УДК 519.21
**І. К. Мацак** (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

# ДЕЯКІ ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ МАКСИМУМУ СУМ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

We study conditions of weak convergence of maximum of sums of independent random processes in the space $\mathbf{L}_p$. We present a number of applications to asymptotic analysis of some $\omega^2$-type statistics.

Изучаются условия слабой сходимости максимума сумм независимых случайных процессов в пространстве $\mathbf{L}_p$. Приведен ряд применений к асимптотическому анализу некоторых статистик типа $\omega^2$.

**1. Вступ.** Відомо, яке значення мають дослідження граничних розподілів максимуму сум незалежних випадкових величин, наприклад, для теорії масового обслуговування чи теорії страхування. Тому ця тематика інтенсивно вивчалася [1 – 3] (огляд останніх робіт можна знайти в [2]). Розглядався також і векторний випадок (простори $R^{(m)}$) [4 – 6]. Але для випадкових процесів подібні питання, здається, не ставилися в літературі. Водночас результати такого типу також мають значний інтерес для застосувань (див. п. 4).

Нехай $X = \{X(s),\ s \in [0,1]\}$ — випадковий процес, $\mathbf{E}X(s) = 0$, $(X_i)$ — послідовність незалежних копій $X$, $S_n(s) = \sum_{i=1}^{n} X_i(s)$, $S_0 = 0$, $\overline{S}_n(s) = \max_{0\le k\le n} S_k(s)$.

Виявляється, що при широких умовах скінченновимірні розподіли випадкового процесу $\overline{S}_n(s)/\sqrt{n}$ збігаються до скінченновимірних розподілів процесу $\overline{W}(s)$, де $\overline{W}(s) = \sup_{0\le t\le 1} W(t,s)$, а $W(t,\cdot)$ — деякий нескінченновимірний вінерів процес. Природно виникає задача дослідження умов, при яких має місце слабка збіжність

$$\frac{\overline{S}_n(\cdot)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \overline{W}(\cdot) \tag{1}$$

для функціональних банахових ґраток.

У даній роботі цю задачу розглядаємо для просторів $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p[0,1]$ (п. 3). У п. 4 наведено ряд застосувань загальних теорем до асимптотичного аналізу деяких статистик типу $\omega^2$.

**2. Деякі властивості багатовимірного броунівського руху.** Нехай $W(t)$, $t \ge 0$, — нормально розподілений, неперервний, однорідний процес з незалежними приростами із значеннями у сепарабельному банаховому просторі $B$, $W(0) = 0$, $\mathbf{E}W(t) = 0$. Нехай характеристичний функціонал процесу $W(t)$ задається формулою

$$\varphi(t,z) = \exp\left(-\frac{t}{2}\langle \mathbf{R}z, z\rangle\right), \tag{2}$$

де $z \in B^*$, $B^*$ — спряжений простір до $B$, $\mathbf{R}\colon B^* \to B$ — коваріаційний оператор випадкового елемента (в. е.) $\Gamma$, $\Gamma$ — деякий нормально розподілений в. е. зі значеннями у просторі $B$. $W(t)$ називається процесом броунівського руху (або вінеровим процесом).

Це означення для випадку $B = R^{(m)}$ збігається з класичним означенням (див. [4, с. 65], де такий процес називається процесом броунівського руху при умові, що $\mathbf{R}$ — одиничний оператор).

***Зауваження* 1.** (i) У випадку функціональних банахових просторів типу $\mathbf{L}_p$ чи $\mathbf{C} = \mathbf{C}[0,1]$ процес броунівського руху $W(t)$ — нормально розподілена випадкова функція $W(t,s)$, для якої $\mathbf{E}W = 0$, і для будь-якого $t \in [0,1]$ процес $W(t,s)$ однаково розподілений з $\sqrt{t}\Gamma(s)$, тобто

$$\mathbf{E}W(t_1,s_1)W(t_2,s_2) = \min(t_1,t_2)R(s_1,s_2).$$

Тут $R(u,s)$ — коваріаційна функція $\Gamma(s)$, $\Gamma(s)$ — деякий нормально розподілений випадковий процес, вибіркові функції якого належать відповідному простору.

(ii) У випадку, коли $\Gamma(s)$ — процес броунівського руху чи броунівський міст, такі процеси розглядалися у праці [7].

Відомо [8, с. 128], що для дійсної прямої ряд

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \int_0^t H_n(s)ds$$

збігається рівномірно на $[0,1]$ майже напевно (м. н.) і $w(t)$, $t \in [0,1]$, — стандартний процес броунівського руху в $R^{(1)}$, якщо $(\gamma_n)$ — послідовність незалежних нормальних випадкових величин (в. в.), $\mathbf{E}\gamma_n = 0$, $\mathbf{E}|\gamma_n|^2 = 1$, а $(H_n(t))$ — ортогональна система функцій Хаара

$$H_0(t) = 1, \quad 0 \le t \le 1, \qquad H_1(t) = \begin{cases} +1 & \text{при } \ 0 \le t \le \dfrac{1}{2}, \\ -1 & \text{при } \ \dfrac{1}{2} < t \le 1, \end{cases}$$

і при $2^n \le k < 2^{n+1}$

$$H_k(t) = \begin{cases} 2^{n/2} & \text{при } \ \dfrac{k-2^n}{2^n} \le t \le \dfrac{k-2^n+1/2}{2^n}, \\ -2^{n/2} & \text{при } \ \dfrac{k-2^n+1/2}{2^n} \le t \le \dfrac{k-2^n+1}{2^n}, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Цікаво, що подібне конструктивне зображення має місце і для процесу броунівського руху із значеннями у банаховому просторі.

**Лема 1.** *Нехай $B$ — сепарабельний банахів простір, $\Gamma$ — нормально розподілений в. е. із значеннями в $B$, $\mathbf{E}\Gamma = 0$, $\mathbf{R}$ — коваріаційний оператор $\Gamma$, $(\Gamma_n)$ — послідовність незалежних копій $\Gamma$. Тоді ряд*

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n \int_0^t H_n(u)du \tag{3}$$

*збігається в нормі $B$ рівномірно по $t \in [0,1]$ м. н., а $W(t)$ — процес броунівського руху в $B$, характеристичний функціонал якого задається формулою* (2).

***Доведення.*** Наведені нижче міркування близькі до одновимірного випадку (див. [8, с. 126–130]). Позначимо через $\|\cdot\|$ норму в $B$, $J_n(t) = \int_0^t H_n(u)du$.

Як і у [8], встановлюємо, що при виконанні умови

$$\|x_n\| = O(n^{\epsilon}) \quad \text{для} \quad \epsilon < \frac{1}{2}$$

ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x_n J_n(t)$ збігається в нормі $B$ рівномірно по $t \in [0,1]$.

Таким чином, рівномірна збіжність ряду (3) м. н. буде випливати з рівності

$$\mathbf{P}\left(\sup_{n>2} \frac{\|\Gamma_n\|}{\sqrt{\ln n}} < \infty\right) = 1.$$

Але останнє співвідношення є правильним для простору $\mathbf{C}$ [9]. А оскільки простір $\mathbf{C}$ універсальний серед сепарабельних банахових просторів, то воно справджується і в загальному випадку.

Зазначимо, що функції $J_n(t)$ є неперервними по $t$ і дорівнюють $0$ при $t = 0$, тому і $W(t)$ має ці властивості.

Зрозуміло також, що процес $W(t)$ та його прирости нормально розподілені, як суми нормально розподілених в. е.

Далі за рівністю Парсеваля для системи Хаара в $\mathbf{L}_2$ маємо (див. [8, c. 130])

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n(t) \cdot J_n(s) = \min(t,s), \quad t,s \in [0,1]. \tag{4}$$

Позначимо через $B^*$ спряжений простір до $B$. Співвідношення (3) та (4) при $z \in B^*$, $h > 0$ дозволяють записати

$$\mathbf{E}\big\langle W(t+h) - W(t), z\big\rangle^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\langle \Gamma_n, z\rangle^2 \left(J_n(t+h) - J_n(t)\right)^2 = h\langle \mathbf{R}z, z\rangle. \tag{5}$$

Враховуючи нормальність розподілу $W(t)$, з рівності (5) отримуємо (2). Рівність (5) означає однорідність процесу $W(t)$.

Залишилося перевірити незалежність приростів $W(t)$. Покажемо, що для всіх $k$, $0 \le t_1 < \ldots < t_k \le 1$ і $z_1, \ldots, z_k \in B^*$ в. в. $\langle z_1, W(t_1)\rangle$, $\langle z_2, W(t_2) - W(t_1)\rangle, \ldots, \langle z_k, W(t_k) - W(t_{k-1})\rangle$ некорельовані. Цього достатньо для незалежності, бо, як було зазначено вище, в. в. є нормально розподіленими. Візьмемо, наприклад, $\langle z_2, W(t_2) - W(t_1)\rangle$ та $\langle z_3, W(t_3) - W(t_2)\rangle$. Тоді згідно з (3) маємо

$$\mathbf{E}\langle z_2, W(t_2) - W(t_1)\rangle\langle z_3, W(t_3) - W(t_2)\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\langle z_2, \Gamma_n\rangle\langle z_3, \Gamma_n\rangle \left(J_n(t_2) - J_n(t_1)\right)\left(J_n(t_3) - J_n(t_2)\right) =$$

$$= \langle \mathbf{R}z_2, z_3\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \left(J_n(t_2) - J_n(t_1)\right)\left(J_n(t_3) - J_n(t_2)\right), \tag{6}$$

а з рівності (4) випливає, що остання сума в (6) дорівнює

$$\min(t_2,t_3) - \min(t_1,t_3) - \min(t_2,t_2) + \min(t_1,t_2) = 0.$$

Лему доведено.

**3. Слабка збіжність у просторі $\mathbf{L}_p$.** Розглянемо простір $([0,1], \Lambda, \mu)$, де $\Lambda$ — $\sigma$-алгебра борелевих множин на $[0,1], \mu$ — міра Лебега. Через $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p[0,1]$ позначимо банахів простір вимірних функцій $x(t)$ на $([0,1], \Lambda, \mu)$ з нормою $\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^p \mu(dt)\right)^{1/p}$.

Щоб отримати співвідношення (1) у просторі $\mathbf{L}_p$, $1 \leq p < \infty$, на випадковий процес $X(s)$ накладемо наступні умови:

$$\sup_{0\leq s\leq 1} \mathbf{E}|X(s)|^{p^*} \leq C_p < \infty, \tag{7}$$

де $p^* = 2$ при $1 \leq p < 2$, $p^* = p$ при $2 \leq p < \infty$;

$$\mathbf{E}|X(s)|^{p+\epsilon} < \infty \quad \forall s \in [0,1] \tag{8}$$

для деякого $\epsilon > 0$, $\leq p < \infty$.

Якщо вимірний випадковий процес $X(s)$ задовольняє умову (7), то вибіркові функції $X(s,\omega)$ належать $\mathbf{L}_p$ м. н., тобто $X$ — в. е. із значеннями у просторі $\mathbf{L}_p$.

Нагадаємо, що в. е. $X$ із значеннями у сепарабельному банаховому просторі $B$ називається передгауссівським, якщо в $B$ існує нормально розподілений в. е. $\Gamma = \Gamma_X$, коваріаційний оператор якого збігається з коваріаційним оператором $X$.

Неважко зрозуміти, що при умові (7) $X$ буде передгауссівським в. е. у просторі $\mathbf{L}_p$. Дійсно, це випливає із ланцюжка рівностей

$$\big(\mathbf{E}|\Gamma(s)|^p\big)^{1/p} = C_p\big(\mathbf{E}|\Gamma(s)|^2\big)^{1/2} = C_p\big(\mathbf{E}|X(s)|^2\big)^{1/2} \leq C_p\big(\mathbf{E}|X(s)|^{p^*}\big)^{1/p^*} < \infty. \tag{9}$$

**Теорема 1.** *Нехай $X(s)$, $s \in [0,1]$, — вимірний випадковий процес, який при деякому $p$, $1 \leq p < \infty$, задовольняє умови* (7), (8), $\mathbf{E}X(s) = 0$. *Тоді $X$ — передгауссівський в. е. із значеннями у просторі $\mathbf{L}_p$. Якщо $W(t)$ — вінерів процес в $\mathbf{L}_p$, характеристичний функціонал якого задається формулою* (2), $\mathbf{R}$ — *коваріаційний оператор $X$, то у просторі $\mathbf{L}_p$ має місце слабка збіжність* (1).

**Теорема 2.** *Якщо в умовах теореми* 1 *замінити рівності* $\mathbf{E}X(s) = 0$ *на умову* $\mathbf{E}X(s) = a(s) > 0$ $\forall s \in [0,1]$, *то у просторі $\mathbf{L}_p$ має місце слабка збіжність*

$$\frac{\overline{S}_n(\cdot) - a(\cdot)n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \Gamma(\cdot), \tag{10}$$

*де* $\Gamma(\cdot) = \Gamma_X(\cdot)$ — *нормально розподілений в. е. простору $\mathbf{L}_p$ з коваріаційним оператором* $\mathbf{R}$, $\mathbf{E}\Gamma(s) = 0$.

Доведення цих теорем ґрунтується на кількох лемах. Прості загальні умови слабкої збіжності у просторі $\mathbf{L}_p$ одержано в роботі [10] (див. також [11]).

**Лема 2** [10]. *Нехай для деякого $p$, $1 \leq p < \infty$, вимірні випадкові процеси $\xi_1(s)$, $\xi_2(s), \ldots, \xi_n(s), \ldots$ і $\xi_0(s)$ задовольняють умову*

$$\sup_{0\leq s\leq 1} \mathbf{E}|\xi_n(s)|^p \leq C_p < \infty, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{11}$$

*Якщо скінченновимірні розподіли процесів $\xi_n(s)$ збігаються до скінченновимірних розподілів процесу $\xi_0(s)$ і, крім того, при $n \to \infty$*

$$\mathbf{E}|\xi_n(s)|^p \to \mathbf{E}|\xi_0(s)|^p \quad \forall s \in [0,1], \tag{12}$$

*то для будь-якого неперервного функціонала в* $\mathbf{L}_p$

$$f(\xi_n(\cdot)) \xrightarrow{D} f(\xi_0(\cdot)).$$

Наступна лема відноситься до класичної області випадкових блукань і добре відома для дійсної прямої. Але автору не відомі роботи, де вона була б сформульована в $R^{(m)}$. Неявно вона міститься у книзі А. В. Скорохода, Н. П. Слободенюка [4]. Ми одержимо її як наслідок одного результату [4].

**Лема 3.** *Нехай* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *— незалежні однаково розподілені в. в. в* $R^{(m)}$, $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $\mathbf{E}(\xi_n, z)^2 = (\mathbf{R}z, z)$, *де* $\mathbf{R}$ *— невід'ємний симетричний лінійний оператор, і* $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $S_0 = 0$, *а* $W(t) = \big(w_1(t), \ldots, w_m(t)\big)$ *— процес броунівського руху в* $R^{(m)}$, *для якого* $\mathbf{E}W(t) = 0$, $\mathbf{E}(W(t), z)^2 = t(\mathbf{R}z, z)$. *Якщо*

$$\overline{S}_n = \left(\max_{0\le k\le n} S_{k1}, \ldots, \max_{0\le k\le n} S_{km}\right),$$

$$\overline{W} = \left(\sup_{0\le t\le 1} w_1(t), \ldots, \sup_{0\le t\le 1} w_m(t)\right),$$

*то при* $n \to \infty$

$$\frac{\overline{S}_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \overline{W}. \tag{13}$$

***Доведення.*** Нехай $D^{(m)}_{[0,1]}$ — простір функцій $x(t)$, визначених на $[0,1]$, із значеннями в $R^{(m)}$, які не мають розривів 2-го роду і неперервні справа. Так само, як і у книзі [4, с. 68], позначимо через $\mathfrak{F}$ циліндричну $\sigma$-алгебру простору $D^{(m)}_{[0,1]}$, $\mu$ — міра на $\mathfrak{F}$, породжена вінеровим процессом $W(t)$, $\mathfrak{F}_\mu$ — множина функціоналів $f(x(\cdot))$, визначених на $D^{(m)}_{[0,1]}$, які задовольняють умови:

а) функціонал $f(x(\cdot))$ є вимірним відносно $\sigma$-алгебри $\mathfrak{F}$;

б) існує $\mathfrak{F}$-вимірна множина $G \subset D^{(m)}_{[0,1]}$ така, що $\mu(G) = 1$ і для будь-якого $x(\cdot) \in G$ і послідовності $x_n(\cdot)$ із $D^{(m)}_{[0,1]}$ виконується рівність $\lim_{n\to\infty} f(x_n(\cdot)) = f(x(\cdot))$, якщо $\lim_{n\to\infty} \sup_t |x_n(t) - x(t)| = 0$.

Функціонал $f(x(\cdot))$, визначений на $D^{(m)}_{[0,1]}$, називається однорідним степеня $\alpha$, якщо при $\lambda > 0$ виконується рівність $f(\lambda x(\cdot)) = \lambda^\alpha f(x(\cdot))$.

Для однорідного степеня $\alpha$ функціонала $f(x(\cdot))$, який належить $\mathfrak{F}_\mu$, із [4] (гл. 2, теорема 2) маємо асимптотичне співвідношення

$$\frac{f(S_{[nt]})}{n^{\alpha/2}} \xrightarrow{D} f(W(t)). \tag{14}$$

Нехай $\phi(x)$, $\phi\colon R^{(m)} \to R^{(1)}$, — неперервна однорідна функція степеня $\alpha$, тобто $\phi(\lambda x) = \lambda^\alpha \phi(x)$. Розглянемо функціонал $f_0(x(\cdot)) = \phi(\sup_t x(t))$. Зрозуміло, що $f_0(x(\cdot))$ — однорідний функціонал степеня $\alpha$. Неважко перевірити, що $f_0(x(\cdot)) \in \mathfrak{F}_\mu$. Дійсно, цей функціонал є неперервним у топології рівномірної збіжності в $D^{(m)}_{[0,1]}$. Вимірність його відносно $\mathfrak{F}$ випливає із рівності $f_0(x(\cdot)) = \lim_{n\to\infty} \phi\left(\sup_{1\le k\le n} x\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ (див. аналогічний приклад в [4, с. 73, 78]). Для функціонала $f_0(x(\cdot))$ із (14) одержуємо

$$\frac{\phi(\overline{S}_n)}{n^{\alpha/2}} \xrightarrow{D} \phi(\overline{W}). \tag{15}$$

Покладемо $\phi_0(x) = \sum_{i=1}^m c_i x_i$, де $c_1, \ldots, c_m$ — довільні числа, $x = (x_1, \ldots \ldots, x_m)$. Зрозуміло, що $\phi_0(x)$ — неперервна однорідна функція степеня 1. Тому згідно з (15)

$$\frac{\sum_{i=1}^m c_i \overline{S}_{ni}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \sum_{i=1}^m c_i \overline{w}_i, \tag{16}$$

де $\overline{S}_{ni} = \max_{1 \le k \le n} S_{ki}$, $\overline{w}_i = \sup_{0 \le t \le 1} w_i(t)$. Оскільки (16) виконується для довільних $(c_i)$, то звідси випливає (13) [12, с. 76].

Лему доведено.

**Лема 4** [13]. *Нехай* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *— незалежні в. в.,* $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $A_{p,n} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}|\xi_i|^p$, $B_n^2 = A_{2,n}$. *Тоді при* $2 \le p < \infty$

$$\mathbf{E}|S_n|^p \le C_p(A_{p,n} + B_n^p).$$

**Лема 5.** *Нехай* $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *— незалежні однаково розподілені в. в.,* $\mathbf{E}\xi = a > 0$, $m_p(\xi) = \left(\mathbf{E}|\xi - a|^p\right)^{1/p}$, $\overline{S}_n = \sup_{1 \le k \le n} \sum_{i=1}^k \xi_i$. *Тоді*

$$\mathbf{E}\left|\frac{\overline{S}_n - na}{\sqrt{n}}\right|^p \le C_p(m_{p^*}(\xi))^p,$$

*де* $p^*$ *визначено у співвідношенні* (7).

***Доведення.*** Покладемо $\zeta_k = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^k \xi_i - na\right)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Оскільки $\mathbf{E}\xi = a > 0$, то $(\zeta_k)_1^n$ — субмартингал і згідно з [14, с. 78] при $1 < p < \infty$

$$\mathbf{E}\left|\max_{1 \le k \le n} \zeta_k^+\right|^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}|\zeta_n^+|^p, \tag{17}$$

як завжди, $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = \max(-x, 0)$.

Розглянемо випадок $2 \le p < \infty$. Враховуючи оцінку (17) та рівність

$$\frac{\overline{S}_n - na}{\sqrt{n}} = \max_{1 \le k \le n} \zeta_k \quad \text{м. н.},$$

маємо

$$\mathbf{E}\left|\frac{\overline{S}_n - na}{\sqrt{n}}\right|^p \le \mathbf{E}\left|\left(\max_{1 \le k \le n} \zeta_k\right)^+\right|^p + \mathbf{E}\left|\left(\max_{1 \le k \le n} \zeta_k\right)^-\right|^p \le$$

$$\le \mathbf{E}\left|\max_{1 \le k \le n} \zeta_k^+\right|^p + \mathbf{E}|(\zeta_n)^-|^p \le \left(1 + \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\right)\mathbf{E}|\zeta_n|^p. \tag{18}$$

Далі скористаємось нерівністю Розенталя із леми 4:

$$\mathbf{E}|\zeta_n|^p \le C_p(n^{1-p/2}|m_p(\xi)|^p + |m_2(\xi)|^p) \le C_p\big|m_p(\xi)\big|^p. \tag{19}$$

Із нерівностей (18), (19) отримуємо оцінку з леми 5 для $2 \le p < \infty$.

Випадок $1 \le p < 2$ зводиться до попереднього, оскільки

$$\mathbf{E}|\eta|^p \le \left(\mathbf{E}|\eta|^2\right)^{p/2} \quad \text{при} \quad 1 \le p < 2.$$

Лему доведено.

***Доведення теореми* 1.** Достатньо перевірити виконання умов леми 2 при $\xi_n(s) = \overline{S}_n(s)/\sqrt{n}$, $\xi_0(s) = \overline{W}(s)$ . Із леми 3 безпосередньо випливає, що скінченновимірні розподіли випадкового процесу $\overline{S}_n(s)/\sqrt{n}$ збігаються до скінченновимірних розподілів процесу $\overline{W}(s)$.

Перевіримо умову (11). Використовуючи нерівність Леві та нерівність симетризації з [15, c. 211, 222], $\mathbf{E}\|Y\| \le \mathbf{E}\|Y - Y^{'}\|$, отримуємо

$$\mathbf{E}\left|\frac{\overline{S}_n(s)}{\sqrt{n}}\right|^p \le \mathbf{E}\left|\frac{\max_{1\le k\le n}|S_k(s)|}{\sqrt{n}}\right|^p \le$$

$$\le \mathbf{E}\left|\frac{\max_{1\le k\le n}|S_k(s) - S_k'(s)|}{\sqrt{n}}\right|^p \le 2\mathbf{E}\left|\frac{S_n(s) - S_n'(s)}{\sqrt{n}}\right|^p \le$$

$$\le C_p\mathbf{E}\left|\frac{S_n(s)}{\sqrt{n}}\right|^p, \tag{20}$$

де $S_n'(s)$ — незалежна копія $S_n(s)$.

Останню величину в (20) при $2 \le p < \infty$ оцінимо за допомогою нерівності Розенталя із леми 4:

$$\mathbf{E}\left|\frac{S_n(s)}{\sqrt{n}}\right|^p \le C_p(n^{1-p/2}\mathbf{E}|X_1(s)|^p + (\mathbf{E}|X_1(s)|^2)^{p/2}) \le C_p\mathbf{E}|X_1(s)|^p. \tag{21}$$

Із нерівностей (20), (21) та умови (7) випливає оцінка (11) для $2 \le p < \infty$.

Випадок $1 \le p < 2$ так само, як і у лемі 5, зводиться до $p = 2$.

Оскільки для фіксованого $s$ в. в. $\overline{W}(s)$ однаково розподілена з $|\Gamma(s)|$ (див. зауваження 1), то, враховуючи оцінку (9), приходимо до висновку, що і $\overline{W}(s)$ задовольняє умову (11).

Для завершення доведення залишилося перевірити умову (12), тобто умову

$$\mathbf{E}\left|\frac{\overline{S}_n(s)}{\sqrt{n}}\right|^p \to \mathbf{E}|\overline{W}(s)|^p \quad \forall s \in [0, 1]. \tag{22}$$

Оцінки (20), (21) показують, що при умові (8) величини $\left|\dfrac{\overline{S}_n(s)}{\sqrt{n}}\right|^p$ будуть рівномірно інтегровними. А оскільки їх розподіл збігається до розподілу $\overline{W}(s)$, то звідси маємо (22) [12, c. 51].

Теорему доведено.

***Зауваження* 2.** Покладемо в умовах леми 3

$$\overline{S}_n^* = \left(\max_{0\le k\le n}|S_{k1}|, \ldots, \max_{0\le k\le n}|S_{km}|\right),$$

$$\overline{W}^* = \left(\sup_{0\le t\le 1}|w_1(t)|, \ldots, \sup_{0\le t\le 1}|w_m(t)|\right).$$

Аналіз доведення леми 3 показує, що в $R^m$ має місце співвідношення

$$\frac{\overline{S}_n^*}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \overline{W}^*.$$

Звідси, як і при доведенні теореми 1, можна отримати для простору $\mathbf{L}_p$ співвідношення

$$\frac{\overline{S}_n^*(\cdot)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \overline{W}^*(\cdot),$$

де $\overline{S}_n^*(s) = \max_{1\le k\le n} |S_k(s)|$, $\overline{W}^*(s) = \sup_{0\le t\le 1} |W(t,s)|$.

***Доведення теореми* 2** аналогічне доведенню попередньої теореми. Перевіримо виконання умов леми 2 при $\xi_n(s) = (\overline{S}_n(s) - a(s)n)/\sqrt{n}$, $\xi(s) = \Gamma(s)$. Для цього застосуємо результат про розподіл максимуму послідовних сум незалежних однаково розподілених випадкових векторів із [5, 6]. Через $R_+^{(m)}$ позначимо множину $\{x \in R^{(m)} \colon x_i > 0,\, i = 1, 2, \ldots, m\}$. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — незалежні однаково розподілені в. в. із значеннями в $R^{(m)}$, $\mathbf{E}\xi_n = a$, $\mathbf{E}(\xi_n - a,\, z)^2 = (\mathbf{R}z, z)$. Якщо в умовах і позначеннях леми 3 $a \in R_+^{(m)}$, то (див. [5, 6]) при $n \to \infty$

$$\frac{\overline{S}_n - an}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} W(1), \tag{23}$$

$W(t)$ — процес броунівського руху в $R^{(m)}$ із леми 3.

Із співвідношення (23) маємо збіжність скінченновимірних розподілів випадкового процесу $(\overline{S}_n(s) - a(s)n)/\sqrt{n}$ до скінченновимірних розподілів процесу $\Gamma(s)$.

Умова (11) з леми 2 фактично доводиться у лемі 5.

Міркування з доведення теореми 1, використані при перевірці умови (12), залишаються без змін і в даному випадку.

Теорему доведено.

**4. Застосування до емпіричних процесів.** Для незалежних однаково розподілених в. в. $\xi$, $\xi_1$, $\xi_2, \ldots$ в $R^1$ з функцією розподілу $F(t)$ розглянемо емпіричну функцію розподілу

$$F_n^*(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,t]}(\xi_i), \quad -\infty < t < \infty.$$

У роботі [16, с. 134 – 141] А. М. Колмогоров ввів статистику

$$D_n = \sup_{-\infty<t<\infty} \left|F_n^*(t) - F(t)\right|$$

і довів, що для неперервної функції розподілу $F(t)$, $x > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(\sqrt{n}D_n < x\big) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\exp(-2n^2x^2). \tag{24}$$

Наступний важливий результат належить М. В. Смирнову [17]. Він знайшов розподіл статистик $\omega^2$, $D_n^+$, $D_{m,n}$.

У подальшому дослідження асимптотичної поведінки емпіричної функції були пов'язані з рівномірним емпіричним процесом

$$\beta_n(s) = \sqrt{n}(F_n^*(s) - s), \quad 0 \le s \le 1,$$

для якого емпірична функція $F_n^*(s)$ будується по в. в. $\xi_i$, рівномірно розподілених на $[0,1]$. Огляди цих досліджень можна знайти в роботах [18–20].

На думку автора значний інтерес має асимптотичний аналіз наступних статистик типу Колмогорова–Смирнова та $\omega^2$:

$$\sqrt{n}\,\overline{D}_n = \sup_{0\le s\le 1}\ \sup_{1\le k\le n} \sqrt{k/n}\,\big|\beta_k(s)\big|\,,$$

$$\sqrt{n}\,\overline{D}_n^+ = \sup_{0\le s\le 1}\ \sup_{1\le k\le n} \sqrt{k/n}\,\beta_k(s)\,,$$

$$n\,\overline{\omega}_n^2 = \int\limits_0^1 \left|\sup_{1\le k\le n} \sqrt{k/n}\,\beta_k(s)\right|^2 ds\,,$$

$$n\,\overline{\Omega}_n^2 = \int\limits_0^1 \frac{\big|\sup_{1\le k\le n}\sqrt{k/n}\,\beta_k(s)\big|^2}{s(1-s)}ds\,.$$

Граничні теореми для двох останніх статистик будуть виведені із загальних результатів п. 3 про слабку збіжність максимуму сум незалежних випадкових процесів у просторі $\mathbf{L}_p$.

Далі через $W(t,\cdot)$ будемо позначати нескінченновимірний вінерів процес, для якого $\mathbf{E}W=0$, і для будь-якого $t\in[0,1]$ $W(t,\cdot)$ однаково розподілений з $\sqrt{t}W_0(\cdot)$, $\big(W_0(s), s\in[0,1]\big)$ — броунівський міст, тобто

$$\mathbf{E}W(t_1,s_1)W(t_2,s_2) = \min(t_1,t_2)(\min(s_1,s_2)-s_1s_2).$$

***Наслідок* 1.** *При* $n\to\infty$

$$n\,\overline{\omega}_n^2 \xrightarrow{D} \int\limits_0^1 |\sup_t W(t,s)|^2 ds, \tag{25}$$

$$n\,\overline{\Omega}_n^2 \xrightarrow{D} \int\limits_0^1 \frac{|\sup_t W(t,s)|^2}{s(1-s)}ds. \tag{26}$$

***Доведення.*** Щоб установити слабку збіжність (25), покладемо

$$X_n(s) = I_{(-\infty,s]}(\xi_n) - s, \quad 0\le s\le 1,$$

де в. в. $\xi_n$ рівномірно розподілені на $[0,1]$.

Зрозуміло, що

$$\mathbf{E}X_n(s)=0, \qquad \mathbf{E}X_n(s)X_n(u) = \min(s,u)-su \quad \text{і} \quad S_k(s)/\sqrt{n} = \sqrt{k/n}\,\beta_k(s).$$

Оскільки $|X_n(s)|\le 1$, то умови (7), (8) виконуються для будь-якого $1\le p<\infty$. Тому (25) одержуємо із теореми 1 у просторі $\mathbf{L}_2$ .

Доведення (26) проводиться аналогічним чином. Треба взяти

$$X_n(s) = \frac{I_{(-\infty,s]}(\xi_n)-s}{[s(1-s)]^{1/2}}, \quad 0<s<1, \qquad X_n(0)=X_n(1)=0.$$

Неважко обчислити моменти в. в. $X_n(s)$:

$$\mathbf{E}\big|X_n(s)\big|^2 = 1, \quad 0 < s < 1,$$

$$\mathbf{E}\big|X_n(s)\big|^{2+\epsilon} = \frac{(1-s)^{1+\epsilon} + s^{1+\epsilon}}{(s(1-s))^{\epsilon/2}} < \infty, \quad 0 < s < 1.$$

Таким чином, випадковий процес $X_n(s)$ задовольняє умови (7), (8). Залишилося застосувати теорему 1.

Наслідок доведено.

***Зауваження* 3.** Для статистик

$$\int\limits_0^1 \left(\sup_{1\le k\le n} \sqrt{k/n}\,\big|\beta_k(s)\big|\right)^2 ds, \qquad \int\limits_0^1 \frac{\left(\sup_{1\le k\le n} \sqrt{k/n}\,\big|\beta_k(s)\big|\right)^2}{s(1-s)} ds$$

також можна записати асимптотичні співвідношення, аналогічні (25), (26), із заміною $W(t,s)$ на $|W(t,s)|$ (див. зауваження 2).

Наведені вище результати роблять правдоподібним припущення, що

$$\overline{D}_n \xrightarrow{D} \sup_{t,s} \big|W(t,s)\big|,$$

$$\overline{D}_n^{+} \xrightarrow{D} \sup_{t,s} W(t,s). \tag{27}$$

Можливо, що співвідношення (27) можна вивести із результатів праці Дж. Кіфера [7]. Цікаво, що результати [7] про попадання траєкторій емпіричних процесів в криволінійні області було отримано іншим шляхом (використовувались глибокі узагальнення методу вкладення Скорохода для емпіричних процесів).

Покладемо

$$\beta_n(\lambda, s) = \sqrt{n}(F_n(s) - \lambda s), \quad 0 \le s \le 1\,,$$

$$\overline{\omega}_n^2(\lambda) = \int\limits_0^1 \left|\sup_{1\le k\le n} \sqrt{k/n}\,\beta_k(\lambda, s) - (1-\lambda)\sqrt{n}s\right|^2 ds.$$

***Наслідок* 2.** *При* $0 \le \lambda < 1$, $n \to \infty$

$$\overline{\omega}_n^2(\lambda) \xrightarrow{D} \int\limits_0^1 \big|W_0(s)\big|^2 ds\,. \tag{28}$$

Наслідок 2 виводиться з теореми 2 так само, як наслідок 1 із теореми 1.

Зазначимо, що при $0 < \lambda < 1$ граничний розподіл не залежить від $\lambda$, а при $\lambda \le 0$ співвідношення (28) збігається з класичним результатом для статистики $\omega^2$.

Звичайно, для статистики типу $\Omega^2$ можна також одержати асимптотичне співвідношення, аналогічне (28).

***Зауваження* 4.** У роботі ставиться задача дослідження умов, при яких має місце слабка збіжність максимуму сум незалежних випадкових процесів і знаходиться її розв'язок у просторі $\mathbf{L}_p$. Наведені застосування до емпіричних процесів (див. співвідношення (27)) показують актуальність такої задачі і для просторів $\mathbf{C}[0,1]$ та $\mathbf{D}[0,1]$.

1. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
2. *Боровков А. А.* Колмогоров и граничные задачи теории вероятностей // Успехи мат. наук. – 2004. – **59**, № 1. – С. 91 – 102.
3. *Cramer H.* Collectiv risk theory. – Stochgolm: Esselte, 1955. – 92 p.
4. *Скороход А. В., Слободенюк Н. П.* Предельные теоремы для случайных блужданий. – Киев: Наук. думка, 1970. – 304 с.
5. *Паулаускас В.* О распределении максимума последовательных сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов // Liet. mat. rinkinys. – 1973. – **13**, № 2. – С. 133 – 138.
6. *Паулаускас В., Стейшунас С.* О скорости сходимости распределения максимума последовательных сумм независимых разнораспределенных случайных векторов к предельному закону // Там же. – 1973. – **13**, № 2. – С. 139 – 147.
7. *Kiefer J.* Skorokhod embedding of multivariate RV's, and the sample DF // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1972. – **24**, № 1. – S. 1 – 35.
8. *Ламперти Дж.* Вероятность. – М.: Наука, 1973. – 184 с.
9. *Мацак І. К.* Гранична теорема для максимуму гауссівських випадкових величин у просторі $C$ // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 7. – С. 1006 – 1008.
10. *Grinblat L. S.* A limit theorem for measurable random processes and its appliications // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – **61**, № 2. – P. 371 – 376.
11. *Боровков А. А.* Сходимость мер и случайных процессов // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, № 2. – С. 3 – 68.
12. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.
13. *Rosenthal H. P.* On the subspaces of $L^p$ $(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables // Isr. J. Math. – 1970. – **8**, № 3. – P. 273 – 303.
14. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3 т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 664 с.
15. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
16. *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1986. – 536 с.
17. *Смирнов Н. В.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1970. – 290 с.
18. *Gaenssler P., Stute W.* Empirical processes: a survey of results for independent and identically distributed random variables // Ann. Probab. – 1979. – **7**, № 2. – P. 193 – 243.
19. *Csorgo M., Revesz P.* Strong approximations in probability and statistics. – Budapest: Akad. Kiado, 1981. – 284 p.
20. *Хмаладзе Э. В.* Некоторые применения теории мартингалов в статистике // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, № 6. – С. 194 – 212.

Одержано 01.11.07