УДК 517.5

В. А. Кофанов, В. Е. Миропольский (Днепропетр. нац. ун-т)

О ТОЧНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА, УЧИТЫВАЮЩИХ ЧИСЛО ПЕРЕМЕН ЗНАКА ПРОИЗВОДНЫХ

New sharp inequalities of the Kolmogorov type are established, in particular, the following sharp inequality for 2π-periodic functions $x \in L^r_\infty(T)$:

$$\left\| x^{(k)} \right\|_1 \le \left(\frac{\nu(x')}{2} \right)^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\alpha} \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_1}{\| \varphi_r \|_p^\alpha} \| x \|_p^\alpha \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1-\alpha},$$

where $k,\ r \in N,\ k < r,\ r \ge 3,\ p \in [1, \infty],\ \alpha = (r-k)/(r-1+1/p)$, φ_r is the perfect Euler spline of order r, $\nu(x')$ is the number of sign changes of the derivative x' on a period.

Отримано нові точні нерівності типу Колмогорова, зокрема точну нерівність для 2π-періодичних функцій $x \in L^r_\infty(T)$:

$$\left\| x^{(k)} \right\|_1 \le \left(\frac{\nu(x')}{2} \right)^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\alpha} \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_1}{\| \varphi_r \|_p^\alpha} \| x \|_p^\alpha \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1-\alpha},$$

де $k,\ r \in N,\ k < r,\ r \ge 3,\ p \in [1, \infty],\ \alpha = (r-k)/(r-1+1/p)$, φ_r — ідеальний сплайн Ейлера порядку r, $\nu(x')$ — число змін знаку x' на періоді.

1. Введение. Пусть G — конечный отрезок I или единичная окружность T, реализованная как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, измеримых функций $x : G \to R$ таких, что $\| x \|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\| x \|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int\limits_G | x(t) |^p \, dt \right)^{1/p}, & \text{если} \quad 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{vrai}\sup\limits_{t \in G} | x(t) |, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Для $s \in [1, \infty]$ и $r \in N$ обозначим через $L^r_s(G)$ множество функций $x : G \to R$ таких, что $x^{(r-1)}$ $\left(x^{(0)} = x\right)$ локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_s(G)$. Символом $\varphi_r(t)$, $t \in R$, обозначим r-й 2π-периодический интеграл со средним значением на периоде, равным нулю от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$, и положим $g_r(t) := 4^{-1} \varphi_{r-1}(t)$.

В случае 2π-периодических функций вместо $L_p[0, 2\pi]$, $\| x \|_{L_p[0, 2\pi]}$ и $L^r_s(T)$ будем писать L_p, $\| x \|_p$ и L^r_s. Положим $W^r_\infty := \left\{ x \in L^r_\infty(T) \colon \left\| x^{(r)} \right\|_\infty \le 1 \right\}$.

В настоящей статье будем изучать неравенства для норм промежуточных производных функций $x \in L^r_s$ вида

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le C \| x \|_p^\alpha \left\| x^{(r)} \right\|_s^{1-\alpha}, \tag{1}$$

а также их аналоги, учитывающие число перемен знака производных.

Как известно [1], неравенства типа Колмогорова (1) для функций $x \in L^r_s$, k,

$r \in N$, $k < r$, q, p, $s \in [1, \infty]$, $\alpha \in (0, 1)$, имеют место тогда и только тогда, когда

$$\alpha \le \alpha_{cr} := \min\left\{1 - \frac{k}{r}, \frac{r - k + 1/q - 1/s}{r + 1/p - 1/s}\right\}. \tag{2}$$

Особый интерес представляют неравенства типа (1) с неулучшаемой константой C. Среди неулучшаемых неравенств наиболее важны неравенства (1) с $\alpha = \alpha_{cr}$, так как из неулучшаемого неравенства типа (1) с $\alpha = \alpha_{cr}$, как правило, нетрудно получить неравенство с произвольным $\alpha < \alpha_{cr}$ и точной константой C.

Для суммируемой 2π-периодической функции символом $\nu(x)$ будем обозначать число существенных перемен знака x на периоде [2, с. 80]. В силу результата Б. Е. Клоца [1] неравенства вида (1) с $\alpha > \alpha_{cr}$ невозможны. Тем не менее А. А. Лигун показал [3], что если неравенство вида (1) видоизменить так, чтобы в нем было учтено число перемен знака производных функции, то возможны неравенства типа Колмогорова с $\alpha > \alpha_{cr}$. В силу результата А. А. Лигуна для любых k, $r \in N$, $k < r$, $p \in [1, \infty]$ и $x \in L_1^r$ имеет место неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_1 \le \left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha} \frac{\left\| g_{r-k} \right\|_1}{\| g_r \|_p^\alpha} \| x \|_p^\alpha \left\| x^{(r)} \right\|_1^{1-\alpha}, \tag{3}$$

где $\alpha = (r - k)/(r - 1 + 1/p)$. В [3] приведен ряд приложений неравенства (3) в теории аппроксимации.

В [4, 5] получен ряд неравенств вида

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le M \prod_{i=1}^{m} \left(\nu\left(x^{(i)}\right)\right)^{\alpha_i} \| x \|_p^\alpha \left\| x^{(r)} \right\|_s^{1-\alpha}, \quad k, r \in N, \quad k < r,$$

где $\alpha_i \ge 0$, $\alpha \in (0, 1)$ для функций $x \in L_\infty^r$ (в случае $q = 1$, $p = s = \infty$, $m = r$) и для функций $x \in L_1^{r+1}$ (в случаях $q = 1$, $p \in [1, \infty]$, $s = \infty$, $r/2 < k < r$; $q = 2$, $p = s = \infty$; $q = 2$, $p \in [1, \infty]$, $s = \infty$, $m = r + 1$).

В данной статье с помощью теоремы сравнения Σ-перестановок Корнейчука $\Phi(x, t)$ доказано неравенство

$$\| \Phi(x', \cdot) \|_q \le 2^{1-1/q} \left[\frac{\nu(x')}{2}\right]^{(1-1/p)\alpha} \frac{\left\| \varphi_{r-1} \right\|_q}{\| \varphi_r \|_p^\alpha} \| x \|_p^\alpha \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1-\alpha}, \quad x \in L_\infty^r, \tag{4}$$

где $r \in N$, $r \ge 3$, q, $p \in [1, \infty]$, $\alpha = (r - 2 + 1/q)/(r - 1 + 1/p)$ (теорема 1). Из теоремы 1 выведено следующее неравенство типа Колмогорова, учитывающее число перемен знака производных:

$$\left\| x^{(k)} \right\|_1 \le \left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha} \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_1}{\| \varphi_r \|_p^\alpha} \| x \|_p^\alpha \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{(1-\alpha)}, \quad k, r \in N, \quad k < r, \quad r \ge 3, \tag{5}$$

где $\alpha = (r - k)/(r - 1 + 1/p)$ (теорема 2). Отметим, что в правой части неравенства (5) в отличие от аналогичного неравенства из работы [4] не содержится множитель $\left[\nu\left(x^{(r+1)}\right)/2\right]^{1-\alpha}$. Еще одно неравенство такого типа получено для случая $q = 2$, $p \in [1, \infty]$, $s = \infty$, $r/2 < k < r$ (теорема 3).

Отметим, что при $p = 1$ неравенство (5) принимает вид

$$\left\| x^{(k)} \right\|_1 \leq \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_1}{\left\| \varphi_r \right\|_1^{1-\frac{k}{r}}} \| x \|_1^{1-\frac{k}{r}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{k}{r}}. \tag{6}$$

Это неравенство было получено в [6].

2. Вспомогательные сведения. Для функции $x \in L_1[a, b]$ и $y > 0$ положим

$$m(x, y) := \operatorname{mes}\{t\colon t \in [a, b], |x(t)| > y\}.$$

Будем обозначать через $r(x, t)$ перестановку функции $|x(t)|$ [6] (§ 6.1), т. е.

$$r(x, t) := \inf\{y\colon m(x, y) \leq t\}, \quad t \in [0, b-a].$$

Известно [7], что

$$\operatorname{mes}\{t\colon t \in [0, b-a], r(x, t) > y\} = m(x, y).$$

Для любой 2π-периодической функции $x \in L_1$ символом $r(x, t)$ будем обозначать перестановку сужения $|x|$ на $[0, 2\pi]$, а символом $r(\varphi_{\lambda,r}, t)$ — перестановку сужения $\left|\varphi_{\lambda,r}\right|$ на $[0, 2\pi/\lambda]$. Для $x \in L_1$ положим $r(x, t) = 0$, если $t \geq 2\pi$, и $r(\varphi_{\lambda,r}, t) = 0$ для $t \geq 2\pi/\lambda$.

Пусть D — множество всех 2π-периодических функций x из L_1, которые имеют односторонние пределы в каждой точке, а D^1 — множество всех 2π-периодических функций $x \in D$ таких, что $\int_0^{2\pi} x(t)\,dt = 0$. Для функций $x \in D^1$ Σ-перестановка Корнейчука $\Phi(x, \cdot)$ определяется следующим образом [7, с. 144]. Функцию $g(t)$, $t \in R$, будем называть простой, если она определена на отрезке $[a, b]$, который называется основным для функции $g(t)$, и уравнение $|g(t)| = y$ имеет ровно два корня для каждого $y \in \left(0, \| g \|_{L_\infty(\mathrm{R})}\right)$. Н. П. Корнейчук [7] доказал, что каждая функция $x \in D^1$ может быть представлена в виде

$$x(t) = \sum_k x_k(t) + d, \quad t \in [t_0, t_0 + 2\pi],$$

где

$$|x(t_0)| = \min_t |x(t)|, \quad d = x(t_0),$$

и $x_k(t)$ — простые функции, которые отличаются от функции $|x(t)|$ постоянными на каждом интервале монотонности функции $|x|$. Для любой функции $x \in D^1$ положим

$$\Phi(x, t) := \sum_k r(x_k, t) + d, \quad t \in [0, 2\pi],$$

и пусть $\Phi(x, t) = 0$ для $t \geq 2\pi$. В [8, с. 14] было показано, что Σ-перестановка может быть определена для функции $x \in L_1$.

Через $\Phi_\lambda(\varphi_{\lambda,r}, \cdot)$ будем обозначать Σ-перестановку $\varphi_{\lambda,r}$ на $[a, a + 2\pi/\lambda]$, где a — нуль $\varphi_{\lambda,r}$. Известны следующие свойства $\Phi(x, \cdot)$ [7, с. 144]:

$$\|\Phi(x, \cdot)\|_1 = \|x\|_1, \tag{7}$$

$$2\Phi(x, 0) - 2\min_t |x(t)| = \|x'\|_1 = \bigvee_0^{2\pi} x, \tag{8}$$

где $\bigvee_0^{2\pi} x$ — вариация x на $[0, 2\pi]$.

Отметим, что для любой функции $x \in L_1^1$ [3]

$$\int_0^t \Phi(x, u)\, du \;\le\; \int_0^{t\nu(x')} r(x, u)\, du. \tag{9}$$

Нам понадобится следующая теорема.

Теорема А [6]. *Пусть* $r \in N$, $r \ge 3$. *Если функция* $x \in W_\infty^r$ *имеет нули и* λ *выбрано так, что*

$$\| x' \|_1 \;\le\; \lambda \left\| \varphi_{\lambda, r-1} \right\|_{L_1[0, 2\pi/\lambda]}, \tag{10}$$

то почти всюду на $[0, \pi/\lambda]$

$$| \Phi'(x, t) | \;\le\; \lambda \left| \Phi_\lambda'\left(\varphi_{\lambda, r}, t\right) \right|.$$

Более того, если

$$\| x' \|_1 \;=\; \lambda \left\| \varphi_{\lambda, r-1} \right\|_{L_1[0, 2\pi/\lambda]},$$

то для всех $t \in [0, \pi/\lambda]$

$$\Phi(x, t) \;\ge\; \lambda \Phi_\lambda(\varphi_{\lambda, r}, t).$$

Если же λ *выбрать из условия*

$$\| x \|_1 \;\le\; \lambda \left\| \varphi_{\lambda, r} \right\|_{L_1[0, 2\pi/\lambda]},$$

то имеет место (10) *и выполнено неравенство*

$$\int_0^t \Phi(x, u)\, du \;\le\; \lambda \int_0^t \Phi_\lambda(\varphi_{\lambda, r}, u)\, du, \quad t > 0.$$

3. Точные неравенства типа Колмогорова.

Теорема 1. *Пусть* $r \in N$, $r \ge 3$, $x \in L_\infty^r$. *Тогда для любых* p, $q \in [1, \infty]$ *выполняется неравенство*

$$\| \Phi(x', \cdot\,) \|_q \;\le\; 2^{1-1/q} \left[\frac{\nu(x')}{2} \right]^{(1-1/p)\alpha} \frac{\left\| \varphi_{r-1} \right\|_q}{\| \varphi_r \|_p^\alpha} \| x \|_p^\alpha \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{11}$$

где $\alpha = (r - 2 + 1/q)/(r - 1 + 1/p)$.

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in L_\infty^r$. Без потери общности можно считать, что x имеет нули. В силу однородности неравенства (11) можем предположить, что

$$\left\| x^{(r)} \right\|_\infty \;=\; 1. \tag{12}$$

Тогда $x \in W_\infty^r$. Выберем $\lambda > 0$, удовлетворяющее условию

$$\| x' \|_1 \;=\; \lambda \left\| \varphi_{\lambda, r-1} \right\|_{L_1[0; 2\pi/\lambda]}. \tag{13}$$

Отсюда в силу теоремы А следует, что

$$\Phi(x, t) \;\ge\; \lambda \Phi_\lambda(\varphi_{\lambda, r}, t), \quad t \in [0, \pi/\lambda],$$

и

$$\int_0^t \Phi(x', u)\,du \;\le\; \lambda \int_0^t \Phi_\lambda(\varphi_{\lambda, r-1}, u)\,du. \tag{14}$$

Тогда для всех $t \in [0, \pi/\lambda]$ выполнено неравенство

$$\int_0^t \Phi(x, u)\,du \;\ge\; \lambda \int_0^t \Phi_\lambda(\varphi_{\lambda, r}, u)\,du. \tag{15}$$

Покажем, что для $t \in [0, \pi/\lambda]$

$$\lambda \int_0^t \Phi_\lambda(\varphi_{\lambda, r}, u)\,du \;=\; \lambda^{-r} \int_0^{2\lambda t} r(\varphi_r, u)\,du. \tag{16}$$

Обозначим через $\overline{\varphi_{\lambda,r}}(t)$ сужение $\left|\varphi_{\lambda,r}(t)\right|$ на $[0, \pi/\lambda]$. Согласно определению Σ-перестановки

$$\Phi_\lambda(\varphi_{\lambda,r}, t) \;=\; 2r\left(\overline{\varphi_{\lambda,r}}, t\right), \qquad t \in \left(0; \frac{\pi}{\lambda}\right). \tag{17}$$

Ясно, что $r\left(\overline{\varphi}_{\lambda,r}, t\right) = r\left(\varphi_{\lambda,r}, 2t\right)$. Поэтому

$$\int_0^t \Phi_\lambda(\varphi_{\lambda,r}, u)\,du \;=\; 2\int_0^t r(\overline{\varphi}_{\lambda,r}, u)\,du \;=\; 2\lambda^{-r} \int_0^t r(\varphi_r(\lambda(\cdot)), 2u)\,du \;=$$

$$=\; 2\lambda^{-r} \int_0^t r(\varphi_r, 2\lambda u)\,du \;=\; \lambda^{-(r-1)} \int_0^{2\lambda t} r(\varphi_r, u)\,du.$$

Отсюда следует (16). Из (9), (15) и (16) получаем

$$\int_0^{t\nu(x')} r(x, u)\,du \;\ge\; \lambda^{-r} \int_0^{2\lambda t} r(\varphi_r, u)\,du, \qquad t \in \left(0; \frac{\pi}{\lambda}\right). \tag{18}$$

Полагая $m = \nu(x')$, $\xi = tm$, неравенство (18) записываем в виде

$$\int_0^{\xi} r(x, u)\,du \;\ge\; \lambda^{-r} \int_0^{2\lambda\xi/m} r(\varphi_r, u)\,du, \qquad \xi \in \left(0, \frac{m\pi}{\lambda}\right). \tag{19}$$

Покажем, что

$$\lambda^{-r} \int_0^{2\lambda\xi/m} r(\varphi_r, u)\,du \;=\; \frac{2\lambda^{-(r-1)}}{m} \int_0^{\xi} r\left(\varphi_r\left(\frac{2\lambda}{m}(\cdot)\right), u\right) du. \tag{20}$$

Действительно,

$$\int_0^{2\lambda\xi/m} r(\varphi_r, u)\,du \;=\; \int_0^{\xi} r\left(\varphi_r, \frac{2\lambda}{m}u\right) \frac{2\lambda}{m}\,du \;=\; \frac{2\lambda}{m} \int_0^{\xi} r\left(\varphi_r\left(\frac{2\lambda}{m}(\cdot)\right), u\right) du,$$

что равносильно (20). Из (19) и (20) следует, что для любого $\xi \in \left(0, \dfrac{m\pi}{\lambda}\right)$ выполняется неравенство

$$\int_0^{\xi} r(x,u)\,du \;\geq\; \frac{2\lambda^{-(r-1)}}{m}\int_0^{\xi} r\left(\varphi_r\left(\frac{2\lambda}{m}(\,\cdot\,)\right), u\right)du. \tag{21}$$

Поскольку $r\left(\varphi_r\left(\frac{2\lambda}{m}(\,\cdot\,)\right), u\right) = 0$ для $t \geq \frac{m\pi}{\lambda}$, неравенство (21) имеет место для всех $\xi > 0$. Отсюда в силу теоремы Харди – Литтлвуда (см. предложение 1.3.10 из [9]) получаем

$$\|x\|_p \;\geq\; \|\psi_r\|_{L_p[0,m\pi/\lambda]}, \tag{22}$$

где $\psi_r(t) \;=\; \frac{2\lambda^{-(r-1)}}{m}\,\varphi_r\left(\frac{2\lambda}{m}t\right),\; t \in \left(0, \frac{m\pi}{\lambda}\right).$

Вычислим норму функции ψ_r в $L_p\left[0, \frac{m\pi}{\lambda}\right]$:

$$\|\psi_r\|_{L_p[0,m\pi/\lambda]} \;=\; \frac{2\lambda^{-(r-1)}}{m}\left\{\int_0^{m\pi/\lambda}\left|\varphi_r\left(\frac{2\lambda}{m}\,t\right)\right|^p dt\right\}^{1/p} \;=$$

$$=\; \frac{2\lambda^{-(r-1)}}{m}\left\{\frac{m}{2\lambda}\int_0^{2\pi}|\varphi_r(u)|^p\,du\right\}^{1/p} \;=\; \left(\frac{2}{m}\right)^{1-1/p}\lambda^{-(r-1)-1/p}\,\|\varphi_r\|_p.$$

Так как $m = \nu(x')$, из (22) имеем

$$\|x\|_p \;\geq\; \left(\frac{2}{\nu(x')}\right)^{1-1/p}\lambda^{-(r-1)-1/p}\,\|\varphi_r\|_p. \tag{23}$$

С другой стороны, из (14) в силу теоремы Харди – Литтлвуда следует неравенство

$$\|\Phi(x',\,\cdot\,)\|_q \;\leq\; \lambda\left\|\Phi_\lambda(\varphi_{\lambda,r-1},\,\cdot\,)\right\|_{L_q[0,\pi/\lambda]}, \quad q \geq 1. \tag{24}$$

Объединяя (17) и очевидное неравенство

$$\left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_{L_q[0,2\pi/\lambda]} \;=\; \lambda^{-r-1/q}\,\|\varphi_r\|_q,$$

получаем

$$\left\|\Phi_\lambda\left(\varphi_{\lambda,r-1},\,\cdot\,\right)\right\|^q_{L_q[0,\pi/\lambda]} \;=\; 2^q\left\|r\left(\overline{\varphi}_{\lambda,r-1},\,\cdot\,\right)\right\|^q_{L_q[0,\pi/\lambda]} \;=$$

$$=\; 2^{q-1}\left\|\varphi_{\lambda,r-1}\right\|^q_{L_q[0,2\pi/\lambda]} \;=\; 2^{q-1}\lambda^{-(r-1)q-1}\left\|\varphi_{r-1}\right\|^q_q,$$

и, следовательно,

$$\left\|\Phi_\lambda\left(\varphi_{\lambda,r-1},\,\cdot\,\right)\right\|_{L_q[0,\pi/\lambda]} \;=\; 2^{1-1/q}\lambda^{-(r-1)-1/q}\left\|\varphi_{r-1}\right\|_q. \tag{25}$$

Теперь из (23) – (25) получаем

$$\frac{\|\Phi(x',\,\cdot\,)\|_q}{\|x\|_p^{\alpha}} \;\leq\; \frac{2^{1-1/q}\lambda^{-(r-2+1/q)}\left\|\varphi_{r-1}\right\|_q}{\left(2^{1-1/p}\lambda^{1-r-1/p}[\nu(x')]^{1/p-1}\|\varphi_r\|_p\right)^{\alpha}} \;=$$

$$= \frac{2^{1-\alpha+\alpha/p-1/q}\,\lambda^{-(r-2+1/q)-\alpha(1-r-1/p)}}{[\nu(x')]^{\alpha/p-\alpha}}\,\frac{\left\|\varphi_{r-1}\right\|_q}{\|\varphi_r\|_p^{\alpha}}.$$

Учитывая равенство $\alpha = (r-2+1/q)/(r-1+1/p)$, имеем

$$\frac{\|\Phi(x',\cdot)\|_q}{\|x\|_p^{\alpha}} \le 2^{1-1/q}\left[\frac{\nu(x')}{2}\right]^{(1-1/p)\alpha}\frac{\left\|\varphi_{r-1}\right\|_q}{\|\varphi_r\|_p^{\alpha}}.$$

Последнее неравенство в силу (12) равносильно (11).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $k,\ r\in N,\ k<r,\ r\ge 3,\ p,\ q\in[1,\infty]$. *Тогда для любой функции* $x\in L_\infty^r$ *выполняется неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_1 \le \left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha}\frac{\left\|\varphi_{r-k}\right\|_1}{\|\varphi_r\|_p^{\alpha}}\,\|x\|_p^{\alpha}\left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{26}$$

где $\alpha = (r-k)/(r-1+1/p)$. *Неравенство* (26) *является неулучшаемым и обращается в равенство для функций вида* $x(t) = a\varphi_{n,r}(t+b),\ a,\ b\in R,\ n\in N$.

Доказательство. Зафиксируем функцию $x\in L_\infty^r$. Без потери общности можем считать, что функция x имеет нули. Сначала докажем (26) при $k=1$. При $q=1$ из теоремы 1 в силу (7) следует неравенство

$$\|x'\|_1 \le \left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{(1-1/p)\alpha_1}\frac{\left\|\varphi_{r-1}\right\|_1}{\|\varphi_r\|_p^{\alpha_1}}\,\|x\|_p^{\alpha_1}\left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha_1}, \tag{27}$$

где $\alpha_1 = (r-1)/(r-1+1/p)$.

Пусть теперь $k>1$. Для функции $x'\in L_\infty^{r-1}$ из (6) следует неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_1 \le \frac{\left\|\varphi_{r-k}\right\|_1}{\left\|\varphi_{r-1}\right\|_1^{1-\frac{k-1}{r-1}}}\,\|x'\|_1^{1-\frac{k-1}{r-1}}\left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k-1}{r-1}}. \tag{28}$$

Используя (27) для оценки $\|x'\|_1$ в правой части (28), получаем

$$\left\|x^{(k)}\right\|_1 \le \frac{\left\|\varphi_{r-k}\right\|_1}{\left\|\varphi_{r-1}\right\|_1^{1-\frac{k-1}{r-1}}}\left(\left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\alpha_1}\frac{\left\|\varphi_{r-1}\right\|_1}{\|\varphi_r\|_p^{\alpha}}\,\|x\|_p^{\alpha_1}\left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha_1}\right)^{1-\frac{k-1}{r-1}}\left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k-1}{r-1}} =$$

$$= \left(\frac{\nu(x')}{2}\right)^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{k-1}{r-1}\right)\alpha_1}\frac{\left\|\varphi_{r-1}\right\|_1}{\|\varphi_r\|_p^{\left(1-\frac{k-1}{r-1}\right)\alpha_1}}\,\|x\|_p^{\left(1-\frac{k-1}{r-1}\right)\alpha_1}\left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\left(1-\frac{k-1}{r-1}\right)(1-\alpha_1)+\frac{k-1}{r-1}},$$

где $\alpha_1 = (r-1)/(r-1+1/p)$.

Поскольку $(1-(k-1)/(r-1))\alpha_1 = (r-k)/(r-1+1/p)$, отсюда следует неравенство (26). Его точность легко проверить с помощью очевидного равенства $\left\|\varphi_{n,r}\right\|_p = n^{-r}\|\varphi_r\|_p$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $k,\ r\in N,\ r/2<k<r,\ r\ge 3,\ p\in[1,\infty]$. *Тогда для любой*

функции $x \in L_\infty^r$

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2 \leq \left(\frac{\nu(x')}{2} \right)^{(1-1/p)\alpha} \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_2}{\left\| \varphi_r \right\|_p^\alpha} \left\| x \right\|_p^\alpha \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{29}$$

где $\alpha = (r-k)/(r-1+1/p)$. *Неравенство* (29) *обращается в равенство для функций вида* $x(t) = a\varphi_{n,r}(t+b)$, $a, b \in R$, $n \in N$.

Доказательство. Интегрируя по частям, имеем

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2^2 = \int_0^{2\pi} x^{(k)}(t) x^{(k)}(t)\, dt = \left| \int_0^{2\pi} x^{(r)}(t) x^{(2k-r)}(t)\, dt \right| \leq \left\| x^{(2k-r)} \right\|_1 \left\| x^{(r)} \right\|_\infty.$$

Оценивая $\left\| x^{(2k-r)} \right\|_1$ с помощью (26), получаем оценку

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{\nu(x')}{2} \right)^{\left(\frac{2(r-k)}{r-1+1/p}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)} \frac{\left\| \varphi_{2(r-k)} \right\|_1}{\left\| \varphi_r \right\|_p^{2(r-k)/(r-1+1/p)}} \left\| x \right\|_p^{\frac{2(r-k)}{r-1+1/p}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{2k-r-1+1/p}{r-1+1/p}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty,$$

из которой следует (29) в силу равенства $\left\| \varphi_{2(r-k)} \right\|_1 = \left\| \varphi_{r-k} \right\|_2^2$. Точность неравенства (29) очевидна.

Теорема доказана.

1. *Клоц Б. Е.* Приближение дифференцируемых функций функциями большей гладкости // Мат. заметки. – 1977. – **21**, № 1. – С. 21 – 32.
2. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
3. *Лигун А. А.* О неравенствах между нормами производных периодических функций // Мат. заметки. – 1983. – **33**, № 3. – С. 385 – 391.
4. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О точных неравенствах типа Колмогорова, учитывающих число перемен знака производных // Доп. НАН України. – 1998. – № 8. – С. 12 – 16.
5. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О некоторых точных неравенствах типа Колмогорова, учитывающих число перемен знака производных // Вестн. Днепропетр. нац. ун-та. – 2004. – № 11. – С. 3 – 8.
6. *Kofanov V. A.* Exact inequalities of Kolmogorov type and comparison of Korneichuk's Σ-rearrangements // East J. Approxim. – 2003. – **9**, № 1. – P. 67 – 94.
7. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – Киев: Наук. думка, 1976.
8. *Лигун А. А., Капустян В. Е., Волков Ю. И.* Специальные вопросы теории приближения и оптимального управления распределенными системами. – Киев: Вища шк., 1990.
9. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.

Получено 15.10.07