УДК 517.983.27

І. П. Гаврилюк (Професійна академія, Айзенах, Німеччина),
А. В. Клименко, В. Л. Макаров, Н. О. Россохата (Ін-т математики НАН України, Київ)

FD-МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧІ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ З НЕЛІНІЙНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

By using the functional-discrete approach and the Adomian decomposition method, we propose a numerical algorithm to find an approximate solution of eigenvalue problem with nonlinear potential. The potential consists of the linear part depending on an independent variable and of the nonlinear autonomous part. We prove that the convergence rate of the algorithm is exponential and is improved as the order number of eigenvalue increases. We investigate the interdependency of the piecewise constant approximation of linear part of the potential and the nonlinear part and their influence on the rate of convergence of the method. We justify theoretical results by numerical examples.

На основании функционально-дискретного подхода с использованием полиномов Адомяна предложен численный алгоритм для задачи на собственные значения с потенциалом, состоящим из линейной части, которая зависит от независимой переменной, и нелинейной автономной части. Доказана экспоненциальная скорость сходимости алгоритма, которая улучшается с ростом порядкового номера собственного значения. Исследовано взаимное влияние кусочно-постоянной аппроксимации линейной части потенциала и нелинейности на сходимость метода. Теоретические результаты подтверждены численными расчетами.

1. Вступ. У роботах [1 – 10] запропоновано новий чисельний алгоритм (FD-метод) для задач Штурма – Ліувілля. В роботі [11] даний метод розвинено для задач на власні значення для одновимірного рівняння Шредінгера з нелінійним потенціалом автономного типу, існування і єдиність розв'язку яких та базисні властивості власних функцій з нормалізуючою диференціальною умовою вивчались у роботі [12] і цитованій в ній літературі. В [11] також показано, що як для лінійної, так і для нелінійної задач даний метод має експоненціальну швидкість збіжності, яка покращується з ростом порядкового номера власного значення. Для лінійної задачі в роботах [1 – 3, 8] показано, що швидкість збіжності також покращується із зростанням кількості сходинок кусково-сталої апроксимації функції, що описує потенціал. Це дозволяло обчислювати власні значення з меншими порядковими номерами.

Метою даної роботи є дослідження FD-методу для нелінійної задачі на власні значення з потенціалом, який крім нелінійної складової містить і лінійну частину $q(x)$, а саме, вивчення взаємного впливу обох складових на можливість обчислення власних значень з меншими порядковими номерами. Як і очікувалось, швидкість збіжності методу є експоненціальною і покращується з ростом порядкового номера власного значення. Однак, на відміну від лінійного випадку, із покращенням якості апроксимації лінійної складової потенціалу знаменник прогресії прямує до деякої додатної величини, яка залежить від порядкового номера власного значення. Це означає, що на відміну від лінійного випадку можуть існувати обмеження на порядковий номер, починаючи з якого можна обчислити власні значення за допомогою FD-методу.

Робота побудована таким чином. У п. 2 вивчається нелінійна задача на власні значення з диференціальною нормалізуючою умовою (рівність нулеві похідної на лівому кінці). Отримано умови збіжності методу, доведено теорему про експоненціальну швидкість збіжності. Пункт 3 присвячено задачі з інтегральною нормалізуючою умовою (задається L_2-норма власної функції u_n, $\|u_n\|^2 = M$). Отримано умови збіжності методу, показано експоненціальну швидкість збіжності методу. Наведено результати чисельного експерименту. Крім того, п. 3 містить експериментальну частину з вивчення асимптотичної поведінки власних значень відносно M, в якій асимптотика власних значень для задачі з автономним потенціалом порівнюється з теоретичними результатами роботи [13], а також вивчається вплив на асимптотику наявності функції $q(x)$.

2. Чисельний алгоритм для задачі з диференціальною нормалізуючою умовою. Розглянемо задачу

$$u''(x) + \lambda u(x) - q(x)u(x) - N(u(x)) = 0, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$
$$u(0) = u(1) = 0,$$

де потенціал q належить простору $L_2(0,1)$, $q(x) \geq 0$, а нелінійна функція $N\colon \mathbf{R}^1 \to \to \mathbf{R}^1$ аналітична відносно u і задовольняє умови

$$N(0) = 0,$$
$$\left|N_u^{(k)}(u)\right| = \left|\frac{d^k(N(u))}{du^k}\right| \leq \bar{N}^{(k)}(|u|), \quad x \in [0,1], \tag{2}$$

$\bar{N}(u)$ — аналітична функція з невід'ємними похідними для $u \geq 0$.

Нормалізуючу умову запишемо у вигляді

$$u'(0) = 1. \tag{3}$$

Згідно з ідеологією FD-методу розв'язок задачі (1) – (3) зображується у вигляді рядів

$$\lambda_n = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_n^{(j)}, \qquad u_n(x) = \sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)}(x),$$

а, відповідно, числовий розв'язок шукатимемо у вигляді зрізаних рядів

$$\lambda_n^m = \sum_{j=0}^{m} \lambda_n^{(j)}, \qquad u_n^m(x) = \sum_{j=0}^{m} u_n^{(j)}(x). \tag{4}$$

Початкове наближення $(\lambda_n^0, u_n^0(x))$ — розв'язок базової задачі на власні значення

$$\frac{d^2}{dx^2}u_n^{(0)}(x) + \left(\lambda_n^{(0)}(\bar{q}) - \bar{q}(x)\right)u_n^{(0)}(x) = 0, \quad x \in (0,1),$$
$$u_n^{(0)}(0) = u_n^{(0)}(1) = 0, \qquad \frac{du_n^{(0)}(0)}{dx} = 1, \tag{5}$$

де $\bar{q}(x)$ — кусково-стала апроксимація функції $q(x)$.

Поправки $\left(\lambda_n^{j+1}, u_n^{j+1}(x)\right)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$, знаходимо таким чином: $u_n^{j+1}(x)$ — розв'язок відповідної крайової задачі для неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2}{dx^2}u_n^{(j+1)}(x) + (\lambda_n^0(\bar{q}) - \bar{q}(x))u_n^{j+1}(x) = F_n^{(j+1)}(x), \quad x \in (0,1),$$
$$u_n^{(j+1)}(0) = u_n^{(j+1)}(1) = \frac{du_n^{(j+1)}(0)}{dx} = 0, \tag{6}$$

з правою частиною

$$F_n^{(j+1)}(x) = -\sum_{p=0}^{j} \lambda_n^{(j+1-p)}(\bar{q})u_n^{(p)}(x) + \big(q(x) - \bar{q}(x)\big)u_n^{(j)}(x) + A_n^{(j)}(u_n^{(0)}, \ldots, u_n^{(j)}), \tag{7}$$

де поліноми Адомяна [14]

$$A_n^{(j)}(u_n^{(0)}, \ldots, u_n^{(j)}) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j N(\sum_{j=0}^{\infty} u_n^{(j)}(x)t^j)}{\partial t^j}\bigg|_{t=0} =$$
$$= \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_j=j} N_n^{(\alpha_1)}(u_n^{(0)}(x))\frac{[u_n^{(1)}(x)]^{\alpha_1-\alpha_2}}{(\alpha_1-\alpha_2)!} \ldots$$
$$\ldots \frac{\big[u_n^{(j-1)}(x)\big]^{\alpha_{j-1}-\alpha_j}}{(\alpha_{j-1}-\alpha_j)!}\frac{\big[u_n^{(j)}(x)\big]^{\alpha_j}}{\alpha_j!}, \quad j > 0, \tag{8}$$
$$A_n^{(0)}\big(u_n^{(0)}\big) = N\big(u_n^{(0)}\big).$$

Поправку $\lambda_n^{(j+1)}(\bar{q})$ знаходимо з умови розв'язності неоднорідного рівняння з (6):

$$\lambda_n^{(j+1)}(\bar{q}) = \left\{ -\sum_{p=1}^{j} \lambda_n^{(j+1-p)}(\bar{q}) \int_0^1 u_n^{(p)}(\xi)u_n^{(0)}(\xi)d\xi + \right.$$
$$+ \int_0^1 (q(\xi) - \bar{q}(\xi))u_n^{(j)}(\xi)u_n^{(0)}(\xi)d\xi +$$
$$\left. + \int_0^1 A_n^{(j)}(u_n^{(0)}(\xi), \ldots, u_n^{(j)}(\xi))u_n^{(0)}(\xi)d\xi \right\} \Big/ \big\|u_n^{(0)}\big\|^2, \tag{9}$$

де $\|\cdot\|$ — норма у просторі $L_2(0,1)$.

Оцінимо похибку алгоритму (4) – (10) таким чином:

$$\|u_n - u_n^m\|_\infty \le \sum_{j=m+1}^{\infty} \Big\|u_n^{(j)}\Big\|_\infty,$$
$$|\lambda_n - \lambda_n^m| \le \sum_{j=m+1}^{\infty} \Big|\lambda_n^{(j)}\Big|. \tag{10}$$

Щоб оцінити $\big\|u_n^{(j+1)}\big\|_\infty$ і $\big|\lambda_n^{(j+1)}\big|$ в (10), перепишемо неоднорідну задачу (6) у вигляді

$$\frac{d^2}{dx^2}u_n^{(j+1)}(x)+\lambda_n^{(0)}(0)u_n^{(j+1)}(x)=\hat{F}_n^{(j+1)}(x)=F_n^{(j+1)}(x)-$$

$$-\left[\lambda_n^{(0)}(\bar{q})-\lambda_n^{(0)}(0)-\bar{q}(x)\right]u_n^{(j+1)}(x),\quad x\in(0,1),$$

$$u_n^{(j+1)}(0)=u_n^{(j+1)}(1)=\frac{du_n^{(j+1)}(0)}{dx}=0.$$

Її розв'язок можна записати у вигляді

$$u_n^{(j+1)}(x)=\int\limits_0^x\frac{\sin\left(\pi n(x-\xi)\right)}{\pi n}\Bigg\{-\left[\lambda_n^{(0)}(\bar{q})-\lambda_n^{(0)}(0)-\bar{q}(\xi)\right]u_n^{(j+1)}(\xi)-$$

$$-\sum_{p=0}^{j}\lambda_n^{(j+1-p)}(\bar{q})u_n^{(p)}(\xi)-(q(\xi)-\bar{q}(\xi))u_n^{(j)}(\xi)+A_n^{(j)}\left(u_n^{(0)}(\xi),\ldots,u_n^{(j)}(\xi)\right)\Bigg\}d\xi, \tag{11}$$

звідки

$$\left|u_n^{(j+1)}(x)\right|\le\frac{1}{\pi n}\Bigg\{\left\|\lambda_n^{(0)}(\bar{q})-\lambda_n^{(0)}(0)-\bar{q}\right\|_\infty\int\limits_0^x\left|u_n^{(j+1)}(\xi)\right|d\xi+$$

$$+\sum_{p=0}^{j}\left|\lambda_n^{(j+1-p)}(\bar{q})\right|\left\|u_n^{(p)}\right\|_\infty+\|q-\bar{q}\|\left\|u_n^{(j)}\right\|_\infty+$$

$$+\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_j=j}\bar{N}_n^{(\alpha_1)}\left(\left\|u_n^{(0)}\right\|_\infty\right)\frac{\left\|u_n^{(1)}\right\|_\infty^{\alpha_1-\alpha_2}}{(\alpha_1-\alpha_2)!}\ldots\frac{\left\|u_n^{(j-1)}\right\|_\infty^{\alpha_{j-1}-\alpha_j}}{(\alpha_{j-1}-\alpha_j)!}\frac{\left\|u_n^{(j)}\right\|_\infty^{\alpha_j}}{\alpha_j!}\Bigg\}.$$

Застосовуючи лему Гронуолла до останньої нерівності і позначаючи

$$d_n=\left\|\lambda_n^{(0)}(\bar{q})-\lambda_n^{(0)}(0)-\bar{q}\right\|_\infty, \tag{12}$$

отримуємо оцінку

$$\left\|u_n^{(j+1)}\right\|_\infty\le\frac{e^{d_n/\pi n}}{\pi n}\Bigg\{\sum_{p=0}^{j}\left|\lambda_n^{(j+1-p)}(\bar{q})\right|\left\|u_n^{(p)}\right\|_\infty+\left\|q-\bar{q}\right\|\left\|u_n^{(j)}\right\|_\infty+$$

$$+\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_j=j}\bar{N}_n^{(\alpha_1)}\left(\left\|u_n^{(0)}\right\|_\infty\right)\frac{\left\|u_n^{(1)}\right\|_\infty^{\alpha_1-\alpha_2}}{(\alpha_1-\alpha_2)!}\ldots\frac{\left\|u_n^{(j-1)}\right\|_\infty^{\alpha_{j-1}-\alpha_j}}{(\alpha_{j-1}-\alpha_j)!}\frac{\left\|u_n^{(j)}\right\|_\infty^{\alpha_j}}{\alpha_j!}\Bigg\}, \tag{13}$$

де $\|\cdot\|_\infty$ — норма у просторі $L_\infty(0,1)$. Зауважимо, що має місце нерівність $d_n\le$ $\le 2\|\bar{q}\|_\infty$.

Щоб оцінити $\left\|u_n^{(0)}\right\|_\infty$, запишемо розв'язок базової задачі (5) у вигляді

$$u_n^{(0)}(x) = \frac{\sin(\pi n x)}{\pi n} -$$

$$- \int_0^x \frac{\sin(\pi n(x-\xi))}{\pi n} \Big(\lambda_n^{(0)}(\bar{q}) - \lambda_n^{(0)}(0) - \bar{q}(\xi)\Big) u_n^{(0)}(\xi) d\xi,$$

звідки

$$\left|u_n^{(0)}(x)\right| \le \frac{1}{\pi n} + \frac{d_n}{\pi n} \int_0^x \left|u_n^{(0)}(\xi)\right| d\xi.$$

Застосувавши лему Гронуолла до останньої нерівності, прийдемо до оцінки

$$\left\|u_n^{(0)}\right\|_\infty \le \frac{e^{d_n/\pi n}}{\pi n},$$

а з формули (9) отримаємо оцінку

$$\left|\lambda_n^{(j+1)}(\bar{q})\right| \le \Bigg(\sum_{p=1}^{j} \left|\lambda_n^{(j+1-p)}(\bar{q})\right| \left\|u_n^{(p)}\right\|_\infty + \|q - \bar{q}\| \left\|u_n^{(j)}\right\|_\infty +$$

$$+ \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_j = j} \bar{N}^{(\alpha_1)} \left(\left\|u_n^{(0)}\right\|_\infty\right) \frac{\left\|u_n^{(1)}\right\|_\infty^{\alpha_1 - \alpha_2}}{(\alpha_1 - \alpha_2)!} \cdots$$

$$\cdots \frac{\left\|u_n^{(j-1)}\right\|_\infty^{\alpha_{j-1} - \alpha_j}}{(\alpha_{j-1} - \alpha_j)!} \frac{\left\|u_n^{(j)}\right\|_\infty^{\alpha_j}}{\alpha_j!} \Bigg) \Big/ \left\|u_n^{(0)}\right\|. \tag{14}$$

Ввівши числові послідовності

$$u_{j+1} = \frac{\left\|u_n^{(j+1)}\right\|_\infty}{\left\|u_n^{(0)}\right\|} \left(\frac{\pi n e^{-d_n/\pi n}}{\|q - \bar{q}\|}\right)^{j+1},$$

$$\mu_{j+1} = \frac{\left|\lambda_n^{(j+1)}\right|}{\left\|q - \bar{q}\right\|} \left(\frac{\pi n e^{-d_n/\pi n}}{\|q - \bar{q}\|}\right)^{j} \tag{15}$$

і їх числові мажоранти

$$u_{j+1} \le \bar{u}_{j+1}, \qquad \bar{u}_0 = \frac{e^{d_n/\pi n}}{\pi n \left\|u_n^{(0)}\right\|}, \qquad \mu_{j+1} \le \bar{\mu}_{j+1},$$

з (13) і (14) одержимо систему мажоруючих рівнянь

$$\bar{u}_{j+1} = \sum_{p=0}^{j} \bar{\mu}_{j+1-p} \bar{u}_p + \bar{u}_j + \frac{1}{\|q - \bar{q}\|} \bar{A}^j \left(\bar{N}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_j\right),$$

$$\bar{\mu}_{j+1} = \sum_{p=1}^{j} \bar{\mu}_{j+1-p} \bar{u}_p + \bar{u}_j + \frac{1}{\|q - \bar{q}\|} \bar{A}^j \left(\bar{N}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_j\right) = \bar{u}_{j+1} - \bar{\mu}_{j+1} \bar{u}_0,$$

звідки

$$\bar{u}_{j+1} = \sum_{p=1}^{j} \bar{u}_{j+1-p}\bar{u}_p + (1+\bar{u}_0)\bar{u}_j + \frac{1+u_0}{\|q-\bar{q}\|}\bar{A}^j\left(\bar{N}, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_j\right). \tag{16}$$

Ввівши твірну функцію

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \bar{u}^j \tag{17}$$

і позначивши $\bar{f}(z) = f(z) - u_0$, з (16) отримаємо рівняння для $\bar{f}(z)$:

$$\left[\bar{f}(z)\right]^2 - \bar{f}(z) + z\frac{1+\bar{u}_0}{\|q-\bar{q}\|}\left(\|q-\bar{q}\|\left(\bar{f}+\bar{u}_0\right) + \bar{N}\left(\bar{f}+\bar{u}_0\right)\right) = 0.$$

Виразимо з цього рівняння z як функцію від $\bar{f}$:

$$z(\bar{f}) = \frac{\|q-\bar{q}\|}{1+\bar{u}_0}\frac{\bar{f}(1-\bar{f})}{(\bar{f}+\bar{u}_0)\|q-\bar{q}\| + \bar{N}(\bar{u}_0+\bar{f})}.$$

Оскільки z повинно бути невід'ємним, то $\bar{f}$ змінюється на $[0,1]$. Неважко переконатись, що на цьому відрізку функція $z(\bar{f})$ має один максимум

$$z_{\max} = R = z(\bar{f}_{\max}), \tag{18}$$

де $\bar{f}_{\max}$ є коренем рівняння $z'(\bar{f}_{\max}) = 0$.

Таким чином, ряд (17) збігається для всіх $z \in [0,R]$, тобто існує додатна твірна функція $f(z)$, і

$$R^j\bar{u}_j \le \frac{C}{j^{1+\epsilon}},$$

де ϵ і C — додатні сталі.

Повернувшись до позначень (15), отримаємо

$$\left\|u_n^{(j+1)}\right\|_\infty \le \frac{C}{(j+1)^{1+\epsilon}}\left(\frac{\|q-\bar{q}\|\,e^{d_n/\pi n}}{\pi n R}\right)^{j+1},$$

$$\left|\lambda_n^{(j+1)}\right| \le \frac{C\,\|q-\bar{q}\|}{R(j+1)^{1+\epsilon}}\left(\frac{\|q-\bar{q}\|\,e^{d_n/\pi n}}{\pi n R}\right)^{j}.$$

Звідси випливає, що за умови

$$r_n = \frac{\|q-\bar{q}\|}{\pi n R}e^{d_n/\pi n} < 1 \tag{19}$$

ряди (4) збігаються, і з (10) отримуємо оцінку

$$\begin{aligned}\left\|u_n - u_n^m\right\|_\infty &\le \sum_{j=m+1}^{\infty}\left\|u_n^{(j)}\right\|_\infty \le \frac{C}{(m+1)^{1+\epsilon}}\left(\frac{\|q-\bar{q}\|\,e^{d_n/\pi n}}{\pi n R}\right)^{n+1},\\ \left|\lambda_n - \lambda_n^m\right| &\le \sum_{j=m+1}^{\infty}\left|\lambda_n^{(j)}\right| \le \frac{C\,\|q-\bar{q}\|}{R(m+1)^{1+\epsilon}}\left(\frac{\|q-\bar{q}\|\,e^{d_n/\pi n}}{\pi n R}\right)^{n}.\end{aligned} \tag{20}$$

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми про збіжність FD-методу.

Теорема 1. *Нехай виконується умова* (2), *а власне значення базової задачі* (5) *з порядковим номером n задовольняє умову* (19), *де* d_n *задається формулою* (12), *а R — формулою* (18). *Тоді наближений розв'язок задачі* (1) – (3) *з порядковим номером* n, *знайдений згідно з чисельним алгоритмом* (4) – (9), *збігається до відповідного точного розв'язку задачі* (1) – (3) *експоненціально. При цьому виконуються оцінки* (20).

***Зауваження* 1.** З формул (19), (18) випливає

$$r_n = \frac{e^{d_n/\pi n}}{\pi n} \frac{(1+\bar{u}_0)\left[(\bar{f}_{\max}+\bar{u}_0)\,\|q-\bar{q}\| + \bar{N}(\bar{f}_{\max}+\bar{u}_0)\right)}{\bar{f}_{\max}(1-\bar{f}_{\max})}. \tag{21}$$

Враховуючи формулу (12), приходимо до висновку, що швидкість збіжності FD-методу покращується з ростом порядкового номера n власного значення, а також при зменшенні похибки наближення функції $q(x)$ її кусково-сталою апроксимацією, тобто при $\|q-\bar{q}\| \to 0$. Але слід зауважити, що найменше значення r_n при фіксованому n може бути досягнуто у границі, коли $\|q-\bar{q}\| \to 0$, і воно буде визначатись формулою

$$r_n^{(0)} = \frac{e^{d_n/\pi n}}{\pi n} \frac{(1+\bar{u}_0)\bar{N}(\bar{f}^{(0)}_{\max}+\bar{u}_0)}{\bar{f}^{(0)}_{\max}(1-\bar{f}^{(0)}_{\max})},$$

де $\bar{f}^{(0)}_{\max}$ — корінь рівняння

$$\frac{d}{d\bar{f}}\left[\frac{\bar{f}(1-\bar{f})}{\bar{N}(\bar{u}_0+\bar{f})}\right] = 0$$

на відрізку $[0,1]$. Якщо $r_n^{(0)} \ge 1$, то ніяким покращенням якості наближення $q(x)$ за допомогою $\bar{q}(x)$ досягти виконання теоретичних умов збіжності не вдається. Хоча практична збіжність при цьому може мати місце.

3. Інтегральна нормалізуюча умова. Розглянемо задачу (1), (2) з інтегральною нормалізуючою умовою

$$\int_0^1 u^2(x)dx = M \tag{22}$$

замість умови (3). Наближений розв'язок задачі (1), (2), (22) шукатимемо у вигляді зрізаних рядів (4). Базова лінійна задача для початкового наближення має вигляд

$$\frac{d^2}{dx^2}u_n^{(0)}(x) + (\lambda_n^{(0)}(\bar{q}) - \bar{q}(x))u_n^{(0)}(x) = 0, \quad x \in (0,1), \tag{23}$$

$$u_n^{(0)}(0) = u_n^{(0)}(1) = 0, \quad \left\|u_n^{(0)}\right\| = \sqrt{M}.$$

Відповідно, поправки власних функцій $u_n^{(j+1)}(x)$ є розв'язками задачі Діріхле для неоднорідного лінійного диференціального рівняння

$$\frac{d^2}{dx^2}u_n^{(j+1)}(x) + (\lambda_n^{(0)}(\bar{q}) - \bar{q}(x))u_n^{(j+1)}(x) = F_n^{(j+1)}(x), \quad x \in (0,1), \tag{24}$$

$$u_n^{(j+1)}(0) = u_n^{(j+1)}(1) = 0,$$

з додатковою умовою

$$\int\limits_0^1 u_n^{(0)}(x)u_n^{(j+1)}(x)dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sum_{p=1}^{j} u_n^{(p)}(x)u_n^{(j+1-p)}(x)dx. \tag{25}$$

Права частина $F_n^{(j+1)}(x)$ обчислюється згідно з формулами (7), (8).

Поправка власного значення $\lambda_n^{(j+1)}$ знаходиться за формулою

$$\lambda_n^{(j+1)} = \Bigg\{ -\sum_{p=1}^{j} \lambda_n^{(j+1-p)} \int\limits_0^1 u_n^{(p)}(\xi)u_n^{(0)}(\xi)d\xi + \int\limits_0^1 \left(q(\xi)-\bar{q}(\xi)\right) u_n^{(j)}(\xi)u_n^{(0)}(\xi)d\xi +$$

$$+A_n^{(j)}\big(u_n^{(0)}(\xi),\ldots,u_n^{(j)}(\xi)\big)u_n^{(0)}(\xi)d\xi\Bigg\}\Big/ M. \tag{26}$$

Похибку алгоритму (23) – (26), (7), (8) запишемо у вигляді (10). Щоб оцінити величини $\left\|u_n^{(j+1)}\right\|_\infty$ в (10), запишемо розв'язок задачі (24) у вигляді

$$u_n^{(j+1)}(x) = B_n^{(j+1)}u_n^{(0)}(x) + \hat{u}_n^{(j+1)}(x), \tag{27}$$

де

$$\hat{u}_n^{(j+1)}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin\left(\pi n(x-\xi)\right)}{\pi n}\Bigg\{ -\left[\lambda_n^{(0)}(\bar{q}) - \lambda_n^{(0)}(0) - \bar{q}(\xi)\right] u_n^{(j+1)}(\xi) -$$

$$-\sum_{p=0}^{j} \lambda_n^{(j+1-p)}u_n^{(p)}(\xi) - \big(q(\xi)-\bar{q}(\xi)\big)u_n^{(j)}(\xi) + A_n^{(j)}(u_n^{(0)}(\xi),\ldots,u_n^{(j)}(\xi))\Bigg\}d\xi. \tag{28}$$

З умови (25) отримаємо

$$MB_n^{(j+1)} = -\int\limits_0^1 u_n^{(0)}(x)\hat{u}_n^{(j+1)}(x)dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sum_{p=1}^{j} u_n^{(p)}(x)u_n^{(j+1-p)}(x)dx. \tag{29}$$

Введемо позначення

$$L_n = \sum_{p=0}^{j} |\lambda_n^{(j+1-p)}|\left\|u_n^{(p)}\right\|_\infty + \|q-\bar{q}\|\left\|u_n^{(j)}\right\|_\infty + \left\|A_n^{(j)}\right\|_\infty, \tag{30}$$

врахувавши яке, з (28) будемо мати

$$\left|\hat{u}_n^{(j+1)}(x)\right| \le \frac{d_n}{\pi n}\int_0^x |u_n^{(j+1)}(\xi)|d\xi + \frac{1}{\pi n}L_n, \tag{31}$$

що, у свою чергу, приведе до нерівності

$$\left|B_n^{(j+1)}\right| \le \frac{\|u_n^{(0)}\|_\infty}{M}\int\limits_0^1 |\hat{u}_n^{(j+1)}(\xi)|d\xi + M_n, \tag{32}$$

де

$$M_n = \frac{1}{2M} \sum_{p=1}^{j} \|u_n^{(p)}\|_\infty \|u_n^{(j+1-p)}\|_\infty. \qquad (33)$$

З (32) з урахуванням (31) одержуємо

$$\left|B_n^{(j+1)}\right| \le \frac{\|u_n^{(0)}\|_\infty}{M} \left(\frac{d_n}{\pi n} \int_0^1 \left|u_n^{(j+1)}(\xi)\right| d\xi + \frac{1}{\pi n} L_n \right) + M_n. \qquad (34)$$

Нерівності (31), (34) дають змогу з (27) отримати оцінку

$$\left|u_n^{(j+1)}(x)\right| \le \frac{\left(\|u_n^{(0)}\|_\infty\right)^2}{M} \left(\frac{d_n}{\pi n} \int_0^1 \left|u_n^{(j+1)}(\xi)\right| d\xi + \frac{1}{\pi n} L_n \right) +$$

$$+ \left\|u_n^{(0)}\right\|_\infty M_n + \frac{d_n}{\pi n} \int_0^x \left|u_n^{(j+1)}(\xi)\right| d\xi + L_n. \qquad (35)$$

Нехай виконується умова

$$\chi_n = 1 - \frac{d_n}{\pi n} \left[\frac{(\|u_n^{(0)}\|_\infty)^2}{M} + 1 \right] > 0, \qquad (36)$$

тоді після інтегрування обох частин (35) приходимо до оцінки

$$\int_0^1 \left|u_n^{(j+1)}(x)\right| dx \le \frac{\alpha_1}{\pi n} L_n + \beta_1 M_n, \qquad (37)$$

де

$$\alpha_1 = \chi_n^{-1} \left[1 + \frac{(\|u_n^{(0)}\|_\infty)^2}{M} \right], \qquad \beta_1 = \chi_n^{-1} \left\|u_n^{(0)}\right\|_\infty.$$

Використовуючи лему Гроуолла, з урахуванням (37) з (35) одержуємо

$$\left|u_n^{(j+1)}(x)\right| \le \frac{\alpha_2}{\pi n} L_n + \beta_2 M_n$$

і

$$\left\|u_n^{(j+1)}\right\|_\infty \le \frac{\alpha_2}{\pi n} L_n + \beta_2 M_n, \qquad (38)$$

де

$$\alpha_2 = \exp\left(\frac{d_n}{\pi n}\right) \left\{ 1 + \frac{(\|u_n^{(0)}\|_\infty)^2}{M} \left[1 + \frac{d_n \alpha_1}{\pi n} \right] \right\},$$

$$\beta_2 = \exp\left(\frac{d_n}{\pi n}\right) \|u_n^{(0)}\|_\infty \left\{ 1 + \frac{\|u_n^{(0)}\|_\infty}{M} \frac{d_n \beta_1}{\pi n} \right\}.$$

Далі, з (26) отримуємо оцінку

$$\left|\lambda_n^{(j+1)}\right| \le \frac{1}{\sqrt{M}} \left[\sum_{p=0}^{j} |\lambda_n^{(j+1-p)}| \left\| u_n^{(p)} \right\|_\infty + \|q-\overline{q}\| \left\| u_n^{(j)} \right\|_\infty + \left\| A_n^{(j)} \right\|_\infty \right]. \tag{39}$$

Таким чином, маємо рекурентну систему нерівностей (38), (39). Перейдемо від неї до мажоруючої системи рівнянь

$$U_{j+1} = \frac{\alpha_2}{\pi n} \left[\sum_{p=0}^{j} \Lambda_{j+1-p} U_p + \|q-\overline{q}\| U_j + \left\| A_n^{(j)} \right\|_\infty \right] + \frac{\beta_2}{2M} \sum_{p=1}^{j} U_p U_{j+1-p},$$

(40)

$$\Lambda_{j+1} = \frac{1}{M} \left[\sum_{p=0}^{j} \Lambda_{j+1-p} U_p + \|q-\overline{q}\| U_j + \left\| A_n^{(j)} \right\|_\infty - \Lambda_{j+1} U_o \right], \quad j = 0, 1, \ldots,$$

причому

$$\left\| u_n^{(j)} \right\|_\infty \le U_j, \qquad U_0 = \left\| u_n^{(0)} \right\|_\infty, \qquad \left| \lambda_n^{(j)} \right| \le \Lambda_j. \tag{41}$$

Виконаємо заміну

$$\left(\frac{\pi n}{\|q-\overline{q}\|} \right)^j U_j = \hat{U}_j, \qquad \frac{1}{\pi n} \left(\frac{\pi n}{\|q-\overline{q}\|} \right)^j \Lambda_j = \hat{\Lambda}_j, \tag{42}$$

тоді система (40) перетвориться до вигляду

$$\begin{gathered} \hat{U}_{j+1} = \alpha_2 \left[\sum_{p=0}^{j} \hat{\Lambda}_{j+1-p} \hat{U}_p + \hat{U}_j + \frac{\left\| A_n^{(j)} \right\|_\infty}{\|q-\overline{q}\|} \right] + \frac{\beta_2}{2M} \sum_{p=1}^{j} \hat{U}_p \hat{U}_{j+1-p}, \\ \hat{\Lambda}_{j+1} = \frac{1}{\sqrt{M} + U_0} \left[\sum_{p=0}^{j} \hat{\Lambda}_{j+1-p} \hat{U}_p + \hat{U}_j + \frac{\left\| A_n^{(j)} \right\|_\infty}{\|q-\overline{q}\|} \right], \quad j = 0, 1, \ldots, \\ \hat{U}_0 = U_0 = \left\| u_n^{(0)} \right\|_\infty. \end{gathered} \tag{43}$$

Будемо розв'язувати систему (43) методом твірних функцій. Нехай

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \hat{U}_j, \qquad g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \hat{\Lambda}_{j+1},$$

тоді з (43) знаходимо

$$f(z) - U_0 = \alpha_2 z \left[g(z) f(z) + f(z) + \frac{\overline{N}(f(z))}{\|q-\overline{q}\|} \right] + \frac{\beta_2}{2M} \left[f(z) - U_0 \right]^2,$$

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{M} + U_0} \left[g(z) f(z) + f(z) + \frac{\overline{N}(f(z))}{\|q-\overline{q}\|} \right].$$

Звідси одержуємо рівняння

$$z = z(\overline{f}) = \frac{\overline{f}\left(1 - \dfrac{\beta_2}{2M}\overline{f}\right)\left(\sqrt{M} - \overline{f}\right)}{\alpha_2\left(\sqrt{M} + U_0\right)\left[\overline{f} + U_0 + \dfrac{\overline{N}\left(\overline{f} + U_0\right)}{\|q - \overline{q}\|}\right]}, \tag{44}$$

де використано позначення

$$\overline{f} = f(z) - U_0.$$

Оскільки функція $z = z(\overline{f})$ є неперервною, додатною на проміжку

$$l = \left(0, \min\left(\frac{2M}{\beta_2}, \sqrt{M}\right)\right)$$

і дорівнює нулю на його кінцях, то вона у деякій точці $\overline{f} = \overline{f}_{\max} \in l$ досягає свого максимального значення

$$z_{\max} = R = z\left(\overline{f}_{\max}\right), \tag{45}$$

що є коренем рівняння

$$z'\left(\overline{f}\right) = 0.$$

При цьому $z_{\max} = R$ є радіусом збіжності ряду $f(z)$.

Таким чином,

$$R^j \hat{U}_j < \frac{C}{j^{1+\epsilon}}, \qquad R^j \hat{\Lambda}_j < \frac{C}{j^{1+\epsilon}},$$

де C і ϵ — додатні сталі, що з урахуванням (41), (42) дає змогу одержати оцінки

$$\left\|u_n^{(j+1)}\right\|_\infty \le \frac{C}{(j+1)^{1+\epsilon}}\left[\frac{\|q - \overline{q}\|}{\pi n R}\right]^{j+1},$$

$$\left|\lambda_n^{(j+1)}\right| \le \frac{C\,\|q - \overline{q}\|}{(j+1)^{1+\epsilon}}\left[\frac{\|q - \overline{q}\|}{\pi n R}\right]^{j}.$$

Звідси випливає, що за умов (36) і

$$r_n = \frac{\|q - \overline{q}\|}{\pi n R} < 1 \tag{46}$$

ряди (4) збігаються і мають місце оцінки

$$\begin{gathered}\|u_n - u_n^m\|_\infty \le \sum_{j=m+1}^{\infty}\left\|u_n^{(j)}\right\|_\infty \le \frac{C}{(m+1)^{1+\epsilon}}\left[\frac{\|q - \overline{q}\|}{\pi n R}\right]^{m+1}, \\ |\lambda_n - \lambda_n^m| \le \sum_{j=m+1}^{\infty}\left|\lambda_n^{(j)}\right| \le \frac{C\,\|q - \overline{q}\|}{R(m+1)^{1+\epsilon}}\left[\frac{\|q - \overline{q}\|}{\pi n R}\right]^{m}.\end{gathered} \tag{47}$$

Таким чином, отримали наступний результат про збіжність.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (2), (36) *і* (46). *Тоді наближений розв'язок задачі* (1), (2), (22), *знайдений за допомогою чисельного алгоритму* (23)–(26), *збігається до відповідного точного розв'язку задачі* (1), (2), (22) *експоненціально. Мають місце оцінки* (47).

***Зауваження* 2.** Як випливає з формул (44) – (46), для знаменника прогресії справедлива формула

$$r_n = \frac{1}{\pi n}\alpha_2\left(\sqrt{M}+U_0\right)\frac{(\bar{f}_{\max}+U_0)\|q-\bar{q}\| + \bar{N}(\bar{f}_{\max}+U_0)}{\bar{f}_{\max}\left(1-\dfrac{\beta_2}{2M}\bar{f}_{\max}\right)(\sqrt{M}-\bar{f}_{\max})}. \tag{48}$$

З (48) випливає, що із зростанням порядкового номера n власного значення, а також при $\|q-\bar{q}\|\to 0$ швидкість збіжності FD-методу покращується. Але тут теж слід зауважити, що найменше значення r_n при фіксованому n може бути досягнуто у границі, коли $\|q-\bar{q}\|\to 0$, і воно буде визначатись за формулою

$$r_n^{(0)} = \frac{\alpha_2\left(\sqrt{M}+U_0\right)}{\pi n}\frac{\bar{N}(\bar{f}^{(0)}_{\max}+U_0)}{\bar{f}^{(0)}_{\max}\left(1-\dfrac{\beta_2}{2M}\bar{f}^{(0)}_{\max}\right)(\sqrt{M}-\bar{f}^{(0)}_{\max})},$$

де $\bar{f}^{(0)}_{\max}$ — корінь рівняння

$$\frac{d}{d\bar{f}}\left[\frac{\bar{f}\left(1-\dfrac{\beta_2}{2M}\bar{f}\right)(\sqrt{M}-\bar{f})}{\bar{N}(\bar{U}_0+\bar{f})}\right] = 0$$

на відрізку $[0,1]$. Якщо $r_n^{(0)} \geq 1$, то при як завгодно малій величині $\|q-\bar{q}\|$ за допомогою $\bar{q}(x)$ досягти виконання теоретичних умов збіжності не вдається. Хоча практична збіжність при цьому може мати місце.

Приклад. Розглянемо задачу (1), (22) з $q(x)=x$, $M=4$:

$$\begin{gathered} u''(x)+\lambda u(x) - xu(x) - u^3(x) = 0, \\ u(0)=u(1)=0, \quad \|u\| = 2. \end{gathered} \tag{49}$$

Використавши FD-метод, обчислимо перше власне значення. Розв'язком базової задачі (23), тобто нульовим наближенням, буде

$$\overset{(0)}{\lambda}_1 = \lambda_1^{(0)} = \pi^2, \qquad \overset{(0)}{u}_1(x) \equiv u_1^{(0)}(x) = 2\sqrt{(2)}\sin \pi x.$$

Наступні наближення знаходитимемо згідно з формулами (24) – (26). Отриманий таким чином числовий розв'язок порівнюватимемо з наближеним розв'язком задачі (49), отриманим методом стрільби з точністю $10^{(-30)}$ за допомогою системи Maple 9.5. Для контролю точності алгоритму аналізуватимемо похибку наближення власного значення

$$\triangle_1(m) = \left|\lambda_1^{\text{ex}} - \overset{m}{\lambda}_1\right|,$$

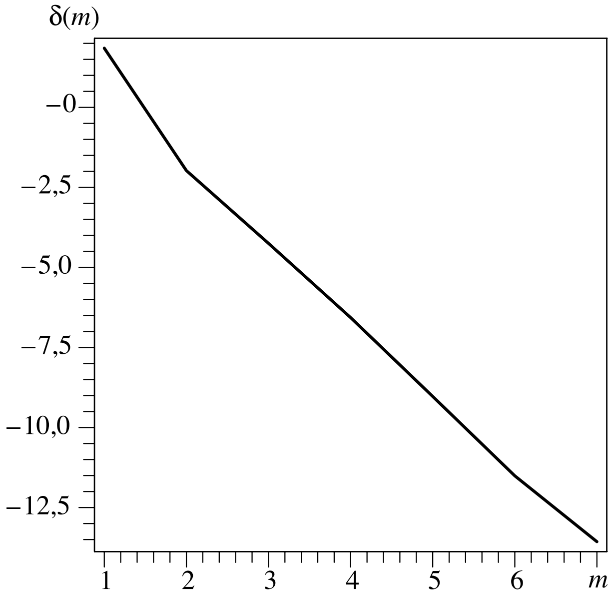
де λ_1^{ex} — розв'язок задачі (49), отриманий методом стрільби, і похибку норми

$$\overset{m}{r}_1 = \left|\left\|\overset{m}{u}_1\right\|^2 - M\right|.$$

Результати розрахунків наведено в табл. 1 ($\lambda_1^{\text{ex}} \approx 16{,}2308252384637974$).

Таблиця 1

m	$\lambda_1(m)$	$\triangle_1(m)$	$\overset{m}{r}_1$
0	9,8696044010893586	6,361221	0
1	16,3696044010893586	$1{,}387792{\cdot}10^{-1}$	$2{,}71457{\cdot}10^{-3}$
2	16,2165253641638118	$1{,}429987{\cdot}10^{-2}$	$4{,}16309{\cdot}10^{-4}$
3	16,2322324339464589	$1{,}407195{\cdot}10^{-3}$	$4{,}86584{\cdot}10^{-5}$
4	16,2307054001940506	$1{,}198383{\cdot}10^{-4}$	$4{,}82064{\cdot}10^{-6}$
5	16,2308352716744303	$1{,}003321{\cdot}10^{-5}$	$4{,}17809{\cdot}10^{-7}$
6	16,2308265205578399	$1{,}282094{\cdot}10^{-6}$	$3{,}28418{\cdot}10^{-8}$



Залежність логарифму похибки від рангу наближення m для першого власного значення
$\delta(m) = \ln\left(\left|\overset{m}{\lambda}_1 - \lambda_1^{\mathrm{ex}}\right|\right).$

Логарифм похибки $\Delta_1(m)$ зображено на рисунку. Як видно з рисунка, дані наближаються до прямої, що підтверджує експоненціальну швидкість збіжності алгоритму.

Проаналізуємо залежності власних значень від величини M. Результати розрахунків для задачі на власні значення з нелінійним потенціалом автономного ти-

Таблиця 2

M	m	$\overset{m}{\lambda}{}_3^{\mathrm{nlin}}(M)$	$\overset{m}{\lambda}{}_3^{\mathrm{avt}}(M)$	$\lambda_3^{\mathrm{asym}}(M)$	$\delta_m(M)$
1	5	90,8256	90,3254	121,8530	0,5002
10	6	104,2240	103,7238	96,9823	0,5002
20	6	118,9271	118,4268	111,0240	0,5003
30	6	133,4511	132,9508	126,4190	0,5003
50	6	162,0157	161,5157	156,8000	0,5000
70	7	190,0123	189,5120	186,1210	0,5003
100	8	231,1097	230,6090	228,4900	0,5007
150	8	297,7082	297,2069	296,1580	0,5013
200	8	362,6909	362,1888	361,4000	0,5021

пу [9] показали хорошу узгодженість з асимптотичною формулою, отриманою в роботі [10]. Щоб вивчити вплив лінійної складової потенціалу, числові власні значення, отримані згідно з розвиненим у даній роботі підходом, також порівнювались з асимптотичною формулою роботи [10]. У табл. 2 для $n = 3$ наведено власні значення задачі з нелінійним неавтономним потенціалом $\overset{m}{\lambda}{}_3^{\mathrm{nlin}}(M)$, з автономним потенціалом $\overset{m}{\lambda}{}_3^{\mathrm{avt}}(M)$ та асимптотичні власні значення згідно з [13].

Як видно з табл. 2, для $q(x) = x$ різниця між власними значеннями задачі з потенціалом, що містить лінійну і нелінійну складові, $\overset{m}{\lambda}{}_n^{\mathrm{nlin}}$, і власними значеннями задачі з автономним потенціалом, $\overset{m}{\lambda}{}_n^{\mathrm{avt}}$,

$$\delta_m(M) = \left| \overset{m}{\lambda}{}_3^{\mathrm{nlin}}(M) - \overset{m}{\lambda}{}_3^{\mathrm{avt}}(M) \right|$$

залишається майже сталою величиною для всіх M.

1. *Makarov V. L.* About functional-discrete method of arbitrary order of accuracy for solving Sturm – Liouville problem with piecewise smooth coefficients // Soviet DAN SSSR. – 1991. – **320**, № 1. – P. 34 – 39.
2. *Makarov V. L.* FD-method: the exponential rate of convergence // J. Math. Sci. – 1997. – **104**, № 6. – P. 1648 – 1653.
3. *Makarov V. L., Ukhanev O. L.* FD-method for Sturm – Liouville problems. Exponential rate of convergence // Appl. Math. and Inform. – 1997. – **2**. – P. 1 – 19.
4. *Bandyrskii B. I., Makarov V. L., Ukhanev O. L.* Sufficient conditions for the convergence of non-classical asymptotic expansions for Sturm – Liouville problems with periodic conditions // Different. Equat. – 1999. – **35**, № 3. – P. 369 – 381.

5. *Bandyrskii B. I., Makarov V. L.* Sufficient conditions for eigenvalues of the operator with Ionkin-Samarskii conditions to be real-valued // Comput. Math. and Math. Phys. – 2000. – **40**, № 12. – P. 1715 – 1728.
6. *Bandyrskii B. I., Lazurchak I. I., Makarov V. L.* A functional-discrete method for solving Sturm – Liouville problems with an eigenvalue parameter in the boundary conditions // Ibid. – 2002. – **42**, № 5. – P. 646 – 659.
7. *Bandyrskii B.I., Gavrilyuk I. P., Lazurchak I. I., Makarov V. L.* Functional-discrete method (FD-method) for matrix Sturm – Liouville problems // Comput. Meth. Appl. Math. – 2005. – **5**, № 4. – P. 1 – 25.
8. *Bandyrskii B. I., Makarov V. L., Rossokhata N. O.* Functional-discrete method with a high order of accuracy for the eigenvalue transmission problems // Ibid. – 2004. – **4**, № 3. – P. 324 – 349.
9. *Bandyrskii B. I., Makarov V. L., Rossokhata N. O.* Functional-discrete method for an eigenvalue transmission problem with periodic boundary conditions // Comput. Meth. Appl. Math. – 2005. – **5**, № 2. – P. 201 – 220.
10. *Макаров В. Л., Россохата Н. О.* Оцінки швидкості збіжності FD-методу для задачі Штурма – Ліувілля з потенціалом з простору L_1 // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **1**, № 3. – С. 1 – 16.
11. *Gavrilyuk I. P., Klimenko A. V., Makarov V. L., Rossokhata N. O.* Exponentially convergent parallel algorithm for nonlinear eigenvalue problems // IMA J. Numer. Anal. – 2007.
12. *Zhidkov P. E.* Basis properties of eigenfunctions of nonlinear Sturm – Liouville problems // El. J. Different. Eqaut. – 2000. – № 28. – P. 1 – 13.
13. *Shibata T.* Precise spectral asymptotics for nonlinear Sturm – Liouville problems // J. Different. Equat. – 2005. – **180**, № 3. – P. 1 – 16.
14. *Abbaoui K., Pujol M. J., Cherruault Y., Himoun N., Grimalat P.* A new formulation of Adomian method. Convergence result // Kybernetes. – 2001. – **30**, № 39/10. – P. 1183 – 1191.

Одержано 06.10.2006