\,|dt|}{|t-z|^2} \frac{dm_2(\zeta)}{\pi\alpha^2} \le \frac{\alpha^2}{(\sqrt{\alpha}/2)^2} = 4\alpha. \tag{11}$$

Сочетая (8), (10) и (11), заключаем, что на C'' выполняется

$$\sup\{|\exp u(z) - \exp\log|f(z)||:\ z \in C''\} < 4M_2(\varepsilon)\,l\alpha < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{12}$$

если α выбрано достаточно малым. Из (4) – (6) и (12) следует неравенство

$$d(\log|f|, u) < \varepsilon. \tag{13}$$

Следующая часть доказательства теоремы 1 состоит в том, чтобы показать, что

$$B(u, \delta) \cap \log|E| = \varnothing, \tag{14}$$

если число δ достаточно мало.

Сначала установим оценку снизу для $u(z)$ на C_N. Поскольку целая функция g не имеет нулей на компакте C_N, на нем

$$\log|g(z)| \geq M_3(\varepsilon). \tag{15}$$

Далее рассмотрим два случая. Если $z \in C(\zeta_j, 2\alpha)$, то

$$\frac{1}{\pi\alpha^2} \int\limits_{C(\zeta_j,\alpha)} \log|\zeta - z| dm_2(\zeta) \geq \frac{1}{\pi\alpha^2} \int\limits_{C(z,3\alpha)} \log|\zeta - z| dm_2(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{\pi\alpha^2} \int\limits_0^{3\alpha} 2\pi x \log(x)\, dx = \frac{1}{\alpha^2}\left(\log(3\alpha) 9\alpha^2 - \int\limits_0^{3\alpha} x\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left(\log(3\alpha) 9\alpha^2 - \frac{9\alpha^2}{2}\right) \geq 9 \log\alpha. \tag{16}$$

Если же $z \in C_N \setminus C(\zeta_j, 2\alpha)$, то

$$\frac{1}{\pi\alpha^2} \int\limits_{C(\zeta_j,\alpha)} \log|\zeta - z|\, dm_2(\zeta) \geq \frac{1}{\pi\alpha^2} \int\limits_{C(\zeta_j,\alpha)} \log\alpha\, dm_2(\zeta) \geq \log\alpha. \tag{17}$$

Итак, из (3), (15) – (17) следует, что для $z \in C_N$ выполняется

$$u(z) \geq 9l \log\alpha + M_3(\varepsilon) \tag{18}$$

и

$$\exp u(z) \geq M_4(\varepsilon)\, \alpha^{9l} > 0. \tag{19}$$

Докажем теперь, что если

$$d(u, \nu) < \delta < \sqrt{\delta} < \min\left(M_4(\varepsilon)\, \alpha^{9l}, 2^{-N-1}\right) \tag{20}$$

и число δ выбрано так, что

$$\sqrt{\delta} - 2^{2N+1}\delta > \sqrt{\delta}/2, \qquad \sqrt{\delta}/2 < \log\frac{r_N}{r_{N-1}+1}, \tag{21}$$

то $v \notin \log|E|$, что завершит доказательство теоремы 1.

Для $z \in C_N$ выполнено

$$\delta > d(u, v) > \frac{2^{-N}|\exp u(z) - \exp v(z)|}{1 + |\exp u(z) - \exp v(z)|}$$

и отсюда, применяя (20) и (21), на C_N получаем

$$\exp u(z) - \exp v(z) \leq \frac{2^N \delta}{2^{-N} - \delta} < 2^{2N+1}\delta,$$

а

$$\exp v(z) > \sqrt{\delta} - 2^{2N+1}\delta > \frac{\sqrt{\delta}}{2}. \tag{22}$$

Согласно (7), (19), (22)

$$|u(z) - v(z)| \leq \frac{2}{\sqrt{\delta}}|\exp u(z) - \exp v(z)| < 2^{2N+1}\sqrt{\delta}. \tag{23}$$

Предположим, что $v = \log|h|$, где h — целая функция. Докажем, что h имеет хотя бы один нуль на C_N, и тем самым придем к противоречию с (22). Пусть это не так и $n(r_N, \log|h|) = 0$. Запишем формулу Иенсена для разности $u - \log|h|$ в круге $C_N = C(0, r_N)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(u(r_N e^{i\varphi})-\log\left|h(r_N e^{i\varphi})\right|\right)d\varphi = \int_0^{r_N}\frac{n(t,\mu_u)}{t}dt + u(0) - \log|f(0)|. \quad (24)$$

Левая часть (24) не больше, чем $2^{2N+1}\sqrt{\delta}$, правая же часть (24) больше, чем $\log r_N - \log\left(r_{N-1}+1\right) + u(0) - \log|f(0)|$. Если δ выбрано достаточно малым, то такое соотношение невозможно. Таким образом, существует нуль функции h на C_N.

В случае $p \geq 2$ идея доказательства та же, но требуются некоторые изменения технического характера. Для того чтобы нулевое множество функции $f(z_1, 0')$ было не пусто, умножим ее на $f_a(z) := (1 - z_1/a)$, $a > 0$. Если число a выбрано достаточно большим, то выполнено неравенство $d_n(\log|f|, \log|f\cdot f_a|) < \varepsilon$, если $n \leq N$. Далее вместо представления (2) используем представление

$$\log|f(z)| = -\int_{C_N}\frac{d\mu_{\log|f|}(w)}{|w-z|^{2p-2}} + h(z) = P(z) + h(z), \quad (25)$$

в котором h — гармоническая функция внутри C_N. Заметим, что слагаемые в представлении (25) могут не быть плюрисубгармоническими функциями.

Рассмотрим в $\mathbb{C}^p$ функцию со следующими свойствами (см. [1], § 3.2):

$$K(\xi) = K(|\xi|); \quad K(\xi)\in C^\infty; \quad K(\xi) = 0, \ |\xi|\geq 1; \quad K(\xi) > 0, \ |\xi|<1;$$

$$\int_{\mathbb{C}^p} K(\xi)\, dm_{2p}(\xi) = 1.$$

Вместо определения (3) используем следующее:

$$u(z) := -\int_{\mathbb{C}^p}\int_{C_N}\frac{d\mu_{\log|f|}(w)}{|w-\xi-z|^{2p-2}}\alpha^{-2p}K\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)dm_{2p}(\xi) +$$

$$+\int_{\mathbb{C}^p} h(z+\xi)\,\alpha^{-2p}K\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)dm_{2p}(\xi) = P_\alpha(z) + h_\alpha(z). \quad (26)$$

Согласно теоремам 3.6 и 3.8 из [1] функция $u\in C^\infty \bigcap PSH(\mathbb{C}^p)$. Снова отметим, что слагаемые в (26) могут не быть плюрисубгармоническими функциями. Согласно теореме 3.1 из [1], если число α выбрано достаточно малым, то имеет место неравенство

$$|h(z) - h_\alpha(z)| < \varepsilon_1, \quad z\in C_N. \quad (27)$$

Поскольку $M_5(\varepsilon) \leq h(z) \leq M_6(\varepsilon)$, если $z\in C_N$, отсюда и из (27) следует, что

$$\sup\{|\exp h(z) - \exp h_\alpha(z)|:\ z\in C_N\} < \exp(M_6(\varepsilon)+1)\varepsilon_1 < \varepsilon. \quad (28)$$

Полагаем $C' := (C_N \bigcap \operatorname{supp}\mu_u)_{\alpha^{\frac{1}{2p}}}$ (т. е. $\alpha^{1/(2p)}$ — окрестность носителя меры Рисса в C_N), $C'' := C_N \setminus C'$. На C' выполняется

$$\sup\{\exp u(z):\ z\in C'\} =$$

$$= \sup\left(\exp\left(-\int_{\mathbb{C}^p}\int_{C_N}\frac{d\mu_{\log|f|}(w)}{|w-\varepsilon-z|^{2p-2}}\alpha^{-2p}K\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)dm_{2p}(\xi) + h_\alpha(z)\right):\ z\in C'\right) \leq$$

$$\leq \sup\{\exp(h(z)+1):\ z\in C_N\}\times$$

$$\times\sup\left(\exp\left(-\int\limits_{\mathbb{C}^p}\int\limits_{C_N}\frac{d\mu_{\log|f|}(w)}{(|w-z|+|\xi|)^{2p-2}}\,\alpha^{-2p}\,K\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)dm_{2p}(\xi)\right):\ z\in C'\right)\leq$$

$$\leq M_7(\varepsilon)\exp\left(-\int\limits_{\mathbb{C}^p}\int\limits_{C_N}\frac{d\mu_{\log|f|}(w)}{\left(\alpha^{1/(2p)}+\alpha\right)^{2p-2}}\,\alpha^{-2p}\,K\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)dm_{2p}(\xi)\right)\leq$$

$$\leq M_7(\varepsilon)\exp\left(-2^{2-2p}\,\alpha^{-(2p-2)/(2p)}\,\mu_{\log|f|}(C_N)\right)<\frac{\varepsilon}{8}. \tag{29}$$

Аналогично доказывается и неравенство

$$\sup\{\exp\log|f(z)|:\ z\in C'\}<\frac{\varepsilon}{8}. \tag{30}$$

Далее, соотношение (8) остается в силе, а вот формулу (9) надо заменить следующим образом. Рассмотрим функцию $F(t):=-|w-z-t\xi|^{-2p+2}$, где w, z, $\xi\in\mathbb{C}^p$, $t\in\mathbb{R}$. Запишем для нее формулу Маклорена порядка 1 с остаточным членом в интегральной форме и положим в ней $t=1$:

$$F(1)\ =\ F(0)\ +\ F'(0)\ +\ \int\limits_0^1(1-s)^2\,F''(s)\,ds. \tag{31}$$

В результате несложных выкладок получаем

$$F(0)\ =\ -|w-z|^{-2p+2},$$

$$F'(0)\ =\ (p-1)|w-z|^{-2p}\sum_{k=1}^{k=p}\left((w_k-z_k)\overline{\xi_k}\ +\ \left(\overline{w_k}-\overline{z_k}\right)\xi_k\right), \tag{32}$$

$$|F'(0)|\ \leq\ M_8(\varepsilon)|w-z|^{-2p+1},\qquad |F''(s)|\ \leq\ M_9(\varepsilon)\left(\alpha^{1/(2p)}-\alpha\right)^{-2p}\alpha^2\ \leq\ M_{10}(\varepsilon)\alpha,$$

где в оценках для производных $z\in C''$, $w\in\operatorname{supp}\mu_{\log|f|}$, $|\xi|\leq\alpha$, ξ_k — координата ξ с номером k, $\overline{\xi_k}$ — сопряженное к ней комплексное число.

Учитывая (25), (26), (31), (32) и соотношения

$$\int\limits_{\mathbb{C}^p}\overline{\xi_k}\,K\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)dm_{2p}(\xi)\ =\ \int\limits_{\mathbb{C}^p}\xi_k\,K\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)dm_{2p}(\xi)\ =\ 0,$$

продолжаем оценку (8) для случая $p\geq 2$:

$$\sup\{|\exp P(z)-\exp P_\alpha(z)|:\ z\in C''\}\ \leq$$

$$\leq\ M_2(\varepsilon)\int\limits_{\mathbb{C}^p}\int\limits_{C_N}M_{10}(\varepsilon)\alpha\,d\mu_{\log|f|}\,\alpha^{-2p}\,K\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)dm_{2p}(\xi)\ \leq$$

$$\leq\ M_{11}(\varepsilon)\alpha\,\mu_{\log|f|}(C_N)\ <\ \frac{\varepsilon}{4}. \tag{33}$$

Сочетая (28) – (30) и (33), получаем

$$d(\log|f|,u)\ <\ \varepsilon.$$

Далее находим оценку снизу для функции u на C_N. Поскольку это аналогично доказательству (18), приведем только часть доказательства, а именно, оценку снизу $P_\alpha(z)$ для $z \in C'$. В этом случае

$$P_\alpha(z) = -\int\limits_{\mathbb{C}^p}\int\limits_{C_N} \frac{d\mu_{\log|f|}(w)}{|w-z-\xi|^{2p-2}}\,\alpha^{-2p} K\!\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) dm_{2p}(\xi) =$$

$$= -\int\limits_{C_N}\int\limits_{\mathbb{C}^p} \frac{\alpha^{-2p} K\!\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) dm_{2p}(\xi)}{|w-\xi-z|^{2p-2}}\, d\mu_{\log|f|}(w) =$$

$$= -\int\limits_{C_N}\int\limits_{\{\xi:\,|\xi|<\alpha\}} \frac{\alpha^{-2p} K\!\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) dm_{2p}(\xi)}{|w-\xi-z|^{2p-2}}\, d\mu_{\log|f|}(w) \geq$$

$$\geq -\int\limits_{C_N}\int\limits_{\{\xi:\,|\xi|<\alpha\}} \frac{\alpha^{-2p} M_{12}\, dm_{2p}(\xi)}{|w-\xi-z|^{2p-2}}\, d\mu_{\log|f|}(w) =$$

$$= -\int\limits_{C_N}\int\limits_{\{\xi:\,|\xi|<\alpha\}} \frac{\alpha^{-2p} M_{12}\, dm_{2p}(\xi-w+z)}{|w-\xi-z|^{2p-2}}\, d\mu_{\log|f|}(w) \geq$$

$$\geq -\int\limits_{C_N}\int\limits_0^\alpha \alpha^{-2p} M_{13} \frac{r^{2p-1}dr}{r^{2p-2}}\, d\mu_{\log|f|}(w) = -M_{14}\,\alpha^{2-2p}\,\mu_{\log|f|}(C_N).$$

Наконец, укажем, как доказать, что пересечение $B(u,\delta) \cap \log|E| = \varnothing$. Предположим, что это не так и существует целая функция h, $\log|h| \in B(u,\delta)$. Отсюда следует оценка снизу $|h(z)| \geq M_{15} > 0$ для $z \in C_N$. С другой стороны, рассмотрим целую функцию одной переменной $h(z_1, 0')$. Запишем для нее формулу Иенсена, а затем рассуждениями, аналогичными приведенным после (24), докажем существование нуля функции h в круге $\{z_1 : |z_1| < r_N\}$. Именно поэтому мы умножали f на f_a, теперь $\operatorname{supp}\mu_{u(z_1,0')} \supset C(a, \alpha/2)$ и $n\big(r_{N-1}+1, \mu_{u(z_1,0')}\big) \geq 1$.

***Доказательство теоремы* 2** только незначительными деталями отличается от доказательства теоремы 1 (например, полагаем $f_a(z) := (1-(1-a)/(1-z))$, $0 < a < 1$), поэтому мы его не приводим.

1. *Hayman W. K., Kennedy P. B.* Subharmonic functions. – London etc.: Acad. Press, 1976. – Vol 1. – XVII + 284 p.
2. *Lelong P., Gruman L.* Entire functions of several complex variables. – Berlin etc.: Springer, 1986. – XII + 270 p.
3. *Klimek M.* Pluripotential theory. – New York: Clarendon Press, 1991. – XIV + 266 p.
4. *Oxtoby J. C.* Measure and category. – Berlin etc.: Springer, 1971. – X + 106 p.
5. *Gauthier P., Hengartner W.* The value distribution of most functions of one or several complex variables // Ann. Math. – 1972. – **96**. – P. 31 – 52.
6. *Anderson J. M.* The radial growth of integral functions // J. London Math. Soc. – 1970. – **2**, № 2. – P. 318 – 320.
7. *Еременко А. Э.* О считающих функциях последовательностей a-точек для функций, голоморфных в круге // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1977. – Вып. 31. – С. 59 – 62.
8. *Єременко О. Е.* Про валіронівські дефекти цілих характеристичних функцій скінченного порядку // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 807 – 809.
9. *Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В.* Об a-точках функций, мероморфных в круге // Сиб. мат. журн. – 1985. – **24**, № 3. – С. 34 – 36.
10. *Filevych P.V.* The Baire categories and Wiman's inequality for entire functions // Mat. Stud. – 2003. – **20**, № 2. – P. 215 – 221.
11. *Girnyk M., Goldberg A.* Approximation of subharmonic functions by logarithms of moduli of entire functions in integral metrics // Isr. Math. Conf. Proc. – 2001. – **15**. – P. 117 – 135.

Получено 05.09.07