УДК 519.21

А. Д. Колесник (Ин-т математики и информатики Академии наук Молдовы, Кишинев)

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПЛОТНОСТИ МНОГОМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ЭВОЛЮЦИИ С РЕДКИМИ ПУАССОНОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

In the Euclidean space $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, the symmetric random evolution $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_m(t))$ controlled by a homogeneous Poisson process with parameter $\lambda > 0$ is considered.

An asymptotic formula for the transition density $p(\mathbf{x}, t)$, $t > 0$, of the process $\mathbf{X}(t)$ for $\lambda \to 0$ is obtained. The behavior of $p(\mathbf{x}, t)$ near the boundary of the diffusion area in spaces of various dimensions is described.

Розглянуто симетричну випадкову еволюцію $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_m(t))$ в евклідовому просторі $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, керовану однорідним процесом Пуассона з параметром $\lambda > 0$.

Отримано асимптотичну формулу для перехідної щільності $p(\mathbf{x}, t)$, $t > 0$, процесу $\mathbf{X}(t)$ при $\lambda \to 0$. Описано поведінку $p(\mathbf{x}, t)$ біля межі дифузної області у просторах різних розмірностей.

1. Введение. Процессы случайной эволюции активно исследовались в последние десятилетия. Такой большой интерес к этому типу случайных процессов объясняется как их большой теоретической важностью, так и многочисленными практическими применениями в статистической физике, гидродинамике, биологии и других областях. Наиболее важный тип случайной эволюции представлен моделью движения частицы с конечной скоростью в некотором фазовом пространстве и управляемой некоторым случайным процессом.

В данной статье мы рассматриваем марковскую случайную эволюцию $\mathbf{X}(t)$ частицы, движущейся с постоянной конечной скоростью c в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, в случайном направлении, выбираемом по равномерному закону. Движение управляется однородным процессом Пуассона с параметром $\lambda > 0$, меняющим направление движения частицы в случайные пуассоновские моменты. Такой тип движения порождает изотропный процесс переноса, имеющий чрезвычайно важное значение в статистической физике (см., например, [1]).

При изучении этих процессов наиболее важными являются, несомненно, их точные распределения в тех (весьма немногочисленных) случаях, когда такие распределения могут быть получены в явном виде. Точное распределение симметричной марковской случайной эволюции на плоскости было получено разными методами в работах [2] (для случая единичной скорости $c = 1$), [3] (для евклидова расстояния от начала координат), [4, 5] (совместное распределение процесса $\mathbf{X}(t)$ с произвольной конечной скоростью распространения). Трехмерные марковские случайные эволюции изучались в работах [1] (получены довольно сложные аналитические выражения для совместных плотностей в терминах резольвенты некоторого интегрального оператора) и [6] (для случая единичной скорости $c = 1$ приведено выражение для плотности процесса в виде весьма сложного интеграла с переменными пределами, который, очевидно, не может быть выражен через элементарные функции). Наконец, точное распределение симметричной марковской случайной эволюции в четырехмерном пространстве было получено в работе [7], причем оно имеет простую аналитическую форму. Для более высоких размерностей возможность получения точных распределений вызывает серьезные сомнения.

Поэтому особый интерес представляют асимптотические формулы и предельные теоремы, которые приближенно описывают поведение процессов случайной эволюции, когда скорость движения c и интенсивность переключений λ имеют тот или иной характер стремления к пределу.

Наиболее известное предельное поведение симметричной марковской случайной эволюции $\mathbf{X}(t)$ определяется стандартным условием Каца

$$c \to \infty, \quad \lambda \to \infty, \quad \frac{c^2}{\lambda} \to \rho, \quad \rho > 0. \tag{1}$$

В частных дву- и четырехмерном случаях поведение $\mathbf{X}(t)$ при условии Каца (1) рассматривалось в работах [4] и [7] соответственно. Для произвольной размерности $m \geq 2$ предельное поведение $\mathbf{X}(t)$ было изучено в [8]. В этой работе было показано, что при условии (1) случайная эволюция $\mathbf{X}(t)$ слабо сходится к однородному m-мерному винеровскому процессу с нулевым сносом и коэффициентом диффузии $\sigma^2 = 2\rho/m$. При $\rho = 1$ это совпадает с аналогичным результатом в [9] (предложение 4.8) для изотропного процесса переноса на римановом многообразии.

Условие Каца (1) обеспечивает существование предела, который может быть назван термодинамическим пределом процесса $\mathbf{X}(t)$ (для обоснования такого названия см. [10]). Это условие характеризует эволюцию частицы в пуассоновской среде, насыщенной случайными препятствиями, столкновения с которыми вызывают изменение направления ее движения. В таком случае за единицу времени частица подвергается огромному и все возрастающему числу столкновений, и этот факт учитывается условием $\lambda \to \infty$. При этом свободный пробег частицы между столкновениями становится все короче и короче. Чтобы компенсировать такое уменьшение длины свободного пробега, скорость частицы также должна возрастать. Условие Каца (1) показывает, что скорость должна увеличиваться на порядок быстрее интенсивности столкновений. В таком случае, как отмечалось выше, термодинамическим пределом симметричной марковской случайной эволюции $\mathbf{X}(t)$ является однородный винеровский процесс с нулевым сносом и коэффициентом диффузии, зависящим от размерности пространства.

Однако представляет значительный интерес и противоположный (в определенном смысле) предельный случай $\lambda \to 0$, который описывает физический процесс переноса в редкой среде. Это приводит к необходимости изучения поведения случайной эволюции $\mathbf{X}(t)$ при малых значениях λ. Отметим, что речь идет не об обычном предельном переходе при $\lambda \to 0$ (в таком понимании задача становится бессмысленной, так как процесс вырождается), а об асимптотическом поведении случайной эволюции $\mathbf{X}(t)$ при малых значениях λ.

Предельное поведение случайных эволюций при различных условиях изучалось многими авторами (см., например, работы [11 – 13], а также библиографию в них). Большинство полученных результатов имеют вид абстрактных предельных теорем. Однако, насколько известно автору, для случайных эволюций в евклидовых пространствах произвольной размерности явные асимптотические формулы при $\lambda \to 0$ не получены до сих пор.

В настоящей статье мы получим асимптотическую формулу для переходной плотности процесса $\mathbf{X}(t)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ произвольной размерности $m \geq 2$ при $\lambda \to 0$. Заметим, что эта формула имеет явный вид, т. е. не содержит никаких неизвестных констант, которые, как правило, возникают при получении асимптотических формул. Вывод формулы основывается на вычислении точного обратного преобразования Фурье условной характеристической функции, соответствующей единственному изменению направления. Полученная формула дает первый член асимптотического разложения переходной плотности процесса по степеням λ. Она также позволяет дать исчерпывающее описание поведения переходной плотности вблизи границы диффузионной области.

2. Описание модели и структура распределения. Рассмотрим частицу, начинающую движение из начала координат $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ размерности $m \geq 2$ в момент времени $t = 0$. Частица движется с постоянной конечной скоростью c (отметим, что c понимается как постоянная норма скорости). Начальное направление есть случайный m-мерный вектор, равномерно распределенный (лебегова вероятностная мера) на единичной сфере

$$S_1^m = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + \ldots + x_m^2 = 1\right\}.$$

Частица меняет направление движения в случайные моменты, образующие однородный процесс Пуассона с параметром $\lambda > 0$. В эти пуассоновские моменты частица мгновенно выбирает новое направление, равномерно распределенное на S_1^m, независимо от ее предыдущего направления.

Обозначим через $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_m(t))$ положение частицы в произвольный момент времени $t > 0$. Пусть $N(t)$ — число пуассоновских событий, произошедших на интервале времени $(0,\ t)$ и $d\mathbf{x} = (dx_1, \ldots, dx_m)$ — инфинитезимальный элемент в пространстве $\mathbb{R}^m$.

В произвольный момент времени $t > 0$ частица с вероятностью 1 находится в m-мерном шаре радиуса ct

$$\mathbf{B}_{ct}^m = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + \ldots + x_m^2 \leq c^2 t^2\right\}.$$

Распределение

$$\Pr\left\{\mathbf{X}(t) \in d\mathbf{x}\right\} = \Pr\left\{X_1(t) \in dx_1, \ldots, X_m(t) \in dx_m\right\}, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{B}_{ct}^m, \qquad t \geq 0,$$

состоит из двух компонент. Сингулярная компонента соответствует случаю, когда на интервале времени $(0,\ t)$ не произошло ни одного пуассоновского события, и, следовательно, частица не изменила своего начального направления. Сингулярная компонента сконцентрирована на сфере радиуса ct

$$S_{ct}^m = \partial \mathbf{B}_{ct}^m = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + \ldots + x_m^2 = c^2 t^2\right\}.$$

Понятно, что вероятность того, что в данный момент времени t частица находится на сфере S_{ct}^m, есть вероятность того, что до момента t не произошло ни одного пуассоновского события, и равна

$$\Pr\left\{\mathbf{X}(t) \in S_{ct}^m\right\} = e^{-\lambda t}.$$

Если же на интервале времени $(0,\ t)$ произошло хотя бы одно пуассоновское событие и, следовательно, частица хотя бы раз изменила направление своего движения, то она будет находиться в момент t строго внутри шара $\mathbf{B}_{ct}^m$, и вероятность этого события равна

$$\Pr\left\{\mathbf{X}(t) \in \operatorname{int} \mathbf{B}_{ct}^m\right\} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Часть распределения, соответствующая этому случаю, сконцентрирована на внутренности шара $\mathbf{B}_{ct}^m$

$$\operatorname{int} \mathbf{B}_{ct}^m = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1^2 + \ldots + x_m^2 < c^2 t^2\right\}$$

и образует его абсолютно непрерывную компоненту. Следовательно, существует плотность

$$p(\mathbf{x}, t) = p(x_1, \ldots, x_m, t), \qquad \mathbf{x} \in \operatorname{int} \mathbf{B}_{ct}^m, \quad t > 0,$$

абсолютно непрерывной компоненты распределения $\Pr\{\mathbf{X}(t) \in d\mathbf{x}\}$, являющаяся основной целью нашего исследования. Существование плотности $p(\mathbf{x}, t)$ вытекает из того факта, что она может быть представлена как пуассоновская сумма сверток.

3. Асимптотическая формула. По формуле полной вероятности мы можем представить плотность абсолютно непрерывной компоненты $p(\mathbf{x}, t)$ распределения процесса $\mathbf{X}(t)$ в виде

$$p(\mathbf{x}, t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} p_n(\mathbf{x}, t), \tag{2}$$

где функции $p_n(\mathbf{x}, t)$, $n \geq 1$, являются условными плотностями условных распределений $\Pr\{\mathbf{X}(t) \in d\mathbf{x} \,|\, N(t) = n\}$, соответствующими n изменениям направления (или n скачкам пуассоновского процесса).

Поскольку условные плотности $p_n(\mathbf{x}, t)$, $n \geq 1$, не зависят от λ, из представления (2) получаем простую асимптотическую формулу

$$p(\mathbf{x}, t) = \lambda t e^{-\lambda t} p_1(\mathbf{x}, t) + o(\lambda),$$

или

$$p(\mathbf{x}, t) \sim \lambda t e^{-\lambda t} p_1(\mathbf{x}, t), \qquad \lambda \to 0. \tag{3}$$

Это означает, что при малых значениях λ плотность $p(\mathbf{x}, t)$ ведет себя приблизительно как функция в правой части (3), причем эта аппроксимация тем точнее, чем меньше значение λ. Очевидно, решающим моментом здесь является нахождение явного вида условной плотности $p_1(\mathbf{x}, t)$, соответствующей единственному изменению направления.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Асимптотическая теорема. *Для любого* $t > 0$ *и произвольной размерности* $m \geq 2$ *имеет место асимптотическая формула*

$$p(\mathbf{x}, t) \sim \lambda t e^{-\lambda t} \frac{2^{2\nu-1}\Gamma(\nu+1)}{\pi^{\nu+1}(ct)^{2\nu+2}} F\left(\nu + \frac{1}{2}, -\nu+1; \nu+1; \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2}\right), \qquad \lambda \to 0,$$
$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \operatorname{int} \mathbf{B}_{ct}^m, \qquad \|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_m^2, \tag{4}$$

где

$$\nu = \frac{m-2}{2}, \qquad m \geq 2, \tag{5}$$

и функция

$$F(\xi, \eta; \zeta; z) = {}_2F_1(\xi, \eta; \zeta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi)_k (\eta)_k}{(\zeta)_k} \frac{z^k}{k!} \tag{6}$$

является гипергеометрической функцией Гаусса,

$$(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$$

— символ Похгаммера.

Доказательство. Сравнивая (4) и (3), видим, что для доказательства теоремы нужно показать, что для любого $t > 0$ имеет место равенство

$$p_1(\mathbf{x}, t) = \frac{2^{2\nu-1}\Gamma(\nu+1)}{\pi^{\nu+1}(ct)^{2\nu+2}} F\left(\nu + \frac{1}{2}, -\nu+1; \nu+1; \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2}\right). \tag{7}$$

Вначале заметим, что при размерностях $m = 2$, $m = 3$ и $m = 4$ (или, в силу (5), при значениях параметра $\nu = 0$, $\nu = 1/2$ и $\nu = 1$ соответственно) из формулы (7) можно получить известные выражения для условной плотности $p_1(\mathbf{x}, t)$ (см. замечание 1 ниже). Поэтому нам нужно доказать формулу (7) лишь при размерностях $m \geq 5$ (т. е. при значениях параметра $\nu \geq 3/2$). Итак, полагаем, что $\nu \geq 3/2$.

Известно (см. [14], формула (2.4)), что условная характеристическая функция (преобразование Фурье) $H_1(\boldsymbol{\alpha}, t)$ условной плотности $p_1(\mathbf{x}, t)$ для произвольной размерности $m \geq 2$ имеет вид

$$H_1(\boldsymbol{\alpha}, t) = \frac{[2^\nu \Gamma(\nu+1)]^2}{t} \int_0^t \frac{J_\nu(c\tau\|\boldsymbol{\alpha}\|)}{(c\tau\|\boldsymbol{\alpha}\|)^\nu} \frac{J_\nu(c(t-\tau)\|\boldsymbol{\alpha}\|)}{(c(t-\tau)\|\boldsymbol{\alpha}\|)^\nu} d\tau =$$

$$= \frac{[2^\nu \Gamma(\nu+1)]^2}{(ct)^{2\nu}} \int_0^1 \frac{J_\nu(ct\|\boldsymbol{\alpha}\|\xi)}{(\|\boldsymbol{\alpha}\|\xi)^\nu} \frac{J_\nu(ct\|\boldsymbol{\alpha}\|(1-\xi))}{(\|\boldsymbol{\alpha}\|(1-\xi))^\nu} d\xi, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ — вещественный m-мерный вектор параметров обращения, $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_m^2}$, $J_\nu(x)$ — функция Бесселя порядка ν вещественного аргумента и ν дается формулой (5).

Стандартный подход заключается в вычислении условной характеристической функции $H_1(\boldsymbol{\alpha}, t)$ и ее последующем обращении. Однако трудность состоит в том, что интеграл в (8), вообще говоря, не может быть вычислен в явном виде для произвольной размерности. Мы преодолеем эту трудность, вычислив обратное преобразование Фурье функции $H_1(\boldsymbol{\alpha}, t)$ без знания ее явного вида.

Итак, перейдем к вычислению обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1}$ функции $H_1(\boldsymbol{\alpha}, t)$, заданной равенством (8). По формуле обращения Ганкеля (см., например, [15, с. 359], формула (43)) имеем

$$p_1(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1}[H_1(\boldsymbol{\alpha}, t)] = \frac{\|\mathbf{x}\|^{-\nu}}{(2\pi)^{\nu+1}} \frac{[2^\nu \Gamma(\nu+1)]^2}{(ct)^{2\nu}} \times$$

$$\times \int_0^\infty J_\nu(\|\mathbf{x}\|r) r^{\nu+1} \left\{ \int_0^1 \frac{J_\nu(ctr\xi)}{(r\xi)^\nu} \frac{J_\nu(ctr(1-\xi))}{(r(1-\xi))^\nu} d\xi \right\} dr =$$

$$= \frac{\|\mathbf{x}\|^{-\nu}}{(2\pi)^{\nu+1}} \frac{[2^\nu \Gamma(\nu+1)]^2}{(ct)^{2\nu}} \int_0^\infty r^{1-\nu} J_\nu(\|\mathbf{x}\|r) \left\{ \int_0^1 \frac{J_\nu(ctr\xi)}{\xi^\nu} \frac{J_\nu(ctr(1-\xi))}{(1-\xi)^\nu} d\xi \right\} dr. \tag{9}$$

Покажем, что интеграл по r в правой части (9) сходится равномерно и абсолютно для любого ξ из интервала $[0, 1]$. Имеем

$$\left| \int_0^\infty r^{1-\nu} J_\nu(\|\mathbf{x}\|r) \left\{ \int_0^1 \frac{J_\nu(ctr\xi)}{\xi^\nu} \frac{J_\nu(ctr(1-\xi))}{(1-\xi)^\nu} d\xi \right\} dr \right| \leq$$

$$\leq (ct)^{2\nu} \int_0^\infty \int_0^1 r^{\nu+1} |J_\nu(\|\mathbf{x}\|r)| \left| \frac{J_\nu(ctr\xi)}{(ctr\xi)^\nu} \right| \left| \frac{J_\nu(ctr(1-\xi))}{(ctr(1-\xi))^\nu} \right| d\xi\, dr. \tag{10}$$

Таким образом, нам нужно лишь доказать сходимость интеграла по r в правой части (10). Из неравенства (ограниченность функции Бесселя)

$$\left| \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right| \leq \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \qquad \nu \geq 0,$$

следует, что интеграл по ξ в правой части (10) есть непрерывная по r функция и, значит, подынтегральная функция в правой части неравенства (10) непрерывна по переменной r. Следовательно, достаточно показать, что при $r \to \infty$ она стремится к нулю достаточно быстро. Используя известное асимптотическое разложение функции Бесселя (см., например, [15, с. 352], формула (23), или [16], формула 8.451(1))

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)x^{-1/2} + O(x^{-3/2}), \qquad x \to \infty,$$

видим (оценивая косинус единицей), что

$$|J_\nu(x)| \le g_1(x) \sim x^{-1/2} + O(x^{-3/2}), \qquad x \to \infty.$$

Иными словами, модуль функции Бесселя мажорируется функцией $g_1(x)$, которая при $x \to \infty$ стремится к нулю со скоростью $x^{-1/2}$. Отсюда также следует, что

$$\left|\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right| \le g_2(x) \sim x^{-(\nu+1/2)} + O(x^{-(\nu+3/2)}), \qquad x \to \infty.$$

Таким образом, подынтегральная функция в правой части (10) мажорируется некоторой функцией, стремящейся к нулю при $r \to \infty$ со скоростью

$$r^{\nu+1}r^{-1/2}r^{-(\nu+1/2)}r^{-(\nu+1/2)} = r^{-(\nu+1/2)}.$$

Поскольку, как мы отмечали выше, $\nu \ge 3/2$, отсюда следует, что при $r \to \infty$ эта мажорирующая функция стремится к нулю со скоростью, не меньшей, чем r^{-2}, и, следовательно, она интегрируема по r.

Итак, мы показали, что подынтегральная функция в (9) при любом ξ из интервала $[0, 1]$ мажорируется некоторой функцией, интегрируемой по r на $[0, \infty)$. Следовательно, интеграл по r в правой части (9) сходится равномерно и абсолютно для любого ξ из интервала $[0, 1]$, что и требовалось доказать. Заметим, что попутно мы доказали и непрерывность условной плотности $p_1(\mathbf{x}, t)$ для любой размерности $m \ge 5$. Мы еще вернемся к вопросу о непрерывности $p_1(\mathbf{x}, t)$ в замечании 2 ниже.

В силу только что доказанной равномерной сходимости интеграла, мы можем поменять порядок интегрирования в (9) и переписать это выражение в виде

$$p_1(\mathbf{x}, t) = \frac{[2^\nu\Gamma(\nu+1)]^2}{(2\pi)^{\nu+1}\|\mathbf{x}\|^\nu (ct)^{2\nu}} \times$$

$$\times \int_0^1 d\xi \left\{\frac{1}{\xi^\nu(1-\xi)^\nu}\int_0^\infty r^{1-\nu}J_\nu(\|\mathbf{x}\|r)J_\nu(ct\xi r)J_\nu(ct(1-\xi)r)\,dr\right\}. \tag{11}$$

Рассмотрим отдельно внутренний интеграл в (11):

$$K := \int_0^\infty r^{1-\nu}J_\nu(\|\mathbf{x}\|r)J_\nu(ct\xi r)J_\nu(ct(1-\xi)r)\,dr.$$

По формуле 6.578(9) из [16] имеем

$$K = \frac{2^{\nu-1}\Delta^{2\nu-1}}{(ct\xi\, ct(1-\xi)\|\mathbf{x}\|)^\nu\,\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)}, \tag{12}$$

где Δ — площадь треугольника со сторонами $a_1 = \|\mathbf{x}\|$, $a_2 = ct\xi$ и $a_3 = ct(1-\xi)$. Для существования треугольника с такими сторонами необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система неравенств

$$\|\mathbf{x}\| + ct\xi > ct(1-\xi), \qquad \|\mathbf{x}\| + ct(1-\xi) > ct\xi, \qquad ct\xi + ct(1-\xi) > \|\mathbf{x}\|.$$

Решение этой системы дается неравенствами

$$\frac{ct - \|\mathbf{x}\|}{2ct} < \xi < \frac{ct + \|\mathbf{x}\|}{2ct}, \qquad \|\mathbf{x}\| < ct. \tag{13}$$

Для вычисления площади треугольника Δ воспользуемся формулой Герона элементарной геометрии. Полупериметр этого треугольника равен

$$l = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3) = \frac{\|\mathbf{x}\| + ct\xi + ct(1-\xi)}{2} = \frac{ct + \|\mathbf{x}\|}{2},$$

и, следовательно,

$$l - a_1 = \frac{ct + \|\mathbf{x}\|}{2} - \|\mathbf{x}\| = \frac{ct - \|\mathbf{x}\|}{2},$$

$$l - a_2 = \frac{ct + \|\mathbf{x}\|}{2} - ct\xi = \frac{ct(1-2\xi) + \|\mathbf{x}\|}{2},$$

$$l - a_3 = \frac{ct + \|\mathbf{x}\|}{2} - ct(1-\xi) = \frac{ct(2\xi-1) + \|\mathbf{x}\|}{2}.$$

Тогда по формуле Герона имеем

$$\Delta = \sqrt{l(l-a_1)(l-a_2)(l-a_3)} =$$

$$= \sqrt{\frac{ct + \|\mathbf{x}\|}{2}\,\frac{ct - \|\mathbf{x}\|}{2}\,\frac{ct(1-2\xi) + \|\mathbf{x}\|}{2}\,\frac{ct(2\xi-1) + \|\mathbf{x}\|}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{4}\,\frac{\big(ct(1-2\xi) + \|\mathbf{x}\|\big)\big(ct(2\xi-1) + \|\mathbf{x}\|\big)}{4}} =$$

$$= \frac{ct\sqrt{c^2t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}}{2}\sqrt{-\frac{c^2t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{4c^2t^2} + \xi - \xi^2}. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (12), находим

$$K = \frac{2^{\nu-1}}{(ct)^{2\nu}\xi^{\nu}(1-\xi)^{\nu}\|\mathbf{x}\|^{\nu}\Gamma(\nu+1/2)\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \left[\frac{ct}{2}\Big(c^2t^2 - \|\mathbf{x}\|^2\Big)^{1/2}\left(-\frac{c^2t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{4c^2t^2} + \xi - \xi^2\right)^{1/2}\right]^{2\nu-1} =$$

$$= \frac{\Big(c^2t^2 - \|\mathbf{x}\|^2\Big)^{\nu-1/2}}{\sqrt{\pi}(ct)\xi^{\nu}(1-\xi)^{\nu}\Gamma(\nu+1/2)2^{\nu}}\left(-\frac{c^2t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{4c^2t^2} + \xi - \xi^2\right)^{\nu-1/2}. \tag{15}$$

Подставляя теперь (15) в (11) и принимая во внимание (13), получаем

$$p_1(\mathbf{x},t) = \frac{[\Gamma(\nu+1)]^2\Big(c^2t^2 - \|\mathbf{x}\|^2\Big)^{\nu-1/2}}{2\pi^{\nu+3/2}(ct)^{2\nu+1}\|\mathbf{x}\|^{2\nu}\Gamma(\nu+1/2)}\int\limits_{\frac{ct-\|\mathbf{x}\|}{2ct}}^{\frac{ct+\|\mathbf{x}\|}{2ct}}\frac{\left(-\dfrac{c^2t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}{4c^2t^2} + \xi - \xi^2\right)^{\nu-1/2}}{\xi^{2\nu}(1-\xi)^{2\nu}}d\xi. \tag{16}$$

Рассмотрим отдельно интеграл в (16):

$$I := \int\limits_{\frac{ct-\|\mathbf{x}\|}{2ct}}^{\frac{ct+\|\mathbf{x}\|}{2ct}} \frac{\left(-\dfrac{c^2t^2-\|\mathbf{x}\|^2}{4c^2t^2}+\xi-\xi^2\right)^{\nu-1/2}}{\xi^{2\nu}(1-\xi)^{2\nu}}\,d\xi.$$

Введя обозначения

$$a = \frac{ct-\|\mathbf{x}\|}{2ct}, \qquad b = \frac{ct+\|\mathbf{x}\|}{2ct}, \tag{17}$$

можно записать этот интеграл в виде

$$I = \int\limits_a^b \frac{(\xi-a)^{\nu-1/2}(b-\xi)^{\nu-1/2}}{\xi^{2\nu}(1-\xi)^{2\nu}}\,d\xi. \tag{18}$$

Заменой переменной интегрирования $z = (\xi-a)/(b-a)$ интеграл (18) сводится к интегралу вида

$$I = \left(\frac{b-a}{a(1-a)}\right)^{2\nu} \int\limits_0^1 \frac{z^{\nu-1/2}(1-z)^{\nu-1/2}}{\left(1+\dfrac{b-a}{a}z\right)^{2\nu}\left(1-\dfrac{b-a}{1-a}z\right)^{2\nu}}\,dz. \tag{19}$$

Из (17) следует, что $a+b = 1$ и, значит, $a = 1-b$. Тогда

$$\frac{b-a}{a} = -\frac{2b-1}{b-1}, \qquad \frac{b-a}{1-a} = \frac{2b-1}{b}, \qquad \frac{b-a}{a(1-a)} = -\frac{2b-1}{b(b-1)}.$$

Подставляя это в (19), получаем

$$I = \left(\frac{2b-1}{b(b-1)}\right)^{2\nu} \int\limits_0^1 \frac{z^{\nu-1/2}(1-z)^{\nu-1/2}}{\left(1-\dfrac{2b-1}{b-1}z\right)^{2\nu}\left(1-\dfrac{2b-1}{b}z\right)^{2\nu}}\,dz. \tag{20}$$

Знаменатель подынтегральной функции в (20) может быть представлен в виде

$$\left(1-\frac{2b-1}{b-1}z\right)\left(1-\frac{2b-1}{b}z\right) = 1 - \frac{(2b-1)^2}{b(b-1)}z(1-z).$$

Тогда (20) преобразуется к виду

$$I = \left(\frac{2b-1}{b(b-1)}\right)^{2\nu} \int\limits_0^1 \frac{(z(1-z))^{\nu-1/2}}{\left(1-\dfrac{(2b-1)^2}{b(b-1)}z(1-z)\right)^{2\nu}}\,dz =$$

$$= 2\left(\frac{2b-1}{b(b-1)}\right)^{2\nu} \int\limits_0^{1/2} \frac{(z(1-z))^{\nu-1/2}}{\left(1-\dfrac{(2b-1)^2}{b(b-1)}z(1-z)\right)^{2\nu}}\,dz, \tag{21}$$

где и использован тот факт, что на интервале $[0, 1]$ функция $z(1-z)$ (а значит, и сама подынтегральная функция) симметрична относительно прямой $z = 1/2$.

Выполняя теперь замену $u = 4z(1-z)$ в интеграле в правой части (21), после элементарных вычислений имеем

$$I = 2^{-2\nu}\left(\frac{2b-1}{b(b-1)}\right)^{2\nu}\left(\frac{(2b-1)^2}{4b(1-b)}\right)^{-2\nu}\int_0^1 u^{\nu-1/2}(1-u)^{-1/2}\left(\frac{4b(1-b)}{(2b-1)^2}+u\right)^{-2\nu}du.$$

Применяя формулу 3.197(8) из [16] к этому интегралу, получаем

$$I = 2^{-2\nu}\left(\frac{2b-1}{b(b-1)}\right)^{2\nu}\left(\frac{4b(1-b)}{(2b-1)^2}\right)^{2\nu}\left(\frac{4b(1-b)}{(2b-1)^2}\right)^{-2\nu}\times$$

$$\times B\left(\frac{1}{2},\ \nu+\frac{1}{2}\right)F\left(2\nu,\ \nu+\frac{1}{2};\ \nu+1;\ -\frac{(2b-1)^2}{4b(1-b)}\right) =$$

$$= 2^{-2\nu}\left(\frac{2b-1}{b(b-1)}\right)^{2\nu}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)}F\left(2\nu,\ \nu+\frac{1}{2};\ \nu+1;\ -\frac{(2b-1)^2}{4b(1-b)}\right). \qquad (22)$$

Из (17) легко находим

$$\frac{2b-1}{b(b-1)} = -\frac{4ct\|\mathbf{x}\|}{c^2t^2-\|\mathbf{x}\|^2}, \qquad \frac{(2b-1)^2}{4b(1-b)} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2-\|\mathbf{x}\|^2}.$$

Подставляя эти выражения в (22) и возвращаясь к (16), имеем

$$p_1(\mathbf{x},t) = \frac{[\Gamma(\nu+1)]^2\left(c^2t^2-\|\mathbf{x}\|^2\right)^{\nu-1/2}}{2\pi^{\nu+3/2}(ct)^{2\nu+1}\|\mathbf{x}\|^{2\nu}\Gamma(\nu+1/2)}2^{-2\nu}\left(\frac{4ct\|\mathbf{x}\|}{c^2t^2-\|\mathbf{x}\|^2}\right)^{2\nu}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)}F\left(2\nu,\ \nu+\frac{1}{2};\ \nu+1;\ -\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2-\|\mathbf{x}\|^2}\right) =$$

$$= \frac{2^{2\nu-1}\Gamma(\nu+1)}{\pi^{\nu+1}ct\left(c^2t^2-\|\mathbf{x}\|^2\right)^{\nu+1/2}}F\left(2\nu,\ \nu+\frac{1}{2};\ \nu+1;\ -\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2-\|\mathbf{x}\|^2}\right). \qquad (23)$$

Выражение в правой части этого равенства может быть несколько упрощено. Применяя формулу 9.131 (1) из [16] к гипергеометрической функции в (23), получаем

$$p_1(\mathbf{x},t) = \frac{2^{2\nu-1}\Gamma(\nu+1)}{\pi^{\nu+1}ct\left(c^2t^2-\|\mathbf{x}\|^2\right)^{\nu+1/2}}\left(\frac{c^2t^2}{c^2t^2-\|\mathbf{x}\|^2}\right)^{-(\nu+1/2)}F\left(\nu+\frac{1}{2},\ -\nu+1;\ \nu+1;\ \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2}\right) =$$

$$= \frac{2^{2\nu-1}\Gamma(\nu+1)}{\pi^{\nu+1}(ct)^{2\nu+2}}F\left(\nu+\frac{1}{2},\ -\nu+1;\ \nu+1;\ \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2}\right),$$

что и доказывает (7).

Теорема доказана.

При доказательстве теоремы мы получили очень важную формулу (7), дающую явный вид условной плотности $p_1(\mathbf{x},t)$, которая соответствует единственному изменению направления, в евклидовом пространстве произвольной размерности $m \geq 5$. В следующих замечаниях мы убедимся в справедливости этой формулы и для пространств более низких размерностей, а также с ее помощью дадим описание поведения переходной плотности $p(\mathbf{x},t)$ абсолютно непрерывной компоненты распределения процесса $\mathbf{X}(t)$ вблизи границы диффузионной области.

***Замечание* 1.** Мы доказали формулу (7) для произвольных размерностей $m \geq 5$. Но, как легко убедиться, эта формула также справедлива и для размерностей $m = 2$, $m = 3$ и $m = 4$. Действительно, в двумерном случае $m = 2$

и в силу (5) $\nu = 0$. Тогда из формулы (7) имеем

$$p_1(\mathbf{x}, t) = \frac{2^{-1}\Gamma(1)}{\pi(ct)^2} F\left(\frac{1}{2}, 1; 1; \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2}\right) = \frac{1}{2\pi(ct)^2}\left(1 - \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2}\right)^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(ct)^2}\left(\frac{c^2t^2}{c^2t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\pi ct\sqrt{c^2t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}}, \tag{24}$$

где на втором шаге мы воспользовались формулой 9.121 (1) из [16]. Плотность (24) в точности совпадает с плотностью, полученной в [4] (формула (19)).

В трехмерном пространстве $m = 3$ и, следовательно, $\nu = 1/2$. Тогда из формулы (7) получаем

$$p_1(\mathbf{x}, t) = \frac{\Gamma(3/2)}{\pi^{3/2}(ct)^3} F\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}/2}{\pi^{3/2}(ct)^3} F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi(ct)^3}\frac{1}{2\|\mathbf{x}\|/ct}\ln\left(\frac{1+\|\mathbf{x}\|/ct}{1-\|\mathbf{x}\|/ct}\right) = \frac{1}{4\pi(ct)^2\|\mathbf{x}\|}\ln\left(\frac{ct+\|\mathbf{x}\|}{ct-\|\mathbf{x}\|}\right), \tag{25}$$

где на третьем шаге мы воспользовались формулой 9.121 (7) из [16]. Плотность (25) в точности совпадает с плотностью, полученной в [17] (формула (5)).

Наконец, в четырехмерном случае $m = 4$ и, следовательно, $\nu = 1$. При этом, очевидно, в гипергеометрической функции второй коэффициент равен нулю и, стало быть, сама функция тождественно равна 1. Тогда из формулы (7) имеем

$$p_1(\mathbf{x}, t) = \frac{2\,\Gamma(2)}{\pi^2(ct)^4} F\left(\frac{3}{2}, 0; 2; \frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2}\right) = \frac{2}{\pi^2(ct)^4}. \tag{26}$$

Плотность (26) в точности совпадает с плотностью, полученной в [7] (замечание 1). Следует отметить, что (26) есть не что иное, как плотность равномерного распределения в четырехмерном шаре с центром в начале координат радиуса ct.

***Замечание* 2.** При изучении случайных движений с конечной скоростью в пространствах низких размерностей было замечено весьма интересное явление, касающееся поведения переходной плотности процесса вблизи границы диффузионной области. Как оказалось, непрерывность переходной плотности $p(\mathbf{x}, t)$ полностью определяется непрерывностью условной плотности $p_1(\mathbf{x}, t)$. В то же время в четырехмерном случае условная плотность $p_1(\mathbf{x}, t)$, определяемая формулой (26), непрерывна на границе диффузионной области, в дву- и трехмерном случаях эта плотность имеет бесконечный разрыв на границе (см. формулы (24) и (25) соответственно). Причина этого явления была неясна. Возник естественный вопрос: в каких размерностях функция $p_1(\mathbf{x}, t)$ (а значит, и вся плотность $p(\mathbf{x}, t)$) непрерывна на границе диффузионной области (т. е. при $\|\mathbf{x}\|^2 = c^2t^2$) и в каких размерностях она разрывна?

Формула (7) позволяет дать исчерпывающий ответ на этот вопрос. Из вида формулы (7) можно заключить, что причина такого различия в поведении переходной плотности в пространствах разных размерностей кроется в специфических свойствах гипергеометрической функции $F(\xi, \eta; \zeta; z)$, а точнее, в значениях параметров гипергеометрического ряда, определяющего гипергеометрическую функцию в формуле (7). Известно (см., например, [16], п. 9.102), что область сходимости гипергеометрического ряда (6) зависит от параметра $\omega = \xi +$

$+\eta-\zeta$. Для гипергеометрической функции в формуле (7) этот параметр, очевидно, равен

$$\omega = \left(\nu+\frac{1}{2}\right) + (-\nu+1) - (\nu+1) = -\nu + \frac{1}{2}.$$

Отсюда видно, что неравенство $\operatorname{Re}\omega = \omega \geq 0$ выполняется только для двух значений ν, а именно, для $\nu = 0$ (двумерный случай $m = 2$) и для $\nu = 1/2$ (трехмерный случай $m = 3$). В обоих случаях гипергеометрический ряд сходится абсолютно в открытом шаре $\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2} < 1$ (или $\|\mathbf{x}\|^2 < c^2t^2$) и расходится на границе $\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2} = 1$ (или $\|\mathbf{x}\|^2 = c^2t^2$) этого шара (см., например, [16], п. 9.102). Для всех остальных размерностей $m \geq 4$ параметр $\omega < 0$ и, следовательно, гипергеометрический ряд, определяющий гипергеометрическую функцию в (7), сходится абсолютно во всем шаре $\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{c^2t^2} \leq 1$ (или $\|\mathbf{x}\|^2 \leq c^2t^2$), включая и границу. Это позволяет утверждать, что дву- и трехмерные случайные эволюции являются единственными, плотность распределения которых имеет бесконечный разрыв на границе диффузионной области. Во всех остальных размерностях $m \geq 4$ переходная плотность процесса непрерывна на границе.

1. *Толубинский Е. В.* Теория процессов переноса. – Киев: Наук. думка, 1969. – 259 с.
2. *Stadje W.* The exact probability distribution of a two-dimensional random walk // J. Statist. Phys. – 1987. – **46**. – P. 207 – 216.
3. *Masoliver J., Porrá J. M., Weiss G. H.* Some two and three-dimensional persistent random walks // Physica A. – 1993. – **193**. – P. 469 – 482.
4. *Kolesnik A. D., Orsingher E.* A planar random motion with an infinite number of directions controlled by the damped wave equation // J. Appl. Probab. – 2005. – **42**. – P. 1168 – 1182.
5. *Kolesnik A. D.* A note on planar random motion at finite speed // Ibid. – 2007. – **44**. – P. 838 – 842.
6. *Stadje W.* Exact probability distributions for non-correlated random walk models // J. Statist. Phys. – 1989. – **56**. – P. 415 – 435.
7. *Kolesnik A. D.* A four-dimensional random motion at finite speed // J. Appl. Probab. – 2006. – **43**. – P. 1107 – 1118.
8. *Kolesnik A. D.* A limit theorem for symmetric Markovian random evolution in $\mathbb{R}^m$ // Theory Stochast. Process. – 2008. – **14**, № 1. – P. 69 – 75.
9. *Pinsky M.* Isotropic transport process on a Riemannian manifold // Trans. Amer. Math. Soc. – 1976. – **218**. – P. 353 – 360.
10. *Турбин А. Ф.* Одномерные процессы броуновского движения — альтернатива модели А. Эйнштейна – Н. Винера – П. Леви // Фрактальний аналіз та суміжні питання: Зб. наук. пр. – 1998. – **2**. – С. 47 – 60.
11. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Полумарковские случайные эволюции. – Киев: Наук. думка, 1992. – 256 с.
12. *Papanicolaou G.* Asymptotic analysis of transport processes // Bull. Amer. Math. Soc. – 1975. – **81**. – P. 330 – 392.
13. *Pinsky M.* Lectures on random evolution. – River Edge, NJ: World Sci., 1991.
14. *Kolesnik A. D.* Random motions at finite speed in higher dimensions // J. Statist. Phys. – 2008. – **131**. – P. 1039 – 1065.
15. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
16. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
17. *Kolesnik A. D.* Discontinuous term of the distribution for Markovian random evolution in $\mathbb{R}^3$ // Bull. Acad. Sci. Moldova. Ser. Math. – 2006. – **2(51)**. – P. 62 – 68.

Получено 11.03.08