УДК 517.9

В. О. Капустян (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ),
П. О. Касьянов (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
О. П. Когут (Ін-т прикл. систем. аналізу НАН України та М-ва освіти і науки України, Київ)

ПРО РОЗВ’ЯЗНІСТЬ ОДНОГО КЛАСУ ПАРАМЕТРИЗОВАНИХ ОПЕРАТОРНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

We consider a class of parameterized operator inclusions with multivalued maps of $\bar{S}_k$ type. Sufficient conditions for the solvability of these inclusions are obtained and the dependence of their solution sets on functional parameters is investigated. The examples illustrating the results obtained are given.

Рассмотрен класс параметризованных операторных включений с многозначными отображениями типа $\bar{S}_k$. Получены достаточные условия разрешимости таких включений и исследована зависимость множеств их решений от функциональных параметров. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Вступ. Операторні включення $A(y) \ni f$ є об’єктом інтенсивних досліджень упродовж останніх десятиліть (див., наприклад, [1 – 5]). Інтерес до таких об’єктів зумовлений насамперед їх широким практичним застосуванням. Зазвичай їх пов’язують із задачами математичної фізики, з диференціальними рівняннями з частинними похідними, диференціальні оператори яких допускають розрив по фазовій змінній, з диференціальними рівняннями з розривною правою частиною (див., наприклад, [6]), із задачами теорії керування та оптимізації та ін. Основним об’єктом досліджень даної роботи є параметризовані операторні включення вигляду $A(y, u) \ni f$, залежність яких від функціональних параметрів $u \in U$ може бути найрізноманітнішою. Такі об’єкти є типовими складовими математичних моделей багатьох реальних процесів (див., наприклад, [7]), що мотивує дослідження проблеми їх розв’язності та залежності їх розв’язків від параметра $u \in U$.

В роботах [8, 9] викладено основні результати з теорії розв’язності операторних рівнянь, виходячи з властивостей монотонності та псевдомонотонності породжуючих їх нелінійних операторів. Більш широкі узагальнення, пов’язані з переходом у класичних означеннях до підпослідовностей, запропоновано в роботі [10]. Це дало можливість розглядати клас λ_0-псевдомонотонних відображень, замкнений відносно суми відображень, що раніше було проблематичним. Реалізація цієї ідеї щодо проблем розв’язності стаціонарних операторних включень знайшла своє відображення в роботах [4, 11 – 16], а еволюційні включення розглядалися в [17, 18].

Мета даної роботи полягає у введенні аналога властивості S_k[1], запропонованої в роботі [10], для випадку багатозначних операторів (далі позначатимемо його через $\bar{S}_k$). Клас таких операторів містить як власну підмножину оператори λ_0-псевдомонотонного типу і, на відміну від таких операторів, властивість S_k є інваріантною відносно операції множення відображення на (-1). Хоча клас багатозначних операторів, які задовольняють властивість $\bar{S}_k$, досі систематично не вивчався, в роботі доведено теорему про розв’язність відповідних операторних включень та досліджено основні властивості множини їх розв’язків.

[1] Нелінійний оператор $A\colon X \to X^*$, де X — банахів простір, задовольняє властивість S_k, якщо для кожної послідовності $\{y_n\}_{n\geq 1} \subset X$ такої, що $y_n \rightharpoonup y$ в X і $A(y_n) \rightharpoonup d$ в X^*, з умови $\langle A(y_n), y_n - y\rangle_X \to 0$ випливає, що $A(y_n) \rightharpoonup A(y)$ в X^*.

Постановка задачі. Нехай X — рефлексивний банахів простір, X^* — топологічно спряжений до нього, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X : X^* \times X \to \mathbb{R}$ — операція канонічного спарювання, 2^{X^*} — сукупність усіх підмножин простору X^*, $A : X \to 2^{X^*}$ — багатозначне відображення,

$$\operatorname{Dom} A = \{y \in X \mid A(y) \neq \varnothing\}, \quad \operatorname{gr} A = \{(\xi; y) \in X^* \times X \mid \xi \in A(y)\}.$$

Далі багатозначне відображення A, для якого $\operatorname{Dom} A = X$, будемо називати строгим і позначати його як $A\colon X \rightrightarrows X^*$. Зі строгим багатозначним відображенням A пов'яжемо його верхню $[A(y), \xi]_+ = \sup\limits_{d \in A(y)} \langle d, \xi \rangle_X$ та нижню $[A(y), \xi]_- = \inf\limits_{d \in A(y)} \langle d, \xi \rangle_X$ опорні функції, де $y, \xi \in X$. Нехай також $\|A(y)\|_+ = \sup\limits_{d \in A(y)} \|d\|_{X^*}$, $\|A(y)\|_- = \inf\limits_{d \in A(y)} \|d\|_{X^*}$ [19]. Будемо також пов'язувати з відображенням $A\colon X \rightrightarrows X^*$ відображення $\mathrm{co}A\colon X \rightrightarrows X^*$ та $\overline{\mathrm{co}}A\colon X \rightrightarrows X^*$, які визначені за правилами $(\mathrm{co}A)(y) = \mathrm{co}(A(y))$ та $(\overline{\mathrm{co}}A(y)) = \overline{\mathrm{co}}(A(y))$ відповідно. Тут через $\overline{\mathrm{co}}(A(y))$ позначено слабке замикання у просторі X^* опуклої оболонки множини $A(y)$.

Твердження 1 [19]. *Нехай $A, B\colon X \rightrightarrows X^*$. Тоді для всіх y, v, v_1, $v_2 \in X$ справедливим є наступне*:

1) *функціонал $X \ni v \to [A(y), v]_+$ є опуклим, додатно однорідним та напівнеперервним знизу*;

2) $[A(y), v_1 + v_2]_+ \leq [A(y), v_1]_+ + [A(y), v_2]_+$,
$[A(y), v_1 + v_2]_- \geq [A(y), v_1]_- + [A(y), v_2]_-$,
$[A(y), v_1 + v_2]_+ \geq [A(y), v_1]_+ + [A(y), v_2]_-$,
$[A(y), v_1 + v_2]_- \leq [A(y), v_1]_+ + [A(y), v_2]_-$;

3) $[A(y) + B(y), v]_+ = [A(y), v]_+ + [B(y), v]_+$,
$[A(y) + B(y), v]_- = [A(y), v]_- + [B(y), v]_-$;

4) $[A(y), v]_+ \leq \|A(y)\|_+ \|v\|_X$,
$[A(y), v]_- \leq \|A(y)\|_- \|v\|_X$;

5) $\|\overline{\mathrm{co}}^* A(y)\|_+ = \|A(y)\|_+$, $\|\overline{\mathrm{co}}^* A(y)\|_- = \|A(y)\|_-$,
$[A(y), v]_+ = [\overline{\mathrm{co}}^* A(y), v]_+$, $[A(y), v]_- = [\overline{\mathrm{co}}^* A(y), v]_-$;

6) $\|A(y) - B(y)\|_+ \geq |\, \|A(y)\|_+ - \|B(y)\|_- \,|$,
$\|A(y) - B(y)\|_- \geq \|A(y)\|_- - \|B(y)\|_+$;

7) $d \in \overline{\mathrm{co}}^* A(y) \Leftrightarrow \forall \omega \in X \;\; [A(y), \omega]_+ \geq \langle d, w \rangle_X$.

Нехай далі Y — рефлексивний або сепарабельний нормований простір, Y^* — спряжений до нього, U — непорожня, опукла, $*$-слабкозамкнена множина в Y^*. Параметризованим операторним включенням будемо називати об'єкт

$$A(y, u) \ni f \quad u \in U, \tag{1}$$

де $A\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ та $f \in X^*$.

Класи відображень. Введемо наступні поняття.

Означення 1. *Багатозначне відображення $A\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ називається λ-квазімонотонним, якщо для довільної послідовності $\{y_n, u_n\}_{n \geq 1} \subset X \times U$ такої, що для деяких $y_0 \in X$, $u_0 \in U$ $y_n \to y_0$ слабко в X, $u_n \to u_0$ $*$-слабко в Y^* при $n \to +\infty$, з нерівності*

$$\varlimsup_{n \to \infty} \langle d_n, y_n - y_0 \rangle_X \leq 0,$$

де $d_n \in \overline{\mathrm{co}} A(y_n, u_n)$ $\forall n \geq 1$, *випливає існування підпослідовності* $\{y_{n_k}, u_{n_k}\}_{k\geq 1}$ *з* $\{y_n, u_n\}_{n\geq 1}$, *для якої виконується*

$$\varliminf_{k\to\infty} \langle d_{n_k}, y_{n_k} - w\rangle_X \ \geq\ [A(y_0, u_0), y_0 - w]_- \quad \forall w \in X.$$

Означення 2. *Будемо говорити, що відображення* $A\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ *задовольняє властивість* $\bar{S}_k$, *якщо з того, що* $y_n \to y_0$ *слабко в* X, $U \ni u_n \to u_0 \in U$ $*$*-слабко в* Y^*, $d_n \to d$ *слабко в* X^* ($d_n \in \overline{\mathrm{co}} A(y_n, u_n)$ $\forall n \geq 1$) *та*

$$\langle d_n, y_n - y_0\rangle_X \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{2}$$

випливає $d \in \overline{\mathrm{co}} A(y_0, u_0)$.

***Зауваження* 1.** Якщо $A\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ задовольняє властивість $\bar{S}_k$, то $(-A)\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ також задовольняє дану властивість.

Наступне твердження належним чином впорядковує класи відображень типу $\bar{S}_k$ та λ-квазімонотонного типу.

Твердження 2. *Багатозначне* λ*-квазімонотонне відображення задовольняє властивість* $\bar{S}_k$.

Доведення. Розглянемо послідовності $U \ni u_n \to u_0 \in U$ $*$-слабко в Y^* та $y_n \to y_0$ слабко в X, $d_n \to d$ слабко в X^* ($d_n \in \overline{\mathrm{co}} A(y_n, u_n)$ $\forall n \geq 1$), і нехай для них виконується співвідношення (2), а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \langle d_n, y_n\rangle = \langle d, y_0\rangle_X$. Доведемо, що $d \in \overline{\mathrm{co}} A(y_0, u_0)$. З того, що оператор A є λ-квазімонотонним, із співвідношення (2) випливає існування підпослідовності $\{y_m, u_m\}_{m\geq 1}$ з $\{y_n, u_n\}_{n\geq 1}$, для якої виконується

$$\varliminf_{m\to\infty} \langle d_m, y_m - w\rangle_X \geq [A(y_0, u_0), y_0 - w]_- \quad \forall w \in X.$$

Перетворимо дану нерівність:

$$\big[A(y_0, u_0), y_0 - w\big]_- \leq \varlimsup_{m\to\infty} \langle d_m, y_m\rangle_X - \lim_{m\to\infty} \langle d_m, w\rangle_X =$$

$$= \langle d, y_0 - w\rangle_X \quad \forall w \in X.$$

На підставі твердження 1 отримуємо, що $d \in \overline{\mathrm{co}} A(y_0, u_0)$.

Твердження доведено.

Лема 1. *Нехай* $A\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ *та* $B\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ — λ*-квазімонотонні багатозначні відображення. Тоді* $C := A + B\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ — λ*-квазімонотонне багатозначне відображення.*

Доведення аналогічне наведеному в [16].

Означення 3. *Будемо говорити, що відображення* $A\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ *є демізамкненим, якщо з того, що* $y_n \to y_0$ *сильно в* X, $U \ni u_n \to u_0 \in U$ $*$*-слабко в* Y^*, $d_n \to d$ *слабко в* X^* ($d_n \in \overline{\mathrm{co}} A(y_n, u_n)$ $\forall n \geq 1$), *випливає, що* $d \in \overline{\mathrm{co}} A(y_0, u_0)$.

Твердження 3. *Багатозначне відображення, що задовольняє властивість* $\bar{S}_k$, *є демізамкненим.*

Означення 4. *Багатозначне відображення* $A\colon X \rightrightarrows X^*$ *задовольняє властивість* (Π), *якщо для деякого* $k > 0$, *деякої обмеженої множини* $B \subset X$ *та деякого селектора* $d \in A$ *виконується нерівність* $\langle d(y), y\rangle_X \leq k$ *для всіх* $y \in B$, *тоді існує таке* $C > 0$, *що* $\|d(y)\|_{X^*} \leq C$ *для всіх* $y \in B$.

***Зауваження* 2.** Сума багатозначних відображень, що задовольняють властивість (П), також задовольняє властивість (П).

Означення 5. *Багатозначне відображення* $A\colon X \rightrightarrows X^*$ *називається*:

локально обмеженим, якщо для довільного фіксованого $y \in X$ *існують константи* $m > 0$ *і* $M > 0$ *такі, що* $\|A(\xi)\|_+ \le M$ *для всіх* $\xi \in \{\xi \in X \mid \|y-\xi\|_X \le m\}$;

скінченновимірно локально обмеженим, якщо для довільного скінченновимірного простору $F \subset X$ *звуження* A *на* F *є локально обмеженим.*

Основні результати.

Означення 6. *Будемо говорити, що* $y \in X$ *є слабким розв'язком задачі* (1) *при заданих* $f \in X^*$ *та* $u \in U$, *якщо* $\overline{\text{co}}A(y,u) \ni f$, *тобто якщо* $[A(y,u), w]_+ \ge \ge \langle f, w\rangle_X \ \forall w \in X$.

Для фіксованих $u \in U$, $f \in X^*$ через $K(u,f)$ позначимо множину слабких розв'язків включення (1).

Теорема. *Нехай багатозначне відображення* $A\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ *задовольняє властивість* $\bar{S}_k$, $U \ni u_n \to u \in U$ *$*$-слабко в* Y^*, $f_n \to f$ *сильно в* X^*. *Тоді*

$$\bigcap_{n\ge 1} \overline{\bigcup_{m\ge n} K(u_m, f_m)}^{w} \subset K(u,f), \tag{3}$$

де $\overline{U}^w$ *— слабке замикання множини* $U \subset X$ *в* X.

Більш того, якщо існують $u \in U$, $f \in X^*$, $r > 0$ *такі, що*

$$\big[A(y,u) - f, y\big]_+ \ge 0 \quad \forall y \in X\colon \ \|y\|_X = r, \tag{4}$$

а відображення $X \ni y \to A(y,u)$ *є скінченновимірно локально обмеженим і задовольняє властивість* (П), *то* $K(u,f)$ *— непорожня, слабкозамкнена множина в* X.

Доведення. Нехай $\aleph(X)$ — сукупність усіх скінченновимірних підпросторів простору X, $I_F : F \to X$ — оператор вкладення, $I_F^* : X^* \to F^*$ — спряжений оператор. Для кожного $F \in \aleph(X)$ розглянемо відображення $A_F : F \to F^*$, яке визначається комутативною діаграмою

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A(\cdot,u)} & X^* \\ \uparrow I_F & & \downarrow I_F^* \\ F & \xrightarrow{A_F} & F^* \end{array},$$

тобто $A_F(\cdot) = I_F^* A(\cdot,u) I_F$.

Для кожного $F \in \aleph(X)$ покладемо $\overline{A}_F(\cdot) = \overline{I_F^*\overline{\text{co}}A(\cdot,u)} : F \rightrightarrows F^*$. Покажемо, що відображення $\overline{A}_F(\cdot) = \overline{\text{co}}A_F(\cdot)$ набуває опуклих компактних значень. Останнє випливає із скінченновимірної локальної обмеженості відображення $X \ni y \to A(y,u)$ та зі справедливості рівності $\overline{\text{co}} I_F^* A(y,u) = I_F^* \overline{\text{co}} A(y,u) \ \forall y \in F$, яку доведено у [19].

Далі, покажемо, що відображення $\overline{A}_F(\cdot) = I_F^*\overline{\text{co}}A(\cdot,u)\colon F \rightrightarrows F^*$ є напівнеперервним зверху. Множина $\overline{A}_F(x)$ є обмеженою, а отже, компактною в F^*. Припустимо, що в точці $x_0 \in F$ відображення $\overline{A}_F$ не є напівнеперервним зверху. Тоді знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що в кожній кулі

$$B_{\frac{1}{n}}(x_0) = \left\{ x \in F \,\middle|\, \|x - x_0\|_F < \frac{1}{n} \right\}$$

можна вибрати точку x_n так, що

$$\overline{A}_F(x_n) \not\subset B_\varepsilon\big(\overline{A}_F(x_0)\big) = \big\{ z \in F^* \,\big|\, \operatorname{dist}\big(z, \overline{A}_F(x_0)\big) < \varepsilon \big\}.$$

Розглянемо послідовності $\{x_n\}$, $\{z_n\}$, де $z_n \in \overline{A}_F(x_n) \backslash B_\varepsilon\left(\overline{A}_F(x_0)\right)$, $x_n \in \in B_{1/n}(x_0)$. Послідовність x_n збігається до x_0 в F, а послідовність z_n обмежена згідно з обмеженістю відображення $\overline{A}_F$. Не втрачаючи загальності можемо вважати, що $z_n \to z_0$ в F^*. Згідно з твердженням 3 відображення A є демізамкненим, звідки випливає замкненість $\overline{A}_F$. Тому $z_0 \in \overline{A}_F(x_0)$, що суперечить $z_n \notin B_\varepsilon\left(\overline{A}_F(x_0)\right)$.

Для кожного $F \in \aleph(X)$ покладемо $\overline{B_{r,F}} = \overline{B}_r \bigcap F$, де $\overline{B}_r$ — замкнена куля радіуса r з центром у нулі в просторі X. Тоді

$$\left[\overline{A}_F(y) - f_F, y\right]_+ = [A(y,u) - f, y]_+ \geq 0 \quad \forall y \in \partial\overline{B}_{r,F},$$

де $f_F = I_F^* f$.

Отже, для відображення $\overline{A}_F(\cdot) - f_F$ застосуємо наслідок 1.4.3 із [19], з якого випливає, що для будь-якого $F \in \aleph(X)$ існує $y_F \in \overline{B_{r,F}}$ таке, що $\overline{A}_F(y_F) \ni f_F$. Згідно з твердженням 1.2.2 з [19] останнє включення є еквівалентним нерівності

$$\left[\overline{A}_F(y_F), w\right]_+ \geq \langle f_F, w\rangle_F \quad \forall w \in F. \tag{5}$$

Для довільного $F_0 \in \aleph(X)$ покладемо

$$G_{F_0} = \bigcup_{F \supset F_0} \left\{ y_F \in \overline{B_{r,F}} \,\middle|\, y_F \text{ задовольняє (5)} \right\}.$$

Очевидно, множина G_{F_0} є непорожньою і міститься в кулі $\overline{B}_r$. Окрім того, для довільного скінченного набору $F_1, \ldots, F_n \in \aleph(X)$ і $F \in \aleph(X)$ таких, що $\bigcup_{i=1}^n F_i \subset \subset F$, маємо $\varnothing \neq G_F \subset \bigcap_{i=1}^n G_{F_i}$.

Таким чином, система множин $\{\overline{G}_F^w\}$ є центрованою, де $\overline{G}_F^w$ — слабке замикання множини G_F в X, і згідно з теоремою Банаха – Алаоглу для кожного $F \in \aleph(X)$ $\overline{G}_F^w$ — компакт у слабкій топології простору X. Отже, $\bigcap_{F\in\aleph(X)} \overline{G}_F^w \neq \varnothing$.

Розглянемо $y_0 \in \bigcap_{F\in\aleph(X)} \overline{G}_F^w$, зафіксуємо довільне $w \in X$ та виберемо $F_0 \in \in \aleph(X)$ з умови $y_0, w \in F_0$. Тоді знайдеться підпослідовність $\{y_n\} \in G_{F_0}$, яка слабко збігається до y_0 у просторі X, а також $d'_n \in \overline{A}_{F_n}(y_n)$ $(d'_n = f_n)$, де $y_n \in \in \overline{B}_r \bigcap F_n$, $F_0 \subset F_n \in \aleph(X)$, $f_n = I_{F_n}^* f$. У такому випадку

$$\lim_{n\to\infty} \langle d_n, y_n - y_0\rangle_X = \lim_{n\to\infty} \langle d'_n, y_n - y_0\rangle_{F_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \langle f_n, y_n - y_0\rangle_{F_n} = \lim_{n\to\infty} \langle f, y_n - y_0\rangle_X = 0,$$

де $d'_n = I_{F_n}^* d_n$, $d_n \in \overline{\mathrm{co}} A(y_n, u)$. Звідси, зокрема, випливає, що послідовність $\left\{\langle d_n, y_n\rangle_X\right\}_{n\geq 1}$ є обмеженою зверху. Враховуючи, що відображення $X \ni y \to \to A(y,u)$ задовольняє властивість (П), згідно з теоремою Банаха – Алаоглу можемо вважати, що з точністю до підпослідовності $d_n \to d$ $*$-слабко в X^*. Оскільки відображення A задовольняє властивість $\bar{S}_k$, то $d \in \overline{\mathrm{co}} A(y_0, u)$. Далі,

$$\langle d, w\rangle_X = \lim_{n\to\infty} \langle d_n, w\rangle_X = \lim_{n\to\infty} \langle d'_n, w\rangle_{F_n} = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, w\rangle_{F_n} = \lim_{n\to\infty} \langle f, w\rangle_X .$$

З довільного вибору $w \in X$ випливає, що $d = f$, а це і доводить, що множина $K(u, f)$ є непорожньою.

Нехай тепер $U \ni u_n \to u \in U$ $*$-слабко в Y^*, $f_n \to f$ сильно в X^*. Перевіримо справедливість включення (3). Припустимо, що множина

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} K(u_m, f_m)}^w$$

є непорожньою (в іншому випадку включення (3) очевидно виконується). Тоді якщо $y_0 \in \bigcap_{n\geq 1} \overline{\bigcup_{m\geq n} K(u_m, f_m)}^w$, то існує підпослідовність натуральних чисел $\{n_k\}_{k\geq 1}$ така, що y_0 є слабкою границею в просторі X деякої послідовності $\{y_{n_k}\}_{k\geq 1}$ такої, що для будь-якого $k \geq 1$ $y_{n_k} \in K(u_{n_k}, f_{n_k})$. Зазначимо, що $\langle f_{n_k}, y_{n_k} - y_0\rangle_X \to 0$ при $k \to \infty$. Тоді з властивості $\bar{S}_k$ оператора A $f \in A(y_0, u)$, тобто $y_0 \in K(u, f)$.

Слабка замкненість $K(u, f)$ випливає з (3).

Теорему доведено.

Далі на простому модельному прикладі буде проілюстровано, що клас відображень типу $\bar{S}_k$ є принципово ширшим за клас λ-квазімонотонних відображень.

З кожним багатозначним відображенням $A\colon X \rightrightarrows X^*$ пов'яжемо відображення $\bar{A}\colon X \times U \rightrightarrows X^*$, $\bar{A}(y, u) = A(y)$, $y \in X$, $u \in U$.

Означення 7. *Багатозначний оператор $A\colon X \rightrightarrows X^*$ називається*:

λ-псевдомонотонним, якщо відповідне відображення $\bar{A} : X \times U \rightrightarrows X^*$ є λ-квазімонотонним;

$+$ $(-)$-коерцитивним, якщо

$$\frac{[A(y), y]_{+(-)}}{\|y\|_X} \to +\infty \quad \textit{при} \quad \|y\|_X \to +\infty.$$

Означення 8. *Багатозначний оператор $A : X \rightrightarrows X^*$ задовольняє властивість (S_k), якщо відповідне відображення $\bar{A}\colon X \times U \rightrightarrows X^*$ задовольняє властивість $\bar{S}_k$.*

***Зауваження* 3.** Достатньою умовою виконання нерівності (4) є умова $+$-коерцитивності для $A(\cdot, u)\colon X \rightrightarrows X^*$.

Ми розглянемо обмежене багатозначне відображення $A : X \rightrightarrows X^*$, яке задовольняє властивість S_k, є $+$-коерцитивним, але не є $-$-коерцитивним, не є λ-псевдомонотонним і $-A$ теж не є λ-псевдомонотонним.

***Приклад* 1.** Нехай $n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область, $X = H_0^1(\Omega)$ — дійсний простір Соболєва [9], $X^* \equiv H^{-1}(\Omega)$, $(u, v)_{L_2} = \int_\Omega u(x)v(x)dx$, $u, v \in L_2(\Omega)$; $((u, v)) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$ — скалярний добуток в $H_0^1(\Omega)$, $u, v \in H_0^1(\Omega)$; $a \cdot b$ — скалярний добуток векторів $a, b \in \mathbb{R}^n$; $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \sqrt{((u, u))}$, $u \in X$.

Для кожного $y \in X$ покладемо

$$A(y) = \{-\mathrm{div}\alpha\nabla y \mid \alpha \in [-1, 1]\}.$$

Зауважимо, що $A\colon X \rightrightarrows X^*$, $\overline{\mathrm{co}}A(y) = A(y) = -A(y)$ $\forall y \in X$.

Перевіримо, що A задовольняє *властивість* S_k. Нехай $y_n \to y$ слабко в X, $d_n \to d$ слабко в X^* ($d_n = -\alpha_n \triangle y_n \in A(y_n)$, $\alpha_n \in [-1,1]$, $n \geq 1$) і $\langle d_n, y_n - y\rangle \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді

$$\langle d_n, y_n - y\rangle = -\alpha_n \langle \triangle y_n, y_n - y\rangle = \alpha_n \|y_n - y\|_X^2 - \alpha_n \langle \triangle y, y_n - y\rangle \quad \forall n \geq 1.$$

Оскільки $y_n \to y$ слабко в X, а $|\alpha_n| \leq 1$ $\forall n \geq 1$, то $\alpha_n \|y_n - y\|_X^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді існує підпослідовність $\{y_m, \alpha_m\}_m \subset \{y_n, \alpha_n\}_{n\geq 1}$ така, що або $\alpha_m \to 0$, або $\|y_m - y\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$. У випадку, коли $\alpha_m \to 0$ (враховуючи, що $-\triangle : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ — обмежений оператор), маємо $d_m = -\alpha_m \triangle y_m \to \bar{0} \in A(y)$. Якщо ж $y_m \to y$ сильно в $H_0^1(\Omega)$ (враховуючи, що $|\alpha_m| \leq 1$ $\forall m$), одержуємо, що з точністю до підпослідовності $\{y_k, \alpha_k\} \subset \{y_m, \alpha_m\}$ $-\alpha_k \triangle y_k \to -\alpha \triangle y$ сильно в X для деякого $\alpha \in [-1,1]$. Отже, $d = -\alpha \triangle y \in A(y)$.

$+$-*Коерцитивність* A випливає з того, що

$$[A(y), y]_+ = \sup_{|\alpha|\leq 1} \alpha \langle \triangle y, y\rangle = \|y\|_X^2 \quad \forall y \in X.$$

Обмеженість A випливає з оцінки $\|A(y)\|_+ \leq \|y\|_X$ $\forall y \in X$. *A не є $-$-коерцитивним*, оскільки $[A(y), y]_- = -\|y\|_X^2$ $\forall y \in X$.

Тепер покажемо, що A *не є λ-псевдомонотонним*. Розглянемо довільну ортонормовану систему векторів $\{y_n\}_{n\geq 1}$ в нескінченновимірному гільбертовому просторі $X = H_0^1(\Omega)$. Як відомо, $y_n \to \bar{0}$ слабко в X. Нехай $d_n = \triangle y_n \in A(y_n)$ $\forall n \geq 1$. Тоді $\langle d_n, y_n - \bar{0}\rangle = -\|y_n\|_X^2 = -1$ $\forall n \geq 1$. Звідси $\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - \bar{0}\rangle < 0$, але $\underline{\lim}_{m} \langle d_m, y_m - \bar{0}\rangle = -1 < 0 = [A(\bar{0}), \bar{0} - \bar{0}]_-$ для довільної підпослідовності $\{y_m, d_m\}_m \subset \{y_n, d_n\}_n$. Враховуючи те, що $-A(y) = A(y)$ $\forall y \in X$, маємо, що $-A$ теж *не є λ-псевдомонотонним*.

Наступний приклад стосується параметризованих операторних включень і ілюструє суттєву залежність властивості S_k від вибору топологій у просторі функціональних параметрів.

***Приклад* 2.** Нехай Ω — відкрита обмежена підмножина в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$ розмірності $n-1$. Нехай ξ_1, ξ_2 — задані функції з $L^\infty(\Omega)$ такі, що

$$0 < \beta \leq \xi_1(x) \leq \xi_2(x) \quad \text{майже скрізь в} \quad \Omega.$$

Покладемо

$$U = \left\{ \mathcal{U} = [u_{ij}(x)]_{1\leq i,j\leq n} \;\middle|\; \begin{array}{l} u_{ji} = u_{ij} \in [L^\infty(\Omega)], \quad i,j = 1,\ldots,n, \\ \xi_1(x) \leq u_{ij}(x) \leq \xi_2(x) \\ \qquad\qquad \text{майже скрізь в } \Omega, \quad i,j = 1,\ldots,n, \\ (\eta, \mathcal{U}(x)\eta)_{\mathbb{R}^n} \geq \alpha \|\eta\|_{\mathbb{R}^n}^2 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\},$$

де $\alpha > 0$. Вважатимемо, що U утворює порожню множину рівномірно обмежених та додатно означених симетричних квадратних матриць. Нехай також $X = H_0^1(\Omega)$, $Y = [L^1(\Omega)]^{n\times n}$. Тоді $X^* = H^{-1}(\Omega)$, $Y^* = [L^\infty(\Omega)]^{n\times n}$. Розглянемо оператор $A\colon X \times U \to X^*$, який визначається за правилом

$$A(y,\mathcal{U}) = -\mathrm{div}(\mathcal{U}(x)\nabla y) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_{i\,j}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right).$$

Спочатку покажемо, що властивість $\bar{S}_k$ буде порушуватися, якщо в якості базових топологій в X та Y вибрати відповідно топологію слабкої збіжності в $H_0^1(\Omega)$ та топологію $*$-слабкої збіжності в $[L^\infty(\Omega)]^{n\times n}$.

Дійсно, нехай $f \in H^{-1}(\Omega)$ — довільний фіксований розподіл, $\{\mathcal{U}_k\}_{k=1}^\infty$ — послідовність в U така, що $\mathcal{U}_k \to \mathcal{U}_0$ $*$-слабко в Y^*. Оскільки множина U є секвенційно $*$-слабкозамкненою, то $\mathcal{U}_0 \in U$. В якості послідовності $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ виберемо відповідні розв'язки операторного рівняння $A(y_k,\mathcal{U}_k) = f$. Оскільки оператор $A(\cdot,\mathcal{U}_k)\colon X \to X^*$ є коерцитивним, лінійним та рівномірно обмеженим, то $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ утворюють обмежену послідовність в X. Отже, можна вважати, що існує елемент $y_0 \in X$ такий, що $y_k \to y_0$ слабко в $X = H_0^1(\Omega)$.

За нерівністю Фрідріхса це означає, що $\nabla y_k \to \nabla y_0$ слабко в $[L^2(\Omega)]^n$, а отже, послідовність $\{(\mathcal{U}_k\nabla y_k)\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою в $[L^2(\Omega)]^n$. Нехай $\xi \in [L^2(\Omega)]^n$ є слабкою границею в $[L^2(\Omega)]^n$ цієї послідовності. Покладемо

$$d_k = A(y_k,\mathcal{U}_k) \in H^{-1}(\Omega)$$

і покажемо, що $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ є слабкокомпактною в $H^{-1}(\Omega)$. Дійсно, для довільного $\phi \in H_0^1(\Omega)$ маємо

$$\langle -\mathrm{div}(\mathcal{U}_k\nabla y_k), \phi\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (\mathcal{U}_k\nabla y_k, \nabla\phi)_{\mathbb{R}^n}\,dx \to \int_\Omega (\xi, \nabla\phi)_{\mathbb{R}^n}\,dx =$$

$$= \langle -\mathrm{div}\,\xi, \phi\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle d, \phi\rangle_{H_0^1(\Omega)}.$$

Отже, $d_k \to d$ слабко в $H^{-1}(\Omega)$.

Далі нам знадобиться наступний результат.

Лема 2 (про компенсовану компактність) [20, с. 142]. *Нехай* p_k, p_0, v_k, v_0 — *вектори з* $[L^2(\Omega)]^n$ *такі, що*

$$p_k \to p_0 \quad \textit{та} \quad v_k \to v_0 \quad \textit{слабко в} \quad [L^2(\Omega)]^n.$$

Якщо при цьому послідовності $\{\mathrm{div}\,p_k\}_{k=1}^\infty$ *та* $\{\mathrm{rot}\,v_k\}_{k=1}^\infty$ *є компактними в* $H^{-1}(\Omega)$, *то*

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega (p_k, v_k)_{\mathbb{R}^n}\,\phi\,dx = \int_\Omega (p_0, v_0)_{\mathbb{R}^n}\,\phi\,dx, \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

***Зауваження* 4.** Для довільної вектор-функції $v \in \left(L^2(\Omega)\right)^n$ елементи кососиметричної матриці $\mathrm{rot}\,v$ як елементи простору $H^{-1}(\Omega)$ визначаються таким чином:

$$\langle \mathrm{rot}\,v, \phi\rangle_{H^{-1}(\Omega)}^{i\,j} = -\int_\Omega \left(v_i\frac{\partial\phi}{\partial x_j} - v_j\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)dx \quad \forall\phi \in H_0^1(\Omega), \quad i,\,j = 1,\ldots,n.$$

Тепер покажемо, що $\lim\limits_{k\to\infty}\langle d_k, y_k - y_0\rangle_{H_0^1(\Omega)} = 0$. Оскільки простір $C_0^\infty(\Omega)$ є щільним в $H_0^1(\Omega)$, то для виконання даної тотожності досить встановити наступне:

$$\langle d_k, (y_k - y_0)\,\phi\rangle_{H_0^1(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Скористаємся перетвореннями

$$\langle d_k, (y_k - y_0)\,\phi\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega (\mathcal{U}_k \nabla y_k, \nabla y_k)_{\mathbb{R}^n}\,\phi\,dx -$$

$$- \int\limits_\Omega (\mathcal{U}_k \nabla y_k, \nabla y_0)_{\mathbb{R}^n}\,\phi\,dx + \int\limits_\Omega (\mathcal{U}_k \nabla y_k, \nabla \phi)_{\mathbb{R}^n}(y_k - y_0)\,dx =$$

$$= I_1^k - I_2^k + I_3^k.$$

Оскільки $\mathcal{U}_k \nabla y_k \to \xi$ слабко в $[L^2(\Omega)]^n$, $y_k \to y_0$ слабко в $H_0^1(\Omega)$, $y_k \to y_0$ сильно в $L^2(\Omega)$, то

$$I_2^k \to \int\limits_\Omega (\xi, \nabla y_0)_{\mathbb{R}^n}\,\phi\,dx = I_2,$$

$$I_3^k \to \int\limits_\Omega (\xi, \nabla \phi)_{\mathbb{R}^n}(y_0 - y_0) = 0 = I_3.$$

Покладемо $p_k = \mathcal{U}_k \nabla y_k$, $v_k = \nabla y_k$. Оскільки $\operatorname{rot} v_k = 0$, а $\operatorname{div} p_k = -f$, то за лемою про компенсовану компактність отримуємо

$$I_1^k \to \int\limits_\Omega (\xi, \nabla y_0)\,\phi\,dx = I_1.$$

Підсумовуючи отримані результати, знаходимо

$$\lim_{k\to\infty} \langle d_k, (y_k - y_0)\,\phi\rangle_{H_0^1(\Omega)} = I_1 - I_2 + I_3 = 0,$$

що і потрібно було встановити.

Таким чином, на вибраних вище послідовностях $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ і $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ виконуються всі передумови означення 2. Покажемо, що в цьому випадку $d \neq A(y_0, u_0)$, тобто $-\operatorname{div}(\mathcal{U}_0 \nabla y_0) \neq -\operatorname{div}(\xi)$. Для цього покладемо

$$\mathcal{U}_k(x) = \operatorname{diag}(u_{1k}(x), u_{2k}(x), \ldots, u_{nk}(x)),$$

$$u_{ik}(x) = v_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) u(k\,x_i,) \quad \forall i = 1, \ldots, n, \qquad (6)$$

де $v_i \in L^\infty(\Omega)$ $\forall i = 1, \ldots, n$, $u(\cdot)$ — довільна 1-періодична вимірна функція скалярного аргументу така, що $\max\{\alpha, \xi_1(x)\} \leq v_i(x) u(x_i) \leq \xi_2(x)$ майже скрізь в Ω при всіх $i = 1, 2, \ldots, n$. Оскільки $u(k\,x_i) \to \langle u\rangle$ $*$-слабко в $L^\infty(\Omega)$, де через $\langle u\rangle$ позначено середнє значення функції u на її періоді, то

$$\mathcal{U}_k \to \begin{bmatrix} v_1\langle u\rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2\langle u\rangle & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & v_n\langle u\rangle \end{bmatrix} \equiv \mathcal{U}_0 \ \ *\text{-слабко в} \ \ [L^\infty(\Omega)]^n.$$

Проте, як показано в [20, с. 24], вектор ξ допускає подання

$$\xi = \begin{bmatrix} v_1\langle u^{-1}\rangle^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_2\langle u^{-1}\rangle^{-1} & \cdots & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & v_n\langle u^{-1}\rangle^{-1} \end{bmatrix} \nabla y_0.$$

Отже, рівність $\mathcal{U}_0\nabla y_0 = \xi$ є хибною, оскільки в загальному випадку $\langle u\rangle \neq \langle u^{-1}\rangle^{-1}$. Таким чином, оператор A не задовольняє умову $\bar{S}_k$.

Проте досягти виконання цієї умови можна, якщо звузити клас допустимих значень функціонального параметра $\mathcal{U}$. А саме, розглянемо множину

$$V = \{\mathcal{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n] \in [L^\infty(\Omega)]^{n\times n} \colon \mathrm{div}\mathbf{u}_i = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n\},$$

де значення оператора div на векторі $\mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^n$ визначається як елемент простору $H^{-1}(\Omega)$ такий, що

$$\langle \mathrm{div}\,\mathbf{u}, \phi\rangle_{H_0^1(\Omega)} = -\int\limits_\Omega (\mathbf{u}, \nabla\phi)_{\mathbb{R}^n} dx \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Будемо говорити, що функціональний параметр $\mathcal{U}$ є допустимим, якщо $\mathcal{U} \in V \bigcap U$, де множину U означено вище. Множину всіх допустимих параметрів позначимо через U_{sol}.

Лема 3. *U_{sol} — секвенційно компактна множина в $*$-слабкій топології простору $[L^\infty(\Omega)]^{n\times n}$.*

Доведення. Нехай $\big\{\mathcal{U}_k = [\mathbf{u}_{1k}, \mathbf{u}_{2k}, \ldots, \mathbf{u}_{nk}]\big\}_{k=1}^\infty$ — довільна послідовність в U_{sol}. Оскільки $U_{\mathrm{sol}} \subset U$, а множина U є секвенційно $*$-слабкокомпактною, то можна вважати, що існує матриця $\mathcal{U}_0 \in U$ така, що

$$\int\limits_\Omega (\mathbf{u}_{i\,k}, \phi)_{\mathbb{R}^n} dx \to \int\limits_\Omega (\mathbf{u}_{i\,0}, \phi)_{\mathbb{R}^n} dx \quad \forall \phi \in [L^1(\Omega)]^n \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Виберемо в якості вектора ϕ такий, що $\phi = \nabla p$, де $p \in H_0^1(\Omega)$. Оскільки

$$\int\limits_\Omega (\mathbf{u}_{i\,k}, \nabla p)_{\mathbb{R}^n} dx = -\langle \mathrm{div}\,\mathbf{u}_{i\,k}, p\rangle_{H_0^1(\Omega)} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

то $\int_\Omega (\mathbf{u}_{i\,0}, \nabla p)_{\mathbb{R}^n}\, dx = -\langle \mathrm{div}\,\mathbf{u}_{i\,0}, p\rangle_{H_0^1(\Omega)} = 0$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$. Отже, $\mathcal{U}_0 = [\mathbf{u}_{1\,0}, \mathbf{u}_{2\,0}, \ldots, \mathbf{u}_{n\,0}] \in U_{\mathrm{sol}}$, що і потрібно було встановити.

Лему доведено.

Тепер покажемо, що оператор $A(y, u) = -\mathrm{div}\,(\mathcal{U}\nabla y)$, як відображення $A : H_0^1(\Omega) \times U_{\mathrm{sol}} \to H^{-1}(\Omega)$, задовольняє умову $\bar{S}_k$.

Для цього виберемо послідовності $\{\mathcal{U}_k\}_{k=1}^\infty \subset U_{\mathrm{sol}}$ та $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset X = H_0^1(\Omega)$ так, як це було зроблено вище.

Тоді в повній аналогії до попереднього можна показати, що

$$d_k = -\mathrm{div}\,(\mathcal{U}_k\nabla y) \to d = -\mathrm{div}\,(\xi) \quad \text{слабко в} \quad H^{-1}(\Omega)$$

і при цьому

$$\lim_{k\to\infty} \langle d_k, y_k - y_0\rangle_{H_0^1(\Omega)} = 0. \tag{7}$$

Покажемо, що має місце тотожність

$$\xi = \mathcal{U}_0 \nabla y_0. \tag{8}$$

Якщо це так, то з (7) отримуємо

$$\lim_{k\to\infty} \langle d_k, y_k\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \langle d_k, y_0\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle -\operatorname{div}\xi, y_0\rangle_{H_0^1(\Omega)} =$$

$$= \langle f, y_0\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle -\operatorname{div}(\mathcal{U}_0\nabla y_0), y_0\rangle_{H_0^1(\Omega)},$$

що означає $d = A(y_0, \mathcal{U}_0)$.

Тепер встановимо тотожність (8). Для цього використаємо лему про компенсовану компактність. Покладемо $p_k = \mathbf{u}_{i\,k}$, $p_0 = \mathbf{u}_{i\,0}$, $v_k = \nabla y_k$, $v_0 = \nabla y_0$. Оскільки $\operatorname{div} p_k = 0$ і $\operatorname{rot} v_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\nabla y_k \to \nabla y_0$ слабко в $[L^2(\Omega)]^n$ і $\mathcal{U}_k \to \mathcal{U}_0$ $*$-слабко в $[L^\infty(\Omega)]^{n\times n}$, а отже, слабко в $[L^2(\Omega)]^{n\times n}$, то

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega (\mathcal{U}_k \nabla y_k, \phi)_{\mathbb{R}^n}\, dx = \sum_{i=1}^n \lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega (\mathbf{u}_{i\,k}, \nabla y_k)_{\mathbb{R}^n} \phi_i\, dx =$$

$$= \{\text{за лемою про компенсовану компактність}\} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega (\mathbf{u}_{i\,0}, \nabla y_0)_{\mathbb{R}^n} \phi_i\, dx = \int\limits_\Omega (\mathcal{U}_0\nabla y_0, \phi)_{\mathbb{R}^n}\, dx \quad \forall \phi \in [C_0^\infty(\Omega)]^n.$$

Внаслідок того, що простір $C_0^\infty(\Omega)$ є щільним в $L^1(\Omega)$, $\mathcal{U}_k\nabla y_k \to \xi = \mathcal{U}_0 \nabla y_0$ $*$-слабко в $[L^\infty(\Omega)]^n$, що і потрібно було встановити.

Зауважимо, що вибір в якості класу допустимих значень функціональних параметрів множини соленоїдальних матриць $U_{\rm sol}$ не передбачає переходу до матриць, елементи яких належать простору $H^1(\Omega)$. Тобто в загальному випадку це більш широка множина, ніж

$$\big\{\mathcal{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n] \in [H^1(\Omega)]^{n\times n} \colon \operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n\big\} \cap U.$$

Більш того, оскільки $\operatorname{div} \mathbf{u} \in [L^2(\Omega)]^n$ для всіх $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^n$, то мають місце співвідношення

$$U_{\rm sol} \nsubseteq [H^1(\Omega)]^{n\times n} \cap U, \qquad U_{\rm sol} \cap \Big([H^1(\Omega)]^{n\times n} \cap U\Big) \neq \varnothing,$$

$$\Big\{[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n] \in [H^1(\Omega)]^{n\times n} \colon \operatorname{div} \mathbf{u}_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n\Big\} \cap U \subset U_{\rm sol} \subset U.$$

Особливим є також випадок, коли матриця $\mathcal{U}$ має діагональну форму

$$\mathcal{U}(x) = \operatorname{diag}\big(v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)\big). \tag{9}$$

Як було показано вище, для оператора $A\colon H_0^1(\Omega) \times U \to H^{-1}(\Omega)$, де

$$A(y, \mathcal{U}) = -\operatorname{div}(\mathcal{U}(x)\nabla y) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_i(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right),$$

властивість S_k може порушуватися. Проте ця властивість залишиться чинною, як тільки $\mathcal{U} \in U_{\text{sol}}$. З огляду на означення множини U_{sol} це означає, що в цьому випадку елементи v_i з (9) повинні задовольняти умови

$$v_i \in L^\infty(\Omega), \qquad \max\{\alpha, \xi_1(x)\} \leq v_i(x) \leq \xi_2(x) \quad \text{майже скрізь в} \quad \Omega,$$
$$v_i(x) = v_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Як видно, при такій структурі діагональної матриці виконання умови $\langle u \rangle = \langle u^{-1} \rangle^{-1}$ є тривільним (див. (6)), оскільки $u = 1$.

1. *Aubin J. P., Cellina A.* Differential inclusions. – Berlin: Springer, 1984.
2. *Aubin J. P., Frankovska H.* Set-valued analysis. – Boston: Birkhäuser, 1990.
3. *Barbu V., Precupanu N.* Convex analysis and optimization in Banach spaces. – New York: D. Reidet Publ. Comp., 1986.
4. *Згуровский М. З., Мельник В. С., Новиков А. Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. – Киев: Наук. думка, 2004. – 590 с.
5. *Ladas G. E., Lakshmikanthan V.* Differential equations in abstract spaces. – New York: Acad. Press, 1972. – 458 p.
6. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 216 с.
7. *Чикрий А. А.* Конфликтно управляемые процессы. – Киев: Наук. думка, 1992. – 381 с.
8. *Лионс Дж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
9. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
10. *Скрыпник И. В.* Методы исследования эллиптических краевых задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.
11. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Метод штрафа для вариационных неравенств с многозначными отображениями. I // Кибернетика и систем. анализ. – 2000. – № 4. – С. 57 – 69.
12. *Згуровский М. З., Мельник В. С.* Неравенство Ки Фаня и операторные включения в банаховых пространствах // Там же. – 2002. – № 2. – С. 70 – 85.
13. *Згуровский М. З., Касьянов П. О., Мельник В. С.* Дифференциально-операторные включения и вариационные неравенства в бесконечномерных пространствах. – Киев: Наук. думка, 2008. – 464 с.
14. *Мельник В. С.* Про критичні точки деяких класів багатозначних відображень // Кибернетика и систем. анализ. – 1997. – № 2. – С. 87 – 98.
15. *Мельник В. С.* Мультивариационные неравенства и операторные включения в банаховых пространствах с отображениями класса // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1513 – 1523.
16. *Мельник В. С.* Топологические методы в теории операторных включений в банаховых пространствах // Там же. – 2006. – **58**, № 2, 4.
17. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 324 с.
18. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* Метод Фаедо – Гальоркіна для диференціально-операторних включень в банахових просторах з відображеннями λ-псевдомонотонного типу // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 1. – С. 103 – 126.
19. *Kasyanov P. O., Mel'nik V. S., Yasinsky V. V.* Evolution inclusions and inequalities in Banach spaces with W_λ-pseudomonotone maps. – Kyiv: Naukova dumka, 2007. – 308 p.
20. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. Л.* Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматлит, 1993. – 464 с.

Одержано 15.01.08,
після доопрацювання — 04.03.08