УДК 517.9

Ю. В. Ловейкін, І. О. Парасюк (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ІНВАРІАНТНІ ТОРИ ЛОКАЛЬНО ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ, БЛИЗЬКИХ ДО УМОВНО ІНТЕГРОВНИХ

The problem of perturbations of quasiperiodic motions in the class of locally Hamiltonian systems is analyzed. The theorem on existence of invariant torus of locally Hamiltonian systems close to conditionally integrable systems is proved with the use of methods of KAM-theory. On the basis of this theorem, the bifurcation of the Cantor set of invariant torus is investigated for the case where the Liouville-integrable system is perturbed by a locally Hamiltonian vector field and, at the same time, the symplectic structure of the phase space is deformed.

Проведен анализ проблемы возмущений квазипериодических движений в классе локально гамильтоновых систем. Методами КАМ-теории доказана теорема о существовании инвариантных торов локально гамильтоновых систем, близких к условно интегрируемым. С помощью этой теоремы исследована бифуркация канторового множества инвариантных торов в случае, когда интегрируемая по Лиувиллю система возмущается локально гамильтоновым векторным полем и одновременно испытывает деформацию симплектическая структура фазового пространства.

1. Вступ. Дана робота продовжує дослідження, розпочаті в [1, 2]. Основною нашою метою є доведення КАМ-теореми про збурення локально гамільтонових систем, близьких до умовно інтегровних. Умовна інтегровність системи означає, що її інваріантні тори, які несуть на собі квазіперіодичні рухи, розшаровують не відкриту область фазового простору, а лише деякий підмноговид. Ми маємо також намір показати, як за допомогою зазначеної теореми можна узагальнити результати [1, 2] про біфуркацію канторової множини інваріантних торів у випадку, коли на інтегровну за Ліувіллем систему діють локально гамільтонові збурення і водночас зазнає деформації симплектична структура фазового простору. Основними технічними засобами нашого аналізу є метод прискореної збіжності та метод штучних параметрів. Ефективність поєднання цих методів при дослідженні задач з малими знаменниками переконливо продемонстровано в монографії М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського та А. М. Самойленка [3], а також у роботі Ю. Мозера [4]. Ми використовуємо симплектичний варіант першого із названих методів та модифікацію методу штучних параметрів, запропоновану М. Севрюком та М. Ерманом (див. [5]).

Основний результат п. 2, сформульований у пп. , узагальнює результати робіт [1, 6] і охоплює невироджений та вироджений випадки КАМ-теорії локально гамільтонових систем.

У п. 3 розглянуто задачу про біфуркацію канторової множини інваріантних торів. Як і в [1, 2], досліджено випадок, коли векторне поле інтегровної системи збурюється локально гамільтоновим векторним полем і водночас деформується симплектична структура. Однак у порівнянні з результатами зазначених робіт суттєво послаблено умову еліптичності квазістаціонарних точок досліджуваних систем. Основний результат цього пункту сформульовано в пп. 3.1.

2. КАМ-теорема для інваріантних торів локально гамільтонових систем. ***2.1. Постановка задачі та основна теорема методу штучних параметрів.*** На $2m$-вимірному симплектичному многовиді (M^{2m}, ω^2) з симплектичною структурою ω^2 розглядаємо локально гамільтонове векторне поле $\Im\omega$, де ω — замкнена

1-форма, а $\Im\colon T^*M^{2m} \to TM^{2m}$ — індуковане симплектичною структурою гамільтонове відображення розшарувань, яке задовольняє рівність $\imath_{\Im\omega}\omega^2 = -\omega$ ($\imath$ — операція внутрішнього добутку векторного поля і диференціальної форми). Далі замість 1-форми ω будемо розглядати відповідний, взагалі кажучи, багатозначний гамільтоніан H. Припустимо, що ця система в певному сенсі близька до умовно інтегровної локально гамільтонової системи, причому інваріантні тори останньої є підмноговидами, дифеоморфними стандартному тору $\mathbb{T}^r{:=}\mathbb{R}^r/2\pi\mathbb{Z}^r$, і в околі кожного інваріантного тора існують координати (y, z, φ), де $y = (y_1, \ldots, y_s)$, $z = (z_1, \ldots, z_{\hat{k}})$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)| \bmod 2\pi$, $s + r + \hat{k} = 2m$, в яких:

а) кожен інваріантний тор визначається рівняннями $y = \mathrm{const}$, $z = 0$;

б) для дужки Пуассона $\{\bullet, \bullet\}$, індукованої симплектичною структурою ω^2, виконуються рівності $\{y, y\} = 0$, $\{z, z\} = I$, $\{\varphi, y\} = \sigma$, $\{\varphi, \varphi\} = \chi$;

в) гамільтоніан H набирає вигляду

$$H = \lambda_0 \cdot y + \frac{1}{2}\mathit{\Pi} z^2 + h(y, z, \varphi) + (\zeta_0 + \zeta_1) \cdot \varphi. \tag{1}$$

Тут σ, I та χ — сталі (не залежні від y, z, φ) матриці розміру $r \times s$, $\hat{k} \times \hat{k}$, $r \times r$ відповідно, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^s$, $\zeta_0, \zeta_1 \in \mathbb{R}^r$ — сталі вектори, $\mathit{\Pi} z^2$ — квадратична щодо z форма зі сталою невиродженою матрицею $\mathit{\Pi}$, h — функція, періодична з періодом 2π по кожній змінній φ_j, $j = 1, \ldots, r$, символ $\cdot$ позначає операцію стандартного скалярного добутку в координатному векторному просторі. Доданки $h(y, z, \varphi) + {} + \zeta_1 \cdot \varphi$ трактуються як збурення гамільтоніана $\lambda_0 \cdot y + \dfrac{1}{2}\Pi z^2 + \zeta_0 \cdot \varphi$.

Зауважимо, що необхідною умовою інваріантності торів $y = \mathrm{const}$, $z = 0$ локально гамільтонової системи з гамільтоніаном вигляду $f(y) + g(z)z^2 + \zeta \cdot \varphi$ є умова ортогональності

$$\sigma^{\mathrm{T}}\zeta = 0, \tag{2}$$

де символ T позначає операцію транспонування. Справді, рівняння руху системи з указаним гамільтоніаном мають вигляд

$$\dot{y} = \{y, f(y) + g(z)z^2 + \zeta{\cdot}\varphi\} = -\sigma^{\mathrm{T}}\zeta,$$

$$\dot{z} = \{z, f(y) + g(z)z^2 + \zeta{\cdot}\varphi\} = I(g(z)z^2)',$$

$$\dot{\varphi} = \{\varphi, f(y) + g(z)z^2 + \zeta{\cdot}\varphi\} = \sigma f'(y) + \chi\xi.$$

Таким чином, гамільтоніан $\lambda_0 \cdot y + \dfrac{1}{2}\mathit{\Pi} z^2 + \zeta_0 \cdot \varphi$ за умови $\sigma^{\mathrm{T}}\zeta_0 = 0$ породжує умовно інтегровну локально гамільтонову систему

$$\dot{y} = 0, \qquad \dot{z} = I\mathit{\Pi} z, \qquad \dot{\varphi} = \sigma\lambda_0 + \chi\zeta_0.$$

Оскільки інваріантні тори інтегровної системи утворюють s-параметричну сім'ю, то λ_0, χ, $\mathit{\Pi}$ та h в загальному випадку додатково залежать від „внутрішніх" параметрів — сталих інтегрування. Вектори ζ_0, ζ_1 від цих параметрів не залежать, однак вони, а також λ_0, σ, $\mathit{\Pi}$ та h можуть залежати від деяких „зовнішніх" параметрів. Позначимо через ϑ набір всіх параметрів системи.

Наша мета полягає в тому, щоб обґрунтувати такий результат: якщо вектор ζ_1 також задовольняє умову ортогональності типу (2), а функція h та її похідні по y та

z при $y = 0$, $z = 0$ є досить малими, то існує канторова підмножина параметрів, на якій справджується твердження: поблизу тора $y = 0$, $z = 0$ існує r-вимірний інваріантний тор локально гамільтонової системи, породженої гамільтоніаном (1). При додаткових умовах невиродженої залежності досліджуваної системи від параметрів відносна міра зазначеної підмножини параметрів прямує до 1, коли збурення прямує до нуля. Також будемо розглядати питання диференційовності (в сенсі Вітні) множини торів збуреної системи.

Згідно з основною ідеєю методу штучних параметрів спочатку будемо розглядати гамільтоніан більш загального вигляду

$$\tilde{H} = (\lambda + \mu\Delta) \cdot y + \frac{1}{2} \Pi z^2 + h(y, z, \varphi, \nu) + \zeta \cdot \varphi,$$

який залежить від параметрів $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $n \geq s + r$, які розбито на групи $\lambda = (\nu_1, \ldots, \nu_s)$, $\zeta = (\nu_{s+1}, \ldots, \nu_{s+r})$, $\vartheta = (\nu_{s+r+1}, \ldots, \nu_n)$. Множник $\mu \in (0; 1]$ дозволяє водночас розглядати невироджений ($\mu = 1$) і вироджений ($\mu \ll 1$) випадки, а параметр $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_s)$ потрібно визначити так, щоб він не залежав від (y, z, φ), гладко залежав від параметрів ν і система з гамільтоніаном $\tilde{H}$ на певній підмножині параметрів ν мала інваріантний тор, близький до тора $y = 0$, $z = 0$.

Для будь-якої множини $A \subset \mathbb{C}^n$ і числа $\delta > 0$ покладемо $A + \delta := \bigcup_{\nu \in A} \big\{\nu' \in \mathbb{C}^n \colon |\nu' - \nu| < \delta\big\}$. Через C^p та $\mathrm{A}_{\mathbb{R}}$ позначимо відповідно класи p $(0 \leq p \leq \infty)$ разів неперервно диференційовних та дійсно-аналітичних відображень.

Позначимо власні числа матриці $I\Pi$ через ϖ_j, причому $\varpi_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, \hat{k}$.

Сформулюємо основний результат.

Теорема 1. *Для додатних чисел C, ρ, γ, τ, $a \in (1; 3/2)$, $b \in (1/2; 1)$, $a + b < 2$, існують числа $\varepsilon_* > 0$ та $\varkappa \in (0; 1)$ такі, що для кожного $\mu \in (0; 1]$ і кожного $\varepsilon \in (0; \varepsilon_*)$ справджується твердження: якщо функція h є дійсно-аналітичною в області*

$$\Omega := \Big\{\bar{x} = (y, z, \varphi, \nu) \in \mathbb{C}^{s+\hat{k}+r+n} \colon |y| < \rho,\ |z| < \rho,\ |\operatorname{Im}\varphi| < \rho,\ \nu \in \mathcal{V} + r_0\Big\},$$

де $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^n$ — обмежена область, $r_0 := \mu|\ln\varepsilon|^{-\tau-1}$, і задовольняє в ній нерівності

$$\max\left\{|h|_{\substack{y=0\\z=0}}, |h'_y|_{\substack{y=0\\z=0}}, |h'_z|_{\substack{y=0\\z=0}}\right\} \leq \mu^2\varepsilon, \qquad \max\left\{|h''_{yy}|_{\substack{y=0\\z=0}}, |h''_{yz}|_{\substack{y=0\\z=0}}\right\} \leq \mu C,$$

$$\max\Big\{|h|, |h'_{\bar{x}}|, |h|''_{\bar{x}\bar{x}}\Big\} \leq C,$$

то існують відображення

$$F(\varphi, \nu) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{T}^r \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s), \qquad G(\varphi, \nu) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{T}^r \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{\hat{k}}),$$

$$\Delta(\nu) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s)$$

з такими властивостями:

1) *для кожного $\nu \in \mathcal{V}$ такого, що*

$$\sigma^{\mathrm{T}}\zeta = 0, \qquad \big|\mathbf{m}\cdot(\sigma\lambda + \chi\zeta)\big| \geq \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau}, \quad \big|\mathrm{i}\,\mathbf{m}\cdot(\sigma\lambda + \chi\zeta) - \varpi_j\big| \geq \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau}$$

$$\forall \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}, \quad j = 1, \ldots, \hat{k},$$

локально гамільтонова система з гамільтоніаном $\tilde{H} = (\lambda + \mu\Delta(\nu)) \cdot y + \dfrac{1}{2}\Pi z^2 + h(y, z, \varphi, \nu) + \zeta \cdot \varphi$ *має інваріантний тор, заданий у фазовому просторі змінних* (y, z, φ) *рівняннями* $y = F(\varphi, \nu)$, $z = G(\varphi, \nu)$, *причому відображення* $F(\bullet, \nu)\colon \mathbb{T}^r \to \mathbb{R}^s$, $G(\bullet, \nu)\colon \mathbb{T}^r \to \mathbb{R}^{\hat{k}}$ *є дійсно-аналітичними і потік на цьому торі квазіперіодичний з вектором базисних частот* $\sigma\lambda + \chi\zeta$;

2) *для кожного* $p = 0, 1, 2, \ldots$ *знайдеться стала* $c(p, \varkappa)$, *яка залежить лише від* p *та* $\varkappa$, *така, що виконується нерівність*

$$\max\{|F|_p, |G|_p, |\Delta|_p\} \le c(p, \varkappa)\mu^{1-p}|\ln\varepsilon|^{p(\tau+1)} \sup_{j\ge 0} \frac{\varepsilon^{ba^j}}{\varkappa^{pj}},$$

де $|\bullet|_p$ — C^p*-норма у відповідній області.*

***Зауваження* 1.** За умови достатньої мализни ε_* для p, які задовольняють нерівність $0 \le p \le b\ln a \dfrac{\ln\varepsilon_*}{\ln\varkappa}$, маємо $\sup\limits_{j\ge 0} \dfrac{\varepsilon^{ba^j}}{\varkappa^{pj}} = \varepsilon^b$ при $\varepsilon \in (0; \varepsilon_*)$.

Для застосування цієї теореми до системи з гамільтоніаном H вигляду (1), в якій $\lambda_0 = \lambda_0(\vartheta)$, $\Pi = \Pi(\vartheta)$, $h = h(y, z, \varphi, \vartheta)$, $\zeta_j = \zeta_j(\vartheta)$, $j = 0; 1$, потрібно із співвідношення

$$\lambda + \mu\Delta(\lambda, \zeta_0(\vartheta) + \zeta_1(\vartheta), \vartheta) = \lambda_0(\vartheta)$$

виразити $\lambda = \lambda(\vartheta)$. За природних припущень це можна зробити при всіх досить малих $\varepsilon > 0$, при цьому разом з $\lambda_0(\vartheta)$ та $\zeta_j(\vartheta)$, $j = 0; 1$, гладкою буде і функція $\lambda(\vartheta)$, і вона буде мало відрізнятись від $\lambda_0(\vartheta)$. Отже, підмножина параметрів ϑ, на якій система з гамільтоніаном (1) має інваріантний тор, визначатиметься умовами

$$\nu(\vartheta) := \big(\lambda(\vartheta), \zeta_0(\vartheta) + \zeta_1(\vartheta), \vartheta\big) \in \mathcal{V}, \qquad \sigma^{\mathrm{T}}(\zeta_0(\vartheta) + \zeta_1(\vartheta)) = 0,$$

$$\big|\mathbf{m} \cdot (\sigma\lambda(\vartheta) + \chi(\zeta_0(\vartheta) + \zeta_1(\vartheta)))\big| \ge \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau},$$

$$\big|\mathrm{i}\,\mathbf{m} \cdot (\sigma\lambda(\vartheta) + \chi(\zeta_0(\vartheta) + \zeta_1(\vartheta))) - \varpi_j(\vartheta)\big| \ge \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau}$$

$$\forall\, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}, \quad j = 1, \ldots, \hat{k}.$$

Для оцінки відносної міри цієї канторової підмножини у просторі параметрів ϑ слід застосовувати результати теорії діофантових наближень на підмноговидах евклідового простору (див., наприклад, [5]).

2.2. Індуктивна лема. В цьому пункті сформульовано і доведено лему, яка є основою для доведення теореми 1. Вона містить опис одного кроку швидко збіжного ітераційного процесу послідовних симплектичних перетворень локально гамільтонових систем.

Виберемо числа $\alpha \in (0; 1/2)$, $\beta \in (0; 1)$ так, щоб виконувались нерівності $a < 1 + \alpha < 2 - b$, $0 < \beta < 1 - 2\alpha$, введемо послідовності чисел

$$\delta_k = \frac{\rho}{12 \cdot 2^{k+1}}, \qquad \rho_0 = \rho, \quad \rho_{k+1} = \rho_k - 6\delta_k, \qquad \varepsilon_0 = \varepsilon, \quad \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^a = \varepsilon_0^{a^{k+1}},$$

$$C_0 = C, \quad C_{k+1} = C_k + \varepsilon_k^\beta, \qquad N_{k+1} = \frac{4a^k}{3\delta_k}|\ln\varepsilon|, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

і послідовності множин

$$L_k(\gamma, r_0) = \bigcup_{0<|\mathbf{m}|\le N_{k+1}} \big\{\nu \in \mathcal{V} + r_0\colon \big|\mathbf{m}\cdot(\sigma\lambda + \chi\zeta)\big| \ge \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau},$$

$$\big|\mathrm{i}\,\mathbf{m}\cdot(\sigma\lambda + \chi\zeta) - \varpi_j\big| \ge \mu\gamma|\mathbf{m}|^{-\tau}\big\}, \qquad \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^r, \quad j = 1,\ldots,\hat{k},$$

$$D_k = \left\{\bar{x} := (y, z, \varphi, \theta) \in \mathbb{C}^{s+\hat{k}+r+s}\colon |y| < \rho_k,\ |z| < \rho_k,\ |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k,\ |\theta| < \varepsilon_k^{\alpha}\right\},$$

$$E_k = \{\theta \in \mathbb{C}^s\colon |\theta| < \varepsilon_k^{\alpha}\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Лема 1. *Існує* $\varepsilon_* > 0$ *таке, що для всіх* $\mu \in (0;1]$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_*)$ *і* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *справджується твердження*: *якщо* $H_k = (\lambda+\mu\theta)\cdot y + \dfrac{1}{2}\Pi z^2 + h_k(y, z, \varphi, \theta, \nu) + \zeta\cdot\varphi$ *на множині* $D_k \times L_k(\gamma/2, r_0)$ *задовольняє умови*

$$h_k \in \mathrm{A}_{\mathbb{R}}(D_k \times L_k(\gamma/2, r_0) \to \mathbb{C}), \tag{3}$$

$$\max\left\{|h_k|_{\substack{y=0\\z=0}},\ |h_k{}'_y|_{\substack{y=0\\z=0}},\ |h_k{}'_z|_{\substack{y=0\\z=0}}\right\} \le \mu^2\varepsilon_k,$$

$$\max\left\{\big|h_k{}''_{yy}\big|_{\substack{y=0\\z=0}},\ \big|h_k{}''_{yz}\big|_{\substack{y=0\\z=0}}\right\} \le \mu C_k, \tag{4}$$

$$\max\{|h_k|, |h_k{}'_{\bar{x}}|, |h_k{}''_{\bar{x}\bar{x}}|\} \le C_k, \tag{5}$$

то існують відображення

$$X_k \in \mathrm{A}_{\mathbb{R}}(D_{k+1} \times L_{k+1}(\gamma/2, r_0) \to \mathbb{C}^{s+\hat{k}+r}),$$

$$\Theta_k \in \mathrm{A}_{\mathbb{R}}(E_{k+1} \times L_{k+1}(\gamma/2, r_0) \to \mathbb{C}^{s})$$

з такими властивостями:

1) *у відповідних областях визначення виконуються нерівності*

$$|X_k| \le \mu\varepsilon_k^{b}, \qquad |X_k{}'_{\bar{x}}| \le \mu\varepsilon_k^{\beta}, \qquad |\Theta_k| \le \mu\varepsilon_k^{b}, \quad |\Theta_k{}'_{\theta}| \le \mu\varepsilon_k^{\beta}; \tag{6}$$

2) *при фіксованих* $\theta \in \operatorname{Re} E_{k+1}$, $\nu \in \operatorname{Re} L_{k+1}(\gamma/2, r_0)$ *відображення*

$$\big\{(y, z) \in \mathbb{R}^{s+\hat{k}} : |y| < \rho_{k+1}, \|z| < \rho_{k+1}\big\} \times \mathbb{R}^r \ni (y, z, \varphi) =:$$

$$=: x \mapsto x + X_k := (y + Y_k, z + Z_k, \varphi + \Phi_k)$$

є симплектоморфізмом;

3) *якщо у гамільтоніані* H_k *виконати заміну змінних і параметрів*

$$\bar{x} \mapsto \bar{x} + \bar{X}_k := (x + X_k, \theta + \Theta_k)$$

і перетворений гамільтоніан подати у вигляді

$$H_{k+1} = (\lambda + \mu\theta)\cdot y + \frac{1}{2}\Pi z^2 + h_{k+1}(y, z, \varphi, \theta, \nu) + \zeta\cdot\varphi,$$

то функція h_{k+1} *задовольнятиме на множині* $D_{k+1} \times L_{k+1}(\gamma/2, r_0)$ *умови вигляду* (3)–(5), *в яких індекс* k *замінено на* $k+1$.

Доведення. Міркування значною мірою аналогічні таким у роботі [1].

Визначимо функції

$$u_k(\varphi,\theta,\nu)\in \mathrm{A}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^r\times E_k\times L_K(\gamma/2,r_0)\to\mathbb{C}),$$

$$v_k(\varphi,\theta,\nu)\in \mathrm{A}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^r\times E_k\times L_K(\gamma/2,r_0)\to\mathbb{C}^s),$$

$$w_k(\varphi,\theta,\nu)\in \mathrm{A}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^r\times E_k\times L_K(\gamma/2,r_0)\to\mathbb{C}^{\hat{k}})$$

як розв'язки гомологічних рівнянь

$$\left[(\sigma\lambda+\chi\zeta)\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]u_k=(\mathcal{P}_{N_{k+1}}-\mathcal{P}_0)\left[h_k|_{\substack{y=0\\z=0}}\right],$$
$$\left[(\sigma\lambda+\chi\zeta)\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]v_k=(\mathcal{P}_{N_{k+1}}-\mathcal{P}_0)\left[h_k{}'_y|_{\substack{y=0\\z=0}}+h_k{}''_{yy}|_{\substack{y=0\\z=0}}\{y,u_k\}\right], \tag{7}$$
$$\left[(\sigma\lambda+\chi\zeta)\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}-I\Pi\right]w_k=(\mathcal{P}_{N_{k+1}}-\mathcal{P}_0)\left[h_k{}'_z|_{\substack{y=0\\z=0}}+h_k{}''_{yz}|_{\substack{y=0\\z=0}}\{y,u_k\}\right],$$

де $\mathcal{P}_0(\bullet):=(2\pi)^{-r}\int_{\mathbb{T}^r}\bullet\,d\varphi,\ \ \mathcal{P}_N(\bullet):=\sum_{0\le|\mathbf{m}|\le N}e^{\mathrm{i}\,\mathbf{m}\cdot\varphi}\mathcal{P}(\bullet\,e^{-\mathrm{i}\,\mathbf{m}\cdot\varphi}),\ \ \mathbf{m}\in\mathbb{Z}^r.$

Функція $S_k=u_k+v_k{\cdot}y+w_k{\cdot}z$ породжує гамільтонове векторне поле $\xi_k=$ $=\{x,S_k\}$. Скориставшись оцінками, які використовуються в КАМ-теорії, неважко показати, що

$$|u_k|\le\frac{2^{r+3}\Gamma(r+1)\mu\varepsilon_k}{\gamma\delta_k^r}\le A_1\frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^r}$$

$$\text{при}\quad(\bar{x},\nu)\in D_k\times L_{k+1}(\gamma/2,r_0)\quad\text{і}\quad|\operatorname{Im}\varphi|<\rho_k-\delta_k,$$

$$\left|u_k{}'_\varphi\right|\le A_1\frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{r+1}}\quad\text{при}\quad(\bar{x},\nu)\in D_k\times L_{k+1}(\gamma/2,r_0)\quad\text{і}\quad|\operatorname{Im}\varphi|<\rho_k-2\delta_k,$$

$$|v_k|\le A_2\frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+1}}\quad\text{при}\quad(\bar{x},\nu)\in D_k\times L_{k+1}(\gamma/2,r_0)\quad\text{і}\quad|\operatorname{Im}\varphi|<\rho_k-3\delta_k,$$

$$\left|v_k{}'_\varphi\right|\le A_2\frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+2}}\quad\text{при}\quad(\bar{x},\nu)\in D_k\times L_{k+1}(\gamma/2,r_0)\quad\text{і}\quad|\operatorname{Im}\varphi|<\rho_k-4\delta_k,$$

$$|w_k|\le A_3\frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+1}}\quad\text{при}\quad(\bar{x},\nu)\in D_k\times L_{k+1}(\gamma/2,r_0)\quad\text{і}\quad|\operatorname{Im}\varphi|<\rho_k-3\delta_k,$$

$$\left|w_k{}'_\varphi\right|\le A_3\frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+2}}\quad\text{при}\quad(\bar{x},\nu)\in D_k\times L_{k+1}(\gamma/2,r_0)\quad\text{і}\quad|\operatorname{Im}\varphi|<\rho_k-4\delta_k.$$

Тут і далі в доведенні $A_j,\ j\ge1,$ — сталі, що не залежать від μ, ε і k, $\Gamma(r+1)$ — гамма-функція.

Тоді, враховуючи, що ξ_k є поліномом першого степеня щодо y, маємо (у подальших оцінках доведення вважаємо, що $\bar{x}\in D_k,\ \nu\in L_{k+1}(\gamma/2,r_0)$)

$$|\xi_k|\le A_3\frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+2}}\quad\text{при}\quad|\operatorname{Im}\varphi|<\rho_k-4\delta_k,$$

$$|\xi_k{}'_x| \le A_3 \frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+3}} \quad \text{при} \quad |y| < \rho_k - \delta_k, \quad |z| < \rho_k - \delta_k, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 5\delta_k.$$

Позначимо через $\mathcal{X}_k^t$ фазовий потік (локальний), породжений векторним полем ξ_k, і покладемо $\hat{X}_k = \mathcal{X}_k^1 - x$. Тоді

$$|\hat{X}_k| \le A_4 \frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+2}}, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 4\delta_k,$$

$$|\hat{X}_k{}'_{\bar{x}}| \le A_4 \frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+2}}, \qquad |y| < \rho_k - \delta_k, \quad |z| < \rho_k - \delta_k,$$

$$|\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 5\delta_k, \quad |\theta| < \varepsilon_k^{a\alpha} = \varepsilon_{k+1}^{\alpha},$$

$$|\hat{X}_k - \xi_k| \le A_5 \frac{\mu^2\varepsilon_k^2}{\delta_k^{4r+5}}, \quad |y| < \rho_k - \delta_k, \quad |z| < \rho_k - \delta_k, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 5\delta_k,$$

$$\big|(\hat{X}_k - \xi_k)'_y\big| \le A_5 \frac{\mu^2\varepsilon_k^2}{\delta_k^{4r+6}}, \quad |y| < \rho_k - 2\delta_k, \ |z| < \rho_k - \delta_k, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 5\delta_k.$$

Покладемо

$$\omega_k = -\mathit{\Pi}^{-1}\mathcal{P}_0\left[h_k{}'_z|_{\substack{y=0\\z=0}} + h_k{}''_{yz}|_{\substack{y=0\\z=0}}\{y, u_k\}\right],$$

$$\Theta_k = -\frac{1}{\mu}\mathcal{P}_0\left[h_k{}'_y|_{\substack{y=0\\z=0}} + h_k{}''_{yy}|_{\substack{y=0\\z=0}}\{y, u_k\}\right].$$

Тоді виконуються нерівності

$$|\omega_k| \le A_6 \frac{\mu^2\varepsilon_k}{\delta_k^{r+1}}, \qquad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 2\delta_k, \quad |\theta| < \varepsilon_k^{\alpha},$$

$$|\omega_k{}'_\theta| \le A_6 \frac{\mu^2\varepsilon_k^{1-\alpha}}{\delta_k^{r+1}}, \qquad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 2\delta_k, \quad |\theta| < \varepsilon_{k+1}^{\alpha},$$

$$|\Theta_k| \le A_7 \frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{r+1}}, \qquad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 2\delta_k, \quad |\theta| < \varepsilon_k^{\alpha},$$

$$|\Theta_k{}'_\theta| \le A_7 \frac{\mu\varepsilon_k^{1-\alpha}}{\delta_k^{r+1}}, \qquad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 2\delta_k, \quad |\theta| < \varepsilon_{k+1}^{\alpha}.$$

Тепер покладемо $X_k := (Y_k, Z_k + \omega_k, \Phi_k)$, де $(Y_k, Z_k, \Phi_k) = \hat{X}_k$. Легко бачити, що відображення X_k та Θ_k задовольняють нерівності (6). При цьому очевидно, що виконується умова (3), в якій індекс k замінено на $k+1$.

Подамо h_{k+1} у вигляді

$$h_{k+1}(\bar{x}, \lambda, \nu) = h_k(\bar{x}, \lambda, \nu) + \int_0^1 \bar{X}_k \cdot h_k{}'_{\bar{x}}(\bar{x} + t\bar{X}_k, \lambda, \nu)\, dt -$$

$$-\mathcal{P}_0\left[h_k|_{\substack{y=0\\z=0}}\right] + \zeta \cdot \big(\Phi_k - \{\varphi, S_k\}\big),$$

$$|y| < \rho_k - \delta_k, \quad |z| < \rho_k - \delta_k, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 5\delta_k, \quad |\theta| < \varepsilon_k^{\alpha}.$$

Тоді можна стверджувати, що

$$|h_{k+1} - h_k| \le A_8 \frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+2}}, \qquad |(h_{k+1} - h_k)'_{\bar{x}}| \le A_8 \frac{\mu\varepsilon_k^{1-\alpha}}{\delta_k^{2r+3}},$$

$$\left|(h_{k+1} - h_k)''_{\bar{x}\bar{x}}\right| \le 2A_8 \frac{\mu\varepsilon_k^{1-2\alpha}}{\delta_k^{2r+4}}, \tag{8}$$

$$|y| < \rho_k - 2\delta_k, \quad |z| < \rho_k - 2\delta_k, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 6\delta_k, \quad |\theta| < \varepsilon_{k+1}^{\alpha}.$$

Покладаючи $C_{k+1} = C_k + \varepsilon_k^{\beta}$, бачимо, що оцінки (5), в яких індекс k замінено на $k+1$, виконуються.

Взявши до уваги, що $\xi_k = \big(\{y, S_k\}, \{z, S_k\}, \{\varphi, S_k\}\big)$, а u_k, v_k, w_k є розв'язками гомологічних рівнянь (7), а також позначивши $\hat{h}_k := {h_k}'_y|_{\substack{y=0\\z=0}} + {h_k}''_{yy}|_{\substack{y=0\\z=0}}\{y, u_k\}$, $\tilde{h}_k := {h_k}'_z|_{\substack{y=0\\z=0}} + {h_k}''_{yz}|_{\substack{y=0\\z=0}}\{y, u_k\}$, подамо h_{k+1} у вигляді

$$h_{k+1} = \lambda \cdot (Y_k - \{y, S_k\}) + \mu\theta \cdot Y_k + \frac{1}{2}\Pi(Z_k^2 + \omega_k^2) + (\operatorname{Id} - \mathcal{P}_{N_{k+1}}) \left[h_k|_{\substack{y=0\\z=0}}\right] +$$

$$+ {h_k}'_x|_{\substack{y=0\\z=0}} \cdot X_k + (\operatorname{Id} - \mathcal{P}_{N_{k+1}})[\hat{h}_k] \cdot y + \mathcal{P}_0\tilde{h}_k \cdot \omega_k + (\operatorname{Id} - \mathcal{P}_{N_{k+1}})[\tilde{h}_k] \cdot (z + \omega_k) +$$

$$+ \zeta \cdot (\Phi_k - \{\varphi, S_k\}) + \mu\Theta_k \cdot Y_k + {h_k}'_\theta|_{\substack{y=0\\z=0}} \cdot \Theta_k + O(\bar{X}_k^2) + O(y^2 + z^2).$$

Далі, знову застосувавши оцінки КАМ-теорії, дістанемо нерівності

$$|h_{k+1}|_{\substack{y=0\\z=0}} \le \mu^2\varepsilon_{k+1}, \qquad |{h_{k+1}}'_y|_{\substack{y=0\\z=0}} \le \mu^2\varepsilon_{k+1}, \qquad |{h_{k+1}}'_z|_{\substack{y=0\\z=0}} \le \mu^2\varepsilon_{k+1},$$

$$|y| < \rho_k - 2\delta_k, \quad |z| < \rho_k - 2\delta_k, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 6\delta_k, \quad |\theta| < \varepsilon_{k+1}^{\alpha}.$$

Застосувавши оцінки Коші до першої нерівності в (8), одержимо

$$\left|(h_{k+1} - h_k)''_{yy}\right| \le 2A_8 \frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+3}}, \qquad \left|(h_{k+1} - h_k)''_{yz}\right| \le 2A_8 \frac{\mu\varepsilon_k}{\delta_k^{2r+3}},$$

$$|y| < \rho_k - 3\delta_k, \quad |z| < \rho_k - 3\delta_k, \quad |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k - 6\delta_k, \quad |\theta| < \varepsilon_{k+1}^{\alpha}.$$

З цих нерівностей випливає $\left|{h_{k+1}}''_{yy}\right|_{\substack{y=0\\z=0}} \le \mu C_{k+1}$, $\left|{h_{k+1}}''_{yz}\right|_{\substack{y=0\\z=0}} \le \mu C_{k+1}$. Таким чином, умова (4), в якій індекс k замінено на $k+1$, виконується.

Отже, лему доведено.

2.3. Доведення основної теореми. Доведення теореми полягає в побудові близького до тотожного (при малих ε) симплектичного перетворення $x \mapsto x + \Xi(x, \nu)$, яке на відповідній множині параметрів ν зводить гамільтоніан H до вигляду $H_* = \lambda \cdot y + \frac{1}{2}\Pi z^2 + h_*(y, z, \varphi, \nu) + \zeta \cdot \varphi$, де функція h_* задовольняє рівності $h_*|_{\substack{y=0\\z=0}} = 0$, ${h_*}'_y|_{\substack{y=0\\z=0}} = 0$, ${h_*}'_z|_{\substack{y=0\\z=0}} = 0$.

Оскільки рівняння руху системи з локально гамільтоновим векторним полем, породженим (багатозначним) гамільтоніаном H_*, в нових координатах (y, z, φ) мають вигляд

$$\dot{y} = -\sigma^{\mathrm{T}} h_{*\varphi}', \qquad \dot{z} = I(\varPi z + h_{*z}'), \qquad \dot{\varphi} = \sigma(\lambda + h_{*y}') + \chi(\zeta + h_{*\varphi}'),$$

то множина $y = 0,\ z = 0$ є її інваріантним тором, і потік на цьому торі задається системою $\dot{\varphi} = \sigma\lambda + \chi\zeta$.

Перетворення $x \mapsto x + \Xi(x, \nu)$ можна побудувати методом прискореної збіжності як границю послідовності симплектичних перетворень, кожне з яких є перетворенням Лі зсуву за одиницю часу вздовж траєкторій гамільтонової системи зі спеціальним чином вибраним гамільтоніаном.

Визначимо дві послідовності відображень

$$\Xi_k \colon D_k \times L_k(\gamma/2, r_0) \to \mathbb{C}^{s+\hat{k}+r}, \qquad \Delta_k \colon E_k \times L_k(\gamma/2, r_0) \to \mathbb{C}^s \tag{9}$$

рекурентними співвідношеннями

$$\Xi_0 = x, \qquad \Xi_{k+1} = \Xi_k(x + X_k, \theta + \Theta_k, \nu),$$

$$\Delta_0 = \theta, \qquad \Delta_{k+1} = \Delta_k(\theta + \Theta_k, \nu), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $X_k,\ \Theta_k$ — послідовності відображень, а $D_k,\ E_k,\ L_k(\gamma/2, r_0)$ — послідовності множин, визначені в лемі 1, якщо попередньо покласти $h_0 = h$.

Неважко переконатися, що відображення Ξ_k і Δ_k задовольняють нерівності

$$|\Xi_{k+1} - \Xi_k| \leq 2\mu\varepsilon_k^b, \qquad |\Delta_{k+1} - \Delta_k| \leq 2\mu\varepsilon_k^b$$

$$\forall\ (x, \theta, \nu) \in D_{k+1} \times L_{k+1}(\gamma/2, r_0).$$

З цих нерівностей випливає рівномірна збіжність послідовності $\{\Xi_k,\ k \geq 0\}$ до $\Xi_{(\infty)}$ на множині $D_{(\infty)} \times L_{(\infty)}(\gamma, 0)$ і послідовності $\{\Delta_k,\ k \geq 0\}$ до $\Delta_{(\infty)}$ на множині $\{\theta = 0\} \times L_{(\infty)}(\gamma, 0)$. При цьому для фіксованого $\nu \in L_{(\infty)}(\gamma, 0)$ відображення $\Xi_{(\infty)}$ є дійсно-аналітичним щодо (y, z, φ) в області $\big\{(y, z, \varphi) \in \mathbb{C}^{s+\hat{k}+r} \colon |y| < \rho/2,\ |z| < \rho/2,\ |\operatorname{Im}\varphi| < \rho/2\big\}$.

Перевіримо гладкість у сенсі Вітні граничних відображень $\Xi_{(\infty)}$ та $\Delta_{(\infty)}$. Легко бачити, що для досить малого $\varkappa \in (0; 1)$, $p = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, досить малого $\varepsilon_* > 0$ та всіх $\varepsilon \in (0; \varepsilon_*)$, $\mu \in (0; 1]$ виконується нерівність

$$2\mu\varepsilon_k^b \leq M r_k^p,$$

де $r_k = \mu|\ln\varepsilon|^{-\tau-1}\varkappa^k$, $M = 2\mu^{1-p}|\ln\varepsilon|^{p(\tau+1)} \sup\limits_{j \geq 0} \dfrac{\varepsilon^{ba^j}}{\varkappa^{pj}}$. До того ж для кожного $k = 0, 1, 2, \ldots$ множина $\big\{(y, z, \varphi) \in \mathbb{C}^{s+\hat{k}+r} \colon |y| < \rho/2,\ |z| < \rho/2,\ |\operatorname{Im}\varphi| < \rho/2\big\} \times L_{(\infty)}(\gamma, 0)$ міститься у множині $\big\{(y, z, \varphi) \in \mathbb{C}^{s+\hat{k}+r} \colon |y| < \rho_k,\ |z| < \rho_k,\ |\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k\big\} \times L_k(\gamma/2, r_0)$ разом зі своїм r_k-околом.

Отже, можна стверджувати [5, 7], що відображення $\Xi_{(\infty)}$ та $\Delta_{(\infty)}$ є гладкими в сенсі Вітні відповідно на множинах $\big\{(y, z, \varphi) \in \mathbb{C}^{s+\hat{k}+r} \colon |y| < \rho/2,\ |z| < \rho/2,\ |\operatorname{Im}\varphi| < \rho/2\big\} \times L_{(\infty)}(\gamma, 0)$ та $L_{(\infty)}(\gamma, 0)$ (оскільки $E_{(\infty)} = \{0\}$, то вважаємо, що $\Xi_{(\infty)}$ та $\Delta_{(\infty)}$ не залежать від θ). Ці відображення можна продовжити до гладких, визначених в $\mathbb{R}^{s+\hat{k}+r+n}$ та $\mathbb{R}^n$ відповідно, причому існує стала c, яка залежить лише від p та $\varkappa$, така, що виконується нерівність

$$\max\big\{|\Xi_{(\infty)}|_p\,,\ |\Delta_{(\infty)}|_p\big\} \leq cM.$$

Відображення Δ покладаємо рівним $\Delta_{(\infty)}$. Для того щоб побудувати відображення F та G, які описують інваріантний тор збуреної системи у початкових координатах (y, z, φ), позначимо через $y_k(\varphi, \nu)$, $z_k(\varphi, \nu)$ та $\varphi + \phi_k(\varphi, \nu)$ відповідно y-, z- та φ-компоненти для $\Xi_{(\infty)}|_{\substack{y=0\\z=0}}$. При фіксованому $\nu \in L_k(\gamma, r_0)$ відображення $\varphi \mapsto \varphi + \phi_k$ визначає аналітичний дифеоморфізм смуги $|\operatorname{Im}\varphi| < \rho_k$ в смугу $|\operatorname{Im}\varphi| < \rho_{k+1}$. Позначивши через $\varphi + \psi_k(\phi, \nu)$ обернений дифеоморфізм, дістанемо послідовності дійсно-аналітичних відображень $F_k(\varphi, \nu) = y_k(\varphi + \psi_k(\varphi, \nu), \nu)$ та $G_k(\varphi, \nu) = z_k(\varphi + \psi_k(\varphi, \nu), \nu)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Їх збіжність, гладкість граничних відображень $F_{(\infty)}(\varphi, \nu) =: F(\varphi, \nu)$, $G_{(\infty)}(\varphi, \nu) = G(\varphi, \nu)$ у сенсі Вітні, а також оцінки для $|F|_p$, $|G|_p$ встановлюються на основі міркувань, аналогічних наведеним вище.

Таким чином, теорему доведено.

3. Біфуркація інваріантних торів при локально гамільтонових збуреннях інтегровних систем у загальному випадку. Покажемо, що коли цілком інтегровну систему збурювати локально гамільтоновим векторним полем та водночас деформувати симплектичну структуру, то в фазовому просторі можуть виникати інваріантні тори розмірності більшої, ніж кількість ступенів вільності системи, і які несуть на собі квазіперіодичні рухи.

На $2n$-вимірному симплектичному многовиді (M^{2n}, ω_0^2) з симплектичною структурою ω_0^2 розглядаємо інтегровну в сенсі Ліувілля систему з гамільтоніаном $H_0 : M^{2n} \to \mathbb{R}$. Нехай ця система зазнає збурення вигляду

$$dH_0 \mapsto dH_0 + \mu\omega^1, \qquad \omega_0^2 \mapsto \omega_0^2 + \mu\omega_1^2,$$

де μ — малий параметр, а 1-форма ω^1 і 2-форма ω_1^2 є замкненими, але не точними.

Нехай $\{F_i \colon M^{2n} \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$ — повний інволютивний набір перших інтегралів незбуреної системи. Розглянемо відображення $F = (F_1, \ldots, F_n) \colon M^{2n} \to \to \mathbb{R}^n$ і припустимо, що $c \in F(M^{2n})$ — таке некритичне значення, для якого $F^{-1}(c)$ містить зв'язну компоненту M_c. Тоді M_c є лагранжевим підмноговидом, дифеоморфним n-вимірному тору $\mathbb{T}^n$ [8]. Крім того, в $\mathbb{R}^n$ існує однозв'язна область $G \in F(M^{2n})$ значень c з указаною властивістю, а на множині $\mathcal{N} = \bigcup_{c \in G} M_c$ визначено симплектичну дію тора $\mathbb{T}^n$, яка задається абелевою групою симплектоморфізмів $\{\Phi^q \colon \mathcal{N} \to \mathcal{N},\ q \in \mathbb{T}^n\}$ і орбітами якої є многовиди $M_c \subset \mathcal{N}$.

Припустимо, що функція H_0 та 2-форма ω_1^2 задовольняють аналоги умов з [9]. Як і в [9], обчислимо усереднену форму $\bar{\omega}_1^2 = (2\pi)^{-n} \displaystyle\int_{\mathbb{T}^n} (\Phi^q)^* \omega_1^2 \, dq$, для кожного $a \in \mathbb{R}^n$ визначимо векторне поле $X_a(x) = \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Phi^{at}(x)$ і введемо кососиметричну білінійну форму (коцикл) $\mathcal{C}(a, b) = \bar{\omega}_1^2(X_a, X_b)$, a, $b \in \mathbb{R}^n$.

Будемо окремо розглядати два випадки:

Припущення 1. *Білінійна форма $\mathcal{C}$ вироджена:* $k_0 := \dim\ker\mathcal{C} > 0$.

Припущення 2. *Білінійна форма $\mathcal{C}$ невироджена, тобто* $\ker\mathcal{C} = \{0\}$.

Далі замість 1-форми ω_μ будемо розглядати багатозначний гамільтоніан H_μ.

Спираючись на теорему Дарбу – Вейнстейна, введемо в $\mathcal{N}$ координати прямого добутку $(p, q|\bmod 2\pi)$, $p = (p_1, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, типу „дія-кут”, в яких гамільтоніан збуреної системи і матриця дужок Пуассона відповідно набирають вигляду

$$H_\mu = H_0(p) + \mu(H_1(p,q) + \beta\cdot q),$$
$$\{p,p\} = \mu C, \qquad \{q,p\} = E_n, \tag{10}$$

де β — сталий вектор, $\mu \in (-\mu_0;\mu_0)$ — малий параметр, $\mu_0 \in (0;1)$, E_n — одинична матриця розміру $n \times n$, C — кососиметрична матриця форми $\mathcal{C}$ в координатах q, а саме $\mathcal{C}(a,b) = Ca\cdot b$. При цьому $H_0(p)+\mu H_1(p,q)$ та $\mu\beta\cdot q$ є відповідно однозначною та багатозначною складовими гамільтоніана H_μ.

Припущення 3. *Для деяких додатних чисел* R_0, ρ_0 *функції* H_0 *та* H_1 *є дійсно-аналітичними в областях* $\{p \in \mathbb{C}^n\colon |p| < R_0\}$ *і* $\{(p,q) \in \mathbb{C}^{2n}\colon |p| < R_0,\ |\operatorname{Im} q| < \rho_0\}$ *відповідно.*

Зменшивши в разі потреби R_0, ρ_0, з огляду на нерівності Коші без обмеження загальності міркувань можна вважати, що в зазначених областях функції H_0 та H_1 обмежені разом з усіма своїми частинними похідними довільного порядку.

Назвемо точку p_* квазістаціонарною, якщо виконується рівність

$$C{H_0}'(p_*) = \beta.$$

Легко бачити, що рівняння $p = p_*$, де p_* — квазістаціонарна точка, визначає інваріантний тор локально гамільтонової системи з багатозначним гамільтоніаном $H_0(p) + \mu\beta\cdot q$.

3.1. Формулювання основного результату. *Випадок виродженої білінійної форми* $\mathcal{C}$. Нехай $\{\sigma_1,\ldots,\sigma_{k_0}\}$ — базис в $\ker\mathcal{C}$.

Припущення 4. *Існує* $\gamma_0 > 0$ *таке, що* $\max_{j=1,\ldots,k_0} |\mathbf{m}\cdot\varsigma_j| \geq \gamma_0|\mathbf{m}|^{-n}$ *для кожного* $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

Щоб уникнути руйнування інваріантних торів вже в першому наближенні теорії збурень, необхідно, аби виконувалися ще два припущення, природність яких стає зрозумілою із наведених нижче міркувань.

Зауважимо, що оскільки $C\varsigma_j = 0$, $j = 1,\ldots,k_0$, то функції $p\cdot\varsigma_i$, $i = 1,\ldots,k_0$, утворюють повний набір функцій Казіміра пуассонової структури в $\mathbb{R}^n$, визначеної співвідношенням $\{f(p),g(p)\}_1 = f'(p)\cdot Cg'(p)$. Спільна поверхня рівня цих функцій є $(n-k_0)$-вимірним афінним простором, який є симплектичним листком максимальної розмірності зазначеної пуассонової структури в $\mathbb{R}^n$. Базис $\{\varsigma_1,\ldots,\varsigma_{k_0}\}$ підпростору $\ker C$ завжди можна доповнити векторами $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2m}$, $\beta_1,\ldots,\beta_{2k}$ до базису всього простору $\mathbb{R}^n$ так, щоб після введення координат

$$v_i = p\cdot\varsigma_i, \qquad w_j = p\cdot\alpha_j, \qquad z_s = p\cdot\beta_s,$$
$$i = 1,\ldots,k_0, \quad j = 1,\ldots,2m, \quad s = 1,\ldots,2k,$$

матриця дужок Пуассона (10) набрала вигляду

$$\{v,v\} = 0, \qquad \{w,w\} = \mu I_{2m}, \qquad \{z,z\} = \mu I_{2k}, \qquad \{q,v\} = \Sigma,$$
$$\{q,w\} = A, \qquad \{q,z\} = B,$$

де матрицю Σ складено зі стовпців $\varsigma_1,\ldots,\varsigma_{k_0}$, матрицю A — з $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2m}$, а матрицю B — з $\beta_1,\ldots,\beta_{2k}$, $k_0 + 2m + 2k = n$.

Запишемо тепер рівняння, які описують еволюцію змінних v, w, z для гамільтонової системи першого наближення, породженої лінеаризованим у деякій точці

(v_0, w_0, z_0) гамільтоніаном $H_0{}'_v(v_0, w_0, z_0) \cdot v + H_0{}'_w(v_0, w_0, z_0) \cdot w + H_0{}'_z(v_0, w_0, z_0) \cdot$ $\cdot\, z + \mu\beta \cdot dq$. Маємо

$$\dot{v} = -\mu \Sigma^{\mathrm{T}} \beta, \qquad \dot{w} = \mu(I_{2m} H_0{}'_w(v_0, w_0, z_0) - A^{\mathrm{T}}\beta),$$
$$\dot{z} = \mu(I_{2k} H_0{}'_z(v_0, w_0, z_0) - B^{\mathrm{T}}\beta). \tag{11}$$

Відсутність дрейфу за змінними v забезпечує така умова: вектор β ортогональний до кожного вектора ς_j, $j = 1, \ldots, k_0$, а за змінними w, z, з огляду на два останніх рівняння в (11), забезпечують умови

$$H_0{}'_w(v_*, w_*, z_*) + I_{2m} A^{\mathrm{T}} \beta = 0, \qquad H_0{}'_z(v_*, w_*, z_*) + I_{2k} B^{\mathrm{T}} \beta = 0. \tag{12}$$

Умова ортогональності вектора β та умови (12) є означенням квазістаціонарної точки p_*, записаним у координатах v, w, z ((v_*, w_*, z_*) — квазістаціонарна точка, яка відповідає p_* в координатах v, w, z). *Невиродженою квазістаціонарною точкою* назвемо таку квазістаціонарну точку (v_*, w_*, z_*), в якій матриця $I_{2m} H_0{}''_{ww}(v_*, w_*, z_*)$ невироджена і має різні суто уявні власні числа $\pm \mathrm{i}\bar{\lambda}_j$, $j = 1, \ldots, m$, а матриця $I_{2k} H_0{}''_{zz}(v_*, w_*, z_*)$ невироджена і має різні ненульові власні числа $\pm\bar{\varpi}_i$, $i = 1, \ldots, k$, причому якщо $\operatorname{Re}\bar{\varpi}_i \neq 0$, то $\operatorname{Re}\bar{\varpi}_i > 0$, якщо ж $\operatorname{Re}\bar{\varpi}_i = 0$, то $\operatorname{Im}\bar{\varpi}_i > 0$.

Припущення 5. *Існує невироджена квазістаціонарна точка (v_*, w_*, z_*) така, що вектор частот $H_0{}'(p_*(\eta))$ з деякими $\gamma > 0$, $\tau \geq n$ задовольняє діофантові умови*

$$|\mathbf{k} \cdot H_0{}'(p_*(\eta))| \geq \gamma |\mathbf{k}|^{-\tau} \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\},$$

а вектори $\bar{\lambda}(p_*(\eta)) = \big(\bar{\lambda}_1(p_*(\eta)), \ldots, \bar{\lambda}_m(p_*(\eta))\big)$, $\bar{\varpi}(p_*(\eta)) = \big(\bar{\varpi}_1(p_*(\eta)), \ldots$ $\ldots, \bar{\varpi}_k(p_*(\eta))\big)$ — умови відсутності резонансів до порядку l включно

$$\tilde{\mathbf{j}} \cdot \mathrm{i}\bar{\lambda}(p_*(\eta)) + \bar{\mathbf{j}} \cdot \bar{\varpi}(p_*(\eta)) \neq 0 \quad \forall \mathbf{j} = (\tilde{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{j}}) \in \mathbb{Z}^{m+k} \colon 0 < |\mathbf{j}| \leq l,$$

де $l \geq 4$ — деяке натуральне число.

З теореми про неявну функцію випливає, що принаймні в околі (v_*, w_*, z_*) невироджені квазістаціонарні точки утворюють k_0-вимірний многовид, який можна задати в координатах v, w, z параметричними рівняннями $w = w_*(\eta)$, $z = z_*(\eta)$, $v = \eta$ з дійсно-аналітичними принаймні в околі v_* функціями $w_*(\eta)$, $z_*(\eta)$, $w_*(v_*) = w_*$, $z_*(v_*) = z_*$. При цьому матриці $I_{2m} H_0{}''_{ww}(\eta, w_*(\eta), z_*(\eta))$ та $I_{2k} H_0{}''_{zz}(\eta, w_*(\eta), z_*(\eta))$ матимуть відповідно різні суто уявні власні числа $\pm\mathrm{i}\bar{\lambda}_j(\eta)$, $j = 1, \ldots, m$, та різні ненульові власні числа $\pm\bar{\varpi}_i(\eta)$, $i = 1, \ldots, k$.

Нехай $p = p_*(\eta)$ — рівняння многовиду квазістаціонарних точок, записане у початкових p-координатах. У подальшому будемо називати *квазістаціонарним многовидом* і множину $\mathcal{M}$, задану цим рівнянням в усьому $2n$-вимірному фазовому просторі. Зрозуміло, що вона є k_0-параметричною сім'єю n-вимірних інваріантних торів незбуреної системи.

Проблема малих знаменників, яка виникає в процесі побудови квазіперіодичних рухів збуреної системи, має безпосередній зв'язок з теорією діофантових наближень на підмноговидах евклідового простору. У зв'язку з цим накладемо ще умови невиродженості Рюссмана [10] на функції $H_0{}'(p_*(\eta))$, $\bar{\lambda}_j(\eta)$ та $\bar{\varpi}_i(\eta)$, $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, k$.

Припущення 6. *Система $n + m + 2k$ функцій, утворена компонентами вектор-функції $H_0{}'(p_*(\eta))$ і функціями $\bar\lambda_j(\eta)$, $\bar\varpi_i(\eta)$, $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, k$, лінійно незалежна в їхній спільній області визначення.*

Сформулюємо підсумковий результат про біфуркацію канторової множини інваріантних торів збуреної системи в околі тора, заданого в координатах (p, q) рівнянням $p = p_*$ у випадку виродженої матриці дужок Пуассона.

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення* 1, 3 – 6. *Тоді при відповідному виборі числа $\tau > 0$ для довільного дійсного $s \geq 1$ існує таке $\mu_* > 0$, що для кожного $\mu \in (-\mu_*; \mu_*)$ і кожного набору параметрів $\vartheta \in \mathcal{W}_\mu$ в μ^s-околі тора $\mathbb{T}_\mu^{m+n}$ існує $(m+n)$-вимірний інваріантний тор $\mathcal{T}_\mu^{m+n}(\vartheta)$ збуреної гамільтонової системи, який несе на собі квазіперіодичні рухи з $m + n$ раціонально незалежними частотами. Існує гладке відображення $\lambda_\mu \colon \mathcal{W}_0 \to \mathbb{R}^m$ таке, що $\lambda_\mu(\xi) = O\big(|\mu|\big)$ і вектор базисних частот квазіперіодичних рухів на торі $\mathcal{T}_\mu^{m+n}(\vartheta)$ має вигляд $\big(\lambda_\mu(\vartheta), H_0{}'(p_*)\big)$. При цьому $\lim\limits_{\mu\to 0} \operatorname{mes} \mathcal{W}_\mu \big/ \operatorname{mes} \mathcal{W}_0 = 1$.*

Випадок невиродженої білінійної форми $\mathcal{C}$. З припущення 2 випливає, що n має бути парним.

Для того щоб незбурена система мала інваріантні тори, які не руйнуються хоча б у першому наближенні теорії збурень, необхідно, аби виконувалося додаткове припущення, природність якого стає зрозумілою із наступних міркувань.

Запишемо рівняння руху збуреної системи

$$\dot p = \mu(CH_0{}'(p) - \beta - H_1{}'_q(p,q)) + \mu^2 CH_1{}'_p(p,q), \qquad \dot q = H_0{}'(p) + \mu H_1{}'_p(p,q).$$

Відомо, що коли відображення $p \mapsto H_0{}'(p)$ задовольняє певні природні умови невиродженості, еволюція повільних змінних p на проміжку часу довжини $1/|\mu|$ для більшості початкових значень з довільною точністю описується усередненою системою

$$\dot p = \mu(CH_0{}'(p) - \beta),$$

якщо μ досить мале за модулем (точні формулювання див. у [11 – 13]). У загальному випадку в усередненій системі може відбуватися систематичний дрейф змінної дії таким чином, що величина її відхилення від початкового значення за час $1/|\mu|$ матиме порядок $O(1)$ при як завгодно малому за модулем μ. Зрозуміло, що в цій ситуації слід очікувати руйнування інваріантних торів. Разом із тим, якщо p_* — таке значення змінної дії, для якого

$$CH_0{}'(p_*) = \beta, \tag{13}$$

тобто p_* є квазістаціонарною точкою, а компоненти вектора частот $H_0{}'(p_*)$ задовольняють діофантові умови раціональної незалежності, то тор, який відповідає точці p_*, буде інваріантним і для системи першого наближення теорії збурень. Аналіз поведінки траєкторій в околі цього тора природно розпочати з системи у варіаціях першого наближення. Вона має вигляд

$$\dot p = \mu CH_0''(p_*)p, \qquad \dot q = H_0{}'(p_*) + \mu \bar H_1{}'_p(p_*),$$

де $\bar H_1$ — середнє значення функції H_1 по тору. Нас зараз буде цікавити негрубий випадок, коли тривіальний тор цієї системи є стійким.

Точку p_* назвемо *невиродженою квазістаціонарною точкою*, якщо вона задовольняє рівність (13) і при цьому матриця $CH_0''(p_*)$ має різні суто уявні власні числа $\pm \mathrm{i}\bar\lambda_j(p_*)$, $j = 1, \ldots, m$, та ненульові власні числа $\pm\bar\varpi_i(p_*)$, $i = 1, \ldots, k$, для яких якщо $\operatorname{Re}\varpi_i(p_*) \neq 0$, то $\operatorname{Re}\varpi_i(p_*) > 0$, якщо ж $\operatorname{Re}\varpi_i(p_*) = 0$, то $\operatorname{Im}\varpi_i(p_*) > 0$, $2m + 2k = n$.

Зауважимо, що система у варіаціях для тора, який відповідає точці зазначеного типу, демонструє, в загальному випадку, некласичну динаміку: її квазіперіодичні рухи покривають інваріантні тори вимірності $n + m$.

Припущення 7. *Існує невироджена квазістаціонарна точка p_* така, що вектор частот $H_0{}'(p_*)$ з деякими $\gamma > 0$, $\tau \geq n$ задовольняє діофантові умови*

$$|\mathbf{k} \cdot H_0{}'(p_*)| \geq \gamma |\mathbf{k}|^{-\tau} \quad \forall\, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\},$$

а вектори $\bar\lambda(p_*) = (\bar\lambda_1(p_*), \ldots, \bar\lambda_m(p_*))$ та $\bar\varpi(p_*) = (\bar\varpi_1(p_*), \ldots, \bar\varpi_k(p_*))$ — умови відсутності резонансів до порядку l включно

$$\tilde{\mathbf{j}} \cdot \mathrm{i}\bar\lambda(p_*) + \bar{\mathbf{j}} \cdot \bar\varpi(p_*) \neq 0 \quad \forall \mathbf{j} = (\tilde{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{j}}) \in \mathbb{Z}^{m+k} \colon 0 < |\mathbf{j}| \leq l, \tag{14}$$

де $l \geq 7$ — деяке натуральне число.

Якщо припущення 7 справджується, то існує поліноміальна заміна змінних $p = (w, z) + O(|w|^2 + |z|^2)$, яка зводить матрицю дужок Пуассона $\{p, p\}$ до вигляду

$$\{w, w\} = \begin{pmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix} =: I_{2m}, \qquad \{z, z\} = \begin{pmatrix} 0 & -E_k \\ E_k & 0 \end{pmatrix} =: I_{2k}, \tag{15}$$

а функцію $H_0(p_* + p) - H_0{}'(p_*) \cdot p - H_0(p_*)$ — до нормальної форми степеня l:

$$\frac{1}{2}\bar\Lambda(p_*) w^2 + \mu \bar G_2(p_*) z^2 +$$

$$+ \sum_{i,j=\overline{0,[l/2]},\ 2 \leq i+j \leq [l/2]} \mu^{2(i+j)-1} \bar F_{2i,2j}(p_*) w^{2i} z^{2j} + O(w^{l+1} + z^{l+1}),$$

де $\bar F_{2i,2j}(p_*) w^{2i} z^{2j} = A_{ij}(p_*) y^i z^{2j}$ одержується з $A_{ij}(p_*) y^i z^{2j}$ заміною y_s на $(w_s^2 + {} + w_{m+s}^2)/2$, $s = 1, \ldots, m$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$.

Сформулюємо тепер основний результат про біфуркацію канторової множини інваріантних торів збуреної системи в околі тора, заданого в координатах (p, q) рівнянням $p = p_*$, у випадку невиродженої матриці дужок Пуассона.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення* 2, 3, 7. *Тоді для кожного $\mu \in {} \in (-\mu_*; \mu_*)$, де $\mu_* > 0$ є досить малим, в $O\big(|\mu|\big)$-околі інваріантного тора $\mathbb{T}_*^n$ незбуреної системи, який відповідає квазістаціонарній точці p_*, існує відкрита множина $\mathcal{F}_\mu$, розшарована $(m + n)$-вимірними торами m-параметричної сім'ї $\{\mathbb{T}_\mu^{m+n}(\xi)\}_{\xi \in \mathcal{W}_0}$ з областю зміни параметрів $\mathcal{W}_0 := \{\xi \in \mathbb{R}^m : \rho < |\xi| < R\}$. Область $\mathcal{W}_0$ містить канторову множину $\mathfrak{C}_\mu$ таку, що для кожного $\xi \in \mathfrak{C}_\mu$ в $o(|\mu|^3)$-околі тора $\mathbb{T}_\mu^{m+n}(\xi)$ існує інваріантний тор $\mathcal{T}_\mu^{m+n}(\xi)$ збуреної системи, який несе на собі квазіперіодичні рухи з $m + n$ раціонально незалежними частотами. Існує таке гладке відображення $\lambda_\mu \colon \mathcal{W}_0 \mapsto \mathbb{R}^m$, що $\lambda_\mu(\xi) = O(|\mu|)$ і вектор базисних частот квазіперіодичних рухів на торі $\mathcal{T}_\mu^{m+n}(\xi)$ має вигляд $(\lambda_\mu(\xi), H_0{}'(p_*))$. При цьому $\operatorname{mes}\mathcal{C}_\mu \big/ \operatorname{mes}\mathcal{W}_0 \to 1$, $\mu \to 0$.*

3.2. Попередні перетворення. Для того щоб застосувати КАМ-теорію для встановлення існування квазіперіодичних рухів збуреної системи, початкову систему потрібно звести до спеціального вигляду.

На першому етапі виконаємо низку перетворень, які охоплюють як вироджений, так і невироджений випадки.

Спочатку виконаємо перетворення $p \mapsto p_0 + p$, в якому p_0 — n-вимірний параметр з областю зміни $\{|p_0| < R_1\}$, де $R_1 < R_0$. Одержану систему з гамільтоніаном $H_0(p_0+p)+\mu(H_1(p_0+p,\ q)+\beta\cdot q)$ усереднимо за кутовими змінними при малих $|p|$. З цією метою виконаємо симплектичне перетворення у вигляді зсуву за час $t = 1$ вздовж траєкторій гамільтонової системи з гамільтоніаном (інфінітезимальною твірною функцією) вигляду $\mu S_1(p,q,p_0) + \mu^2 S_2(p,q,p_0) + \ldots + \mu^l S_l(p,q,p_0)$. Вважаючи поки що невідомі функції $S_1(p,q,p_0), \ldots, S_l(p,q,p_0)$ дійсно-аналітичними щодо своїх аргументів, це перетворення можна подати як

$$\begin{aligned} p &\mapsto p - \mu {S_1}'_q - \mu^2({S_2}'_q + P_2) - \mu^3({S_3}'_q + P_3) + \ldots, \\ q &\mapsto q + \mu {S_1}'_p + \mu^2({S_2}'_p + Q_2) + \mu^3({S_3}'_p + Q_3) + \ldots, \end{aligned} \tag{16}$$

де $P_j,\ Q_j$ — деякі поліноми від частинних похідних першого та вищих порядків функцій $S_1, \ldots, S_{j-1}$.

Коефіцієнт при μ^j у розвиненні однозначної складової перетвореного гамільтоніана за степенями μ матиме вигляд $H_j(p,q,p_0) - {H_0}'(p_0 + p)\cdot {S_j}'_q(p,q,p_0)$, $j = 1, 2, \ldots, l$, де дійсно-аналітичні функції $H_j(p,q,p_0)$ не залежать від S_k, $k \geq j$. Вигляд багатозначної складової не змінюється.

Шукатимемо кожну функцію S_j у вигляді полінома щодо p: $S_j(p,q,p_0) = \sum_{k=0}^{l} S_{jk}(q,p_0)p^k$, де $S_{jk}(q,p_0)p^k$ позначає однорідну форму степеня k щодо p. Для кожного $j = 1, \ldots, l$ розвинемо коефіцієнт при μ^j однозначної складової перетвореного гамільтоніана за степенями p. Однорідна щодо p форма степеня k, $k = 0, 1, \ldots, l$, у формулі Тейлора для цього коефіцієнта має вигляд $\hat{H}_{jk}(q,p_0)p^k - {H_0}'(p_0) \cdot {S_{jk}}'_q(q,p_0)p^k$, де

$$\hat{H}_{jk}(q,p_0) := \frac{1}{k!}\left.\frac{\partial^k}{\partial p^k}\right|_{p=0}\left(H_j(p,q,p_0) - \sum_{i=0}^{k-1}\big({H_0}'(p_0+p)\cdot {S_{ji}}'_q(q,p_0)\big)p^i\right).$$

Тепер коефіцієнти форми S_{jk} визначаємо з гомологічних рівнянь

$${H_0}'(p_0)\cdot\frac{\partial}{\partial q}S_{jk} = [\mathcal{P}_N - \mathcal{P}_0]\hat{H}_{jk}(p_0,q), \quad k = 0, 1, \ldots, l,$$

де $\mathcal{P}_0(\bullet) := (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n}\bullet\, dq$, $\mathcal{P}_N := \sum_{0\leq|\mathbf{k}|\leq N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot q}\,\mathcal{P}_0(\bullet\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot q})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, $N \in \mathbb{N}$.

Розв'язки цих рівнянь знаходимо в області нерезонансних значень p_0, яку визначають нерівності

$$|p_0| < R_1, \quad \left|\mathbf{k}\cdot {H_0}'(p_0)\right| \geq \frac{\gamma}{2}|\mathbf{k}|^{-\tau}, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n\colon 0 < |\mathbf{k}| \leq N. \tag{17}$$

Якщо вибрати $T = T(\rho_0) > 0$ досить великим, то, поклавши $N = Tr|\ln\varepsilon|$, де $\varepsilon \in \left[|\mu|^d; \varepsilon_*\right]$ — додатковий додатний малий параметр, а r і d — деякі додатні числа, матимемо оцінку

$$\left|[\mathrm{Id} - \mathcal{P}_N]\hat{H}_{jk}(p_0, q)\right| < \varepsilon^r$$

при $|p_0| < R_1$, $|\operatorname{Im} q| < \rho_0/2$ і досить малому ε_*. В результаті гамільтоніан перетвореної системи для p_0 з області (17), $|p| < R_0/2$ та $|\operatorname{Im} q| < \rho_0/2$ набирає вигляду

$$H_0'(p_0)\cdot p + \frac{1}{2}H_0''(p_0)p^2 + \ldots + \mu\left(\overline{H_1{}_p'}(p_0)\cdot p + \frac{1}{2}\overline{H_1{}_{pp}''}(p_0)p^2 + \ldots\right) +$$

$$+\mu^2\left(\overline{H_2{}_p'}(p_0)\cdot p + \frac{1}{2}\overline{H_2{}_{pp}''}(p_0)p^2 + \ldots\right) + \ldots + O(p^{l+1}) + \mu O(\varepsilon^r) + \mu\beta\cdot q,$$

де риски над символами похідних позначають їхні середні за змінними q по тору $\mathbb{T}^n$, тобто значення оператора $\mathcal{P}_0$ на відповідних функціях. При цьому тут і далі ми користуємося тим, що вигляд гамільтонової системи на зміниться, якщо від її гамільтоніана відняти довільну сталу (залежну від p_0).

Виконаємо масштабні перетворення

$$p \mapsto \mu p, \qquad H_\mu \mapsto \mu^{-1}H_\mu, \qquad \{\bullet,\bullet\} \mapsto \mu\{\bullet,\bullet\}.$$

В результаті отримаємо систему з гамільтоніаном

$$H_0{}'(p_0)\cdot p + \frac{\mu}{2}H_0''(p_0)p^2 + \ldots + \left(\mu\overline{H_1{}_p'}(p_0)\cdot p + \frac{\mu^2}{2}\overline{H_1{}_{pp}''}(p_0)p^2 + \ldots\right) +$$

$$+\mu\left(\mu\overline{H_2{}_p'}(p_0)\cdot p + \frac{\mu^2}{2}\overline{H_2{}_{pp}''}(p_0)p^2 + \ldots\right) + \ldots + O(\mu^l + \varepsilon^r) + \beta\cdot q \qquad (18)$$

і дужкою Пуассона, заданою рівностями

$$\{p, p\} = C, \qquad \{q, p\} = E_n.$$

Розглянемо окремо вироджений та невироджений випадки.

Випадок виродженої білінійної форми $\mathcal{C}$. Після введення координат $v_i = p \cdot \varsigma_j$, $w_j = p \cdot \alpha_i$, $z_s = p \cdot \beta_s$ (див. п. 3.1) дужка Пуассона і гамільтоніан H_μ набирають відповідно вигляду

$$\{v, v\} = 0, \qquad \{w, w\} = I_{2m}, \qquad \{z, z\} = I_{2k}, \qquad \{q, v\} = \Sigma,$$

$$\{q, w\} = A, \qquad \{q, z\} = B,$$

$$H_\mu = \left(H_0{}_v' + \mu\overline{H_1{}_v'} + \ldots + \mu^l\overline{H_l{}_v'}\right)\cdot v + \left(H_0{}_w' + \mu\overline{H_1{}_w'} + \ldots + \mu^l\overline{H_l{}_w'}\right)\cdot w +$$

$$+ \left(H_0{}_z' + \mu\overline{H_1{}_z'} + + \ldots + \mu^l\overline{H_l{}_z'}\right)\cdot z + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{\substack{s=2\\0\le i+j\le s}}^{l} \mu^{s-1}\tilde{H}_{ijs}(v_0, w_0, z_0, \mu)v^i w^j z^{s-i-j} + O(\mu^l + \varepsilon^r) + \beta\cdot q, \qquad (19)$$

де всі похідні беруться в точці (v_0, w_0, z_0), яка відповідає точці p_0, і $\tilde{H}_{ijs}(v_0, w_0, z_0, 0) = \dfrac{1}{j!}H_0{}^{(j)}(v_0, w_0, z_0)$.

Введемо нові кутові змінні $\psi = q + AI_{2m}w + BI_{2k}z$. Тоді матриця дужок Пуассона набере вигляду

$$\{w,w\} = I_{2m}, \quad \{z,z\} = I_{2k}, \quad \{\psi, v\} = \Sigma, \quad \{\psi,\psi\} = \Gamma,$$

а гамільтоніан буде відрізнятись від (19) тим, що лінійними доданками по w та z будуть відповідно $(H_0{}'_w + \mu\overline{H_1{}'_w} + \ldots + \mu^l\overline{H_l{}'_w} + I_{2m}A^{\mathrm{T}}\beta)\cdot w$ і $(H_0{}'_z + \mu\overline{H_1{}'_z} + \ldots \ldots + \mu^l\overline{H_l{}'_z} + I_{2k}B^{\mathrm{T}}\beta)\cdot z$.

З цього моменту покладемо $(v_0, w_0, z_0) = (v_0(\eta,\mu), w_0(\eta,\mu), z_0(\eta,\mu))$, де функції $v_0(\eta,\mu)$, $w_0(\eta,\mu)$ і $z_0(\eta,\mu)$ визначаємо неявно умовами

$$H_0{}'_w(v_0,w_0,z_0) + \mu\overline{H_1{}'_w}(v_0,w_0,z_0) + \ldots + \mu^l\overline{H_l{}'_w}(v_0,w_0,z_0) + I_{2m}A^{\mathrm{T}}\beta = 0,$$

$$H_0{}'_z(v_0,w_0,z_0) + \mu\overline{H_1{}'_z}(v_0,w_0,z_0) + \ldots + \mu^l\overline{H_l{}'_z}(v_0,w_0,z_0) + I_{2k}B^{\mathrm{T}}\beta = 0,$$

$$(v_0(\eta,0), w_0(\eta,0), z_0(\eta,0)) = (v_*(\eta), w_*(\eta), z_*(\eta)).$$

З урахуванням припущення 5 функції $v_0(\eta,\mu)$, $w_0(\eta,\mu)$, $z_0(\eta,\mu)$ є дійсно-аналітичними при всіх досить малих $|\mu|$, причому $v_0(\eta,\mu) = v_*(\eta) + O(\mu)$, $w_0(\eta,\mu) = w_*(\eta) + O(\mu)$, $z_0(\eta,\mu) = z_*(\eta) + O(\mu)$ при $\mu \to 0$.

В результаті одержимо гамільтоніан

$$H_\mu = H_{101}(\eta,\mu)\cdot v + \mu\tilde{H}_2(\eta,\mu)(v,w,z)^2 +$$

$$+ \sum_{\substack{s=3\\0\le i+j\le s}}^{l} \mu^{s-1}H^*_{ijs}(\eta,\mu)v^iw^jz^{s-i-j} + O(\mu^l + \varepsilon^r) + \beta\cdot\psi,$$

де $H_{101}(\eta,\mu) = H_0{}'_v + \mu\overline{H_1{}'_v} + \ldots + \mu^l\overline{H_l{}'_v}$, $\tilde{H}_2(\eta,\mu)(v,w,z)^2 = \check{H}_{202}(\eta,\mu)v^2 + \check{H}_{022}(\eta,\mu)w^2 + \check{H}_{002}(\eta,\mu)z^2 + \check{H}_{112}(\eta,\mu)vw + \check{H}_{102}(\eta,\mu)vz + \check{H}_{012}(\eta,\mu)wz$ і коефіцієнти $H^*_{ijs}(\eta,\mu)$ є поліномами щодо μ степеня, не вищого ніж $l+1-s$, причому $H^*_{ijs}(\eta,0) = \dfrac{1}{s!}H_0{}^{(s)}(\eta)$.

З огляду на припущення 5 при всіх досить малих μ власні числа матриці $I\check{H}_{022}(\eta,\mu)$ є суто уявними і різними: $\pm \mathrm{i}\tilde{\lambda}_j(\eta,\mu)$, а власні числа матриці $I\check{H}_{002}(\eta,\mu)$ — різними і ненульовими: $\pm\tilde{\varpi}_i(\eta,\mu)$, $j = 1,\ldots,m$, $i = 1,\ldots,k$, тому можна вибрати $\mu_* > 0$ так, щоб існувала дійсно-аналітична щодо μ сім'я лінійних симплектичних перетворень $(w,z) \mapsto W(\eta,\mu)(w,z)$, $|\mu| < \mu_*$, яка зводить квадратичну форму $\tilde{H}_2(\eta,\mu)(v,w,z)^2$ до нормальної форми (див., наприклад, [14])

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\tilde{\lambda}_j(\eta,\mu)(w_j^2 + w_{m+j}^2) + \bar{G}_2(\eta,\mu)z^2 + \check{H}_2(\eta,\mu)v^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{\Lambda}(\eta,\mu)w^2 + \bar{G}_2(\eta,\mu)z^2 + \check{H}_2(\eta,\mu)v^2,$$

де $\tilde{\Lambda}(\eta,\mu) = \operatorname{diag}\{\tilde{\lambda}_1(\eta,\mu),\ldots,\tilde{\lambda}_m(\eta,\mu),\ \tilde{\lambda}_1(\eta,\mu),\ldots,\tilde{\lambda}_m(\eta,\mu)\}$, а $\bar{G}_2(\eta,\mu)$ — невироджена матриця, причому $\tilde{\lambda}_j(\eta,\mu) = \bar{\lambda}_j(\eta) + O(\mu)$, $\tilde{\varpi}_i(\eta,\mu) = \bar{\varpi}_i(\eta) + O(\mu)$, $\mu \to 0$, $j = 1,\ldots,m$, $i = 1,\ldots,k$. При цьому гамільтоніан H_μ набирає вигляду

$$H_\mu = H_{101}(\eta,\mu)\cdot v + \mu\left(\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}(\eta,\mu)w^2 + \bar{G}_2(\eta,\mu)z^2 + \breve{H}_2(\eta,\mu)v^2\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{s=3\\0\le i+j\le s}}^{l} \mu^{s-1}\tilde{H}_{ijs}(\eta,\mu)v^i w^j z^{s-i-j} + O(\mu^l + \varepsilon^r) + \beta\cdot\psi. \tag{20}$$

Зведемо до нормальної форми доданки за змінними v, w, z степеня від 3 до l. Процедуру нормалізації будемо проводити аналогічно [2]. Цього можна досягти за допомогою перетворення, яке зводить до нормальної форми гамільтоніан

$$\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}(\eta,\mu)w^2 + \bar{G}_2(\eta,\mu)z^2 + \breve{H}_2(\eta,\mu)v^2 + \sum_{\substack{s=3\\0\le i+j\le s}}^{l} \mu^{s-2}\tilde{H}_{ijs}(\eta,\mu)v^i w^j z^{s-i-j}. \tag{21}$$

Інфінітезимальну твірну функцію нормалізуючого перетворення шукаємо у вигляді

$$S = \sum_{\substack{s=3\\0\le i+j\le s}}^{l} \mu^{j-2}S_{ijs}(\mu)v^i w^j z^{s-i-j}.$$

Зауважимо, що перетворення з указаною твірною функцією не змінює змінних v.

Аналогічно [2] член степеня $s+2-i-j$ щодо v, степеня i щодо w, степеня j щодо z нормальної форми гамільтоніана (21) одержується множенням на μ^s члена степеня $s+2-i-j$ щодо v, степеня i щодо w, степеня j щодо z нормальної форми гамільтоніана

$$\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}(\eta,\mu)w^2 + \bar{G}_2(\eta,\mu)z^2 + \breve{H}_2(\eta,\mu)v^2 + \sum_{\substack{s=3\\0\le i+j\le s}}^{l} \tilde{H}_{ijs}(\eta,\mu)v^i w^j z^{s-i-j}. \tag{22}$$

Якщо ще взяти до уваги, що для всіх досить малих значень $|\mu|$ вектори $\tilde{\lambda}(\eta,\mu) = \big(\tilde{\lambda}_1(\eta,\mu),\ldots,\tilde{\lambda}_m(\eta,\mu)\big)$ та $\tilde{\varpi}(\eta,\mu) = \big(\tilde{\varpi}_1(\eta,\mu),\ldots,\tilde{\varpi}_k(\eta,\mu)\big)$ задовольняють умову

$$\min_{0<|\mathbf{j}|\le l}\left|\mathrm{i}\tilde{\lambda}(\eta,\mu)\cdot\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{\varpi}(\eta,\mu)\cdot\bar{\mathbf{j}}\right| \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\min_{0<|\mathbf{j}|\le l}\left|\mathrm{i}\bar{\lambda}(\eta)\cdot\tilde{\mathbf{j}} + \bar{\varpi}(\eta)\cdot\bar{\mathbf{j}}\right| > 0, \quad \mathbf{j} = (\tilde{\mathbf{j}},\bar{\mathbf{j}}) \in \mathbb{Z}^{m+k}, \tag{23}$$

а також той факт, що коефіцієнти $\tilde{H}_{ijs}(\eta,\mu)$ — дійсно-аналітичні функції в околі $\mu = 0$, то можна зробити такі висновки:

1) після нормалізації до порядку l включно гамільтоніан (22) набирає вигляду

$$\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}(\eta,\mu)w^2 + \bar{G}_2(\eta,\mu)z^2 + \breve{H}_2(\eta,\mu)v^2 + \sum_{i=3,\ldots,l}\breve{H}_i(\eta,\mu)v^i +$$

$$+ \sum_{\substack{i=\overline{0,l},\ j,s=\overline{1,[l/2]}\\3\le i+2(j+s)\le l}} \tilde{F}_{i,2j,2s}(\eta,\mu)v^i w^{2j} z^{2s} + \ldots,$$

де $\tilde{F}_{i,2j,2s}(\eta,\mu)v^i w^{2j} z^{2s} = \tilde{A}_{i,j,s}(\eta,\mu)v^i u^j z^{2s}$ одержуємо з $\tilde{A}_{i,j,s}(\eta,\mu)v^i u^j z^{2s}$ заміною u_k на $(w_k^2 + w_{m+k}^2)/2$, $k = 1,\ldots,m$; 2) коефіцієнти $\tilde{F}_{i,2j,2s}(\eta,\mu)v^i w^{2j} z^{2s}$ є дійсно-аналітичними в околі $\mu = 0$ і при $\mu \to 0$ переходять у відповідні коефіцієнти $\bar{F}_{i,2j,2s}(\eta,\mu)v^i w^{2j} z^{2s}$ нормальної форми степеня l функції $H_0(p_* + p) - H_0{}'(p_*)\cdot p - - H_0(p_*)$.

Таким чином, можна стверджувати, що гамільтоніан (20) зведено до вигляду

$$H_\mu = H_{101}(\eta,\mu)\cdot v + \mu\left(\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}(\eta,\mu)w^2 + \bar{G}_2(\eta,\mu)z^2 + \breve{H}_2(\eta,\mu)v^2\right) +$$

$$+ \sum_{i=3,\ldots,l} \mu^{i-1}\breve{H}_i(\eta,\mu)v^i + \sum_{\substack{i=\overline{0,l},\ j,s=\overline{1,[l/2]} \\ 3\le i+2(j+s)\le l}} \mu^{i+2j+2s-1}\tilde{F}_{i,2j,2s}(\eta,\mu)v^i w^{2j} z^{2s} +$$

$$+ O(\mu^l + \varepsilon^r) + \beta\cdot\psi.$$

Введемо тепер змінні $u = (u_1,\ldots,u_m)$ та $\phi = (\phi_1,\ldots,\phi_m)|\bmod 2\pi$ за формулами

$$w_i = \sqrt{2(\xi_i + u_i)}\cos\phi_i, \quad w_{i+m} = \sqrt{2(\xi_i + u_i)}\sin\phi_i, \quad i = 1,\ldots,m,$$

де $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_m)$ — m-вимірний параметр. Тоді для дужок Пуассона матимемо співвідношення

$$\{\phi, u\} = E_m, \quad \{z, z\} = I_{2k}, \quad \{\psi, v\} = \Sigma, \quad \{\psi,\psi\} = \Gamma, \tag{24}$$

а гамільтоніан H_μ зведеться до вигляду

$$H_\mu = H_{101}(\eta,\mu)\cdot v + \mu\left(\tilde{\lambda}(\eta,\mu)\cdot u + \bar{G}_2(\eta,\mu)z^2 + \breve{H}_2(\eta,\mu)v^2\right) +$$

$$+ \sum_{i=3,\ldots,l} \mu^{i-1}\breve{H}_i(\eta,\mu)v^i + \sum_{\substack{i=\overline{0,l},\ j,s=\overline{1,[l/2]} \\ 3\le i+2(j+s)\le l}} \mu^{i+2j+2s-1}\tilde{A}_{i,j,s}(\eta,\mu)v^i(\xi+u)^j z^{2s} +$$

$$+ O(\mu^l + \varepsilon^r) + \beta\cdot\psi,$$

або

$$H_\mu = \breve{\Lambda}(\eta,\mu)\cdot v + \hat{\lambda}(\eta,\xi,\mu)\cdot u + \mu\left(\bar{G}_2(\eta,\mu)z^2 + \breve{H}_2(\eta,\mu)v^2\right) + \mu^2\breve{H}_3(\eta,\mu)v^3 +$$

$$+ \mu^3 G_3(v,u,z,\eta,\xi,\mu) + f_\varepsilon(v,u,z,\phi,\psi,\eta,\xi,\mu) + \beta\cdot\psi,$$

в якому $\breve{\Lambda}(\eta,\mu) := H_0{}'(p_0(\eta,\mu)) + \sum_{j=1}^{l} \mu^j \overline{H_j{}'}(p_0(\eta,\mu),\mu)$, $\hat{\lambda}(\eta,\xi,\mu) := \mu\tilde{\lambda}(\eta,\mu) + + \sum_{j=2}^{[l/2]} \mu^{2j-1}\left(A_{0,j,0}(\eta,\mu)\xi^j\right)'_\xi$, а $\bar{G}_2(\eta,\mu)$, $\breve{H}_2(\eta,\mu)$, $\breve{H}_3(\eta,\mu)$ поліноміально залежать від μ, $G_3(v,u,z,\eta,\xi,\mu)$ поліноміально залежить від v, u, z, ξ, μ і не містить доданків по u, v і z степеня, нижчого ніж 3, $f_\varepsilon(v,u,z,\phi,\psi,\eta,\xi,\mu)$ — дійсно-аналітична функція в області

$$\begin{gathered} |v| < \rho, \quad |u| < \rho, \quad |z| < \rho, \quad |\operatorname{Im}\phi| < \rho, \quad |\operatorname{Im}\psi| < \rho, \\ \eta \in \mathcal{U} + \delta, \quad \rho < |\xi| < R, \quad |\mu| < \mu_*, \end{gathered} \tag{25}$$

де ρ, δ, R $(R > \rho)$ — деякі додатні числа, причому $f_\varepsilon(v,u,z,\phi,\psi,\eta,\xi,\mu) = O(\mu^l + \varepsilon^r)$ рівномірно щодо ϕ, ψ, η, ξ, які задовольняють нерівності (17), (25).

Тепер остаточно зведемо гамільтоніан H_μ до такого вигляду, щоб застосувати КАМ-теорему про існування квазіперіодичних рухів для локально гамільтонових систем при наявності додаткових змінних.

Зафіксуємо додатні числа d і r так, щоб виконувались нерівності $l > 2 + d$, $r > 1 + 2/d$, і покладемо $\varepsilon = |\mu|^d$. Тоді для досить малого $\mu_* > 0$ в області, яка задається нерівностями (17), (25), буде виконуватись оцінка $\left|f_{\mu^d}(v,u,\phi,\psi,\eta,\xi,\mu)\right| < |\mu|^{2+d}$. Нарешті, визначимо функцію

$$h_\mu(v,u,z,\phi,\psi,\eta,\xi) := \mu\breve{H}_2(\eta,\mu)v^2 + \mu^2\breve{H}_3(\eta,\mu)v^3 +$$

$$+\mu^3 G_3(v,u,z,\eta,\xi,\mu) + f_\varepsilon(v,u,z,\phi,\psi,\eta,\xi,\mu).$$

З наведених вище міркувань випливає така підготовча теорема для випадку виродженої білінійної форми $\mathcal{C}$.

Теорема 4. *Нехай виконуються припущення* 1, 3 – 5. *Тоді для деякого додатного числа μ_* і для будь-якого $\mu \in (-\mu_*;\mu_*)$ в $O(\mu)$-околі квазістаціонарного многовиду існує відкрита множина, яка є об'єднанням $(m+n)$-вимірних торів $\mathbb{T}^{m+n}_\mu(\vartheta) = \mathbb{T}^m_\mu(\vartheta)\times\mathbb{T}^n_\mu(\vartheta)$, занумерованих $k_0 + m$ параметрами $\vartheta = (\eta,\xi) \in \mathcal{W}_0$, де $\mathcal{W}_0 := \left\{\vartheta \in \mathbb{R}^{k_0+m} : \eta \in \mathcal{U},\ \rho < |\xi| < R\right\}$. В околі кожного тора $\mathbb{T}^{m+n}_\mu(\vartheta)$ можна ввести гладко залежні від ϑ координати прямого добутку*

$$\{v \in \mathbb{R}^{k_0}\}\times\{u \in \mathbb{R}^m\}\times\{z \in \mathbb{R}^k\}\times\{\phi \in \mathbb{R}^m/2\pi\mathbb{Z}^m\}\times\{\psi \in \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n\}$$

так, щоб цей тор задавався рівняннями $v = 0$, $u = 0$, $z = 0$, змінні ϕ і ψ були кутовими координатами відповідно на торах $\mathbb{T}^m_\mu(\vartheta)$ і $\mathbb{T}^n_\mu(\vartheta)$, дужка Пуассона визначалася рівностями (24)*, а гамільтоніан H_μ мав вигляд*

$$H_\mu = \breve{\Lambda}(\eta,\mu)\cdot v + \hat{\lambda}(\eta,\xi,\mu)\cdot u + \mu\bar{G}_2(\eta,\mu)z^2 + h_\mu(v,u,z,\phi,\psi,\eta,\xi) + \beta\cdot\psi.$$

При цьому функції $\breve{\Lambda}(\eta,\mu)$, $\hat{\lambda}(\eta,\xi,\mu)$, $\bar{G}_2(\eta,\mu)$, $h_\mu(v,u,\phi,\psi,\eta,\xi)$ є гладкими в сенсі дійсного аналізу й рівномірно щодо $\mu \in (0;\mu_*)$ обмежені разом з усіма своїми частинними похідними довільного порядку в області (25) *і матриця $\bar{G}_2(\eta,\mu)$ невироджена для всіх $|\mu| < \mu_*$, $\eta \in \mathcal{U} + \delta$. Крім того, якщо параметри η обмежити множиною, яка виділяється з $\mathcal{U} + \delta$ нерівностями* (17), (23) *при $p_0 = p_0(\eta,\mu)$ і $N = N_\mu := Tr\,|\ln\mu^d|$, то дістанемо область, в якій зазначені функції будуть дійсно-аналітичними і при цьому*

$$\max\left\{|h_\mu|_{\substack{y=0\\z=0}},\ \left|h'_{\mu y}\right|_{\substack{y=0\\z=0}},\ |h'_{\mu z}|_{\substack{y=0\\z=0}}\right\} \le \mu^{2+d},$$

$$\max\left\{\left|h''_{\mu yy}\right|_{\substack{y=0\\z=0}},\ \left|h''_{\mu yz}\right|_{\substack{y=0\\z=0}}\right\} \le \mu C,$$

$$\max\left\{|h_\mu|,|h'_{\mu x}|,|h''_{\mu xx}|\right\} \le C$$

з деякою сталою $C > 0$ і $y = (v,u)$, $x = (y,z,\phi,\psi,\vartheta)$.

Розглянемо локально гамільтонову систему, породжену лінеаризованим гамільтоніаном „першого наближення” $\Lambda(\eta)\cdot v + \mu\lambda(\eta)\cdot u + \beta\cdot\psi$. Кожен тор $\mathcal{T}^{m+n}_\mu(\vartheta)$ є інваріантним для цієї системи, а рівняння руху на ньому в координатах ϕ, ψ мають вигляд

$$\dot{\phi} = \mu\lambda(\eta), \qquad \dot{\psi} = \varSigma\Lambda(\eta) + \varGamma\beta.$$

Таким чином, маємо вироджений випадок, коли вектор частот лінеаризованої системи першого наближення має „повільні” $\mu\lambda(\eta)$ і „швидкі” $\varSigma\Lambda(\eta) + \varGamma\beta$ компоненти. Покажемо, що для останніх справджується рівність

$$H_0{}'(p_*(\eta)) = \varSigma\Lambda(\eta) + \varGamma\beta. \tag{26}$$

Справді, з одного боку,

$$H_0'(p_*(\eta)) = \big\{q, H_0'(p_*(\eta)) \cdot p\big\} =$$

$$= \big\{\psi - AI_{2m}w - BI_{2k}z, H_0{}'_v{\cdot}v + H_0{}'_w{\cdot}w + H_0{}'_z{\cdot}z\big\} = \varSigma\Lambda(\eta) + AH_0{}'_w + BH_0{}'_z.$$

З іншого боку, враховуючи явний вигляд матриці $\varGamma$ та означення многовиду квазістаціонарних точок, маємо

$$\varGamma\beta = (AI_{2m}A^{\mathrm{T}} + BI_{2k}B^{\mathrm{T}})\beta = AH_0{}'_w + BH_0{}'_z.$$

Порівнюючи одержані рівності, дістаємо потрібний результат.

Випадок невиродженої білінійної форми $\mathcal{C}$. Введемо нові кутові змінні $\psi = q - C^{-1}p$. Тоді матриця дужок Пуассона розщеплюється на блоки

$$\{p, p\} = C, \qquad \{\psi, \psi\} = C^{-1},$$

а вигляд перетвореного гамільтоніана відрізнятиметься від (18) лише тим, що першим доданком буде $\big(H_0{}'(p_0) - C^{-1}\beta\big) \cdot p$, а багатозначною складовою — $\beta{\cdot}\psi$.

Тепер покладемо $p_0 = p_0(\mu)$, де функція $p_0(\mu)$ визначається неявно умовами

$$H_0{}'(p_0) + \mu\overline{H_1{}'_p}(p_0) + \mu^2\overline{H_2{}'_p}(p_0) + \ldots + \mu^l\overline{H_l{}'_p}(p_0) - C^{-1}\beta = 0, \quad p_0(0) = p_*. \tag{27}$$

З урахуванням припущення 7 $p_0(\mu)$ є дійсно-аналітичною функцією при всіх досить малих $|\mu|$, причому $p_0(\mu) = p_* + O(|\mu|)$, $\mu \to 0$.

Важливо зазначити, що при виконанні припущення 7 нерівності (17) справджуватимуться при $p_0 = p_0(\mu)$ при всіх досить малих за модулем μ, адже $N = O\big(\big|\ln|\mu|\big|\big)$.

В результаті виконаних перетворень, згрупувавши доданки з однаковими степенями p^k, $k = 1, 2, \ldots, l$, з урахуванням рівності (27) дістанемо систему, гамільтоніан якої можна подати у вигляді

$$H_\mu = \sum_{j=2}^{l} \mu^{j-1} H_j^*(\mu) p^j + O(|\mu|^l + \varepsilon^r) + \beta{\cdot}\psi,$$

де коефіцієнти форми $H_j^*(\mu)$ є поліномами щодо μ степеня, не вищого ніж $l+1-j$, причому $H_j^*(0) = \dfrac{1}{j!} H_0^{(j)}(p_*)$.

У просторі $\mathbb{R}^n$ змінних p можна ввести базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m}$, $\beta_1, \ldots, \beta_{2k}$, $2(m + k) = n$, так, щоб матриця дужок Пуассона нових змінних $w_j = \alpha_j \cdot p$, $z = \beta_i \cdot p$, $j = 1, 2, \ldots, 2m$, $i = 1, \ldots, 2k$, набрала вигляду

$$\{w, w\} = \begin{pmatrix} 0 & -E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix} =: I_{2m}, \qquad \{z, z\} = \begin{pmatrix} 0 & -E_k \\ E_k & 0 \end{pmatrix} =: I_{2k}.$$

Нехай $\hat{F}_2(\mu)w^2 + \hat{G}_2(\mu)z^2 + \hat{H}_2(\mu)wz$ — квадратична форма, одержана з $H_2^*(\mu)p^2$ після введення координат w, z. Оскільки з огляду на припущення 7 при всіх досить малих за модулем μ матриця $IH_2^*(\mu)$ має суто уявні різні власні числа $\pm i\tilde{\lambda}_j(\mu)$ і ненульові власні числа $\pm\tilde{\varpi}_i(\mu)$, то число $\mu_* > 0$ можна вибрати так, щоб існувала дійсно-аналітична щодо параметра μ сім'я лінійних симплектичних перетворень $(w, z) \mapsto W(\mu)(w, z)$, $|\mu| < \mu_*$, яка зводить квадратичну форму $\hat{F}_2(\mu)w^2 + \hat{G}_2(\mu)z^2 + \hat{H}_2(\mu)wz$ до нормальної форми (див. [14]) $\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i(\mu)(w_i^2 + w_{m+i}^2) + \bar{G}_2(\mu)z^2 = \dfrac{1}{2}\tilde{\Lambda}(\mu)w^2 + \bar{G}_2(\mu)z^2$, де $\tilde{\Lambda} := \operatorname{diag}\{\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_m, \tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_m\}$, а $\bar{G}_2(\mu)$ — невироджена матриця, причому $\tilde{\lambda}_j(\mu) = \bar{\lambda}_j(p_*) + O(|\mu|)$, $\tilde{\varpi}_i(\mu) = \bar{\varpi}_i(p_*) + O(\mu)$, $\mu \to 0$, $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, k$.

Тепер гамільтоніан H_μ набирає вигляду

$$H_\mu = \mu\left(\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}(\mu)w^2 + \bar{G}_2(\mu)z^2\right) + \\ + \sum_{\substack{i,j=0,\ldots,l \\ 3\le i+j\le l}} \mu^{i+j-1}\tilde{H}_{ij}(\mu)w^i z^j + O(|\mu|^l + \varepsilon^r) + \beta\cdot\psi. \tag{28}$$

Зведемо доданки за змінними w, z степенів від 3 до l гамільтоніана (28) до нормальної форми. Зрозуміло, що цього можна досягти за допомогою перетворення, яке зводить до нормальної форми гамільтоніан

$$\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}(\mu)w^2 + \bar{G}_2(\mu)z^2 + \sum_{i,j=\overline{0,l},\ 3\le i+j\le l} \mu^{i+j-2}\tilde{H}_{ij}(\mu)w^i z^j. \tag{29}$$

Інфінітезимальну твірну функцію нормалізуючого перетворення шукаємо у вигляді $S = \sum_{i,j=\overline{0,l},\ 3\le i+j\le l} \mu^{i+j-2}S_{ij}(\mu)w^i z^j$.

Аналогічно виродженому випадку, взявши до уваги, що для всіх досить малих значень $|\mu|$ вектори $\tilde{\lambda}(\mu) = \big(\tilde{\lambda}_1(\mu), \ldots, \tilde{\lambda}_m(\mu)\big)$ та $\tilde{\varpi}(\mu) = \big(\tilde{\varpi}_1(\mu), \ldots, \tilde{\varpi}_k(\mu)\big)$ задовольняють умову

$$\min_{0<|\mathbf{j}|\le l}\left|\mathrm{i}\tilde{\lambda}(\mu)\cdot\tilde{\mathbf{j}} + \tilde{\varpi}(\mu)\cdot\bar{\mathbf{j}}\right| \ge \\ \ge \frac{1}{2}\min_{0<|\mathbf{j}|\le l}\left|\mathrm{i}\bar{\lambda}(p_*)\cdot\tilde{\mathbf{j}} + \bar{\varpi}(p_*)\cdot\bar{\mathbf{j}}\right| > 0, \qquad \mathbf{j} = (\tilde{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{j}}) \in \mathbb{Z}^{m+k},$$

а також той факт, що коефіцієнти $\tilde{H}_{ij}(\mu)$ — дійсно-аналітичні функції в околі $\mu = 0$, можна зробити висновки, що після нормалізації до порядку l включно гамільтоніан $\dfrac{1}{2}\tilde{\Lambda}(\mu)w^2 + \bar{G}_2(\mu)z^2 + \sum_{i,j=\overline{0,l},\ 3\le i+j\le l}\tilde{H}_{ij}(\mu)w^i z^j$ набирає вигляду

$$\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}(\mu)w^2 + \bar{G}_2(\mu)z^2 + \sum_{i,j=\overline{0,[l/2]},\ \ 2\le i+j\le[l/2]} \tilde{F}_{ij}(\mu)w^{2i}z^{2j},$$

де $\tilde{F}_{ij}(\mu)w^{2i}z^{2j} = \tilde{A}_{ij}(\mu)y^i z^{2j}$ одержується з $\tilde{A}_{ij}(\mu)y^i z^{2j}$ заміною y_s на $(w_s^2 + w_{m+s}^2)/2$, $s = 1, \ldots, m$, коефіцієнти $\tilde{F}_{ij}(\mu)$ є дійсно-аналітичними в околі $\mu = 0$ і при $\mu \to 0$ переходять у відповідні коефіцієнти $\bar{F}_{ij}(p_*)$ нормальної форми степеня l функції $H_0(p_* + p) - H_0{}'(p_*)\cdot p - H_0(p_*)$.

Таким чином, можна стверджувати, що гамільтоніан (28) зведено до вигляду

$$H_\mu = \mu\left(\frac{1}{2}\tilde{\Lambda}(\mu)w^2 + \bar{G}_2(\mu)z^2\right) + \\ + \sum_{i,j=\overline{0,[l/2]},\ \ 2\le i+j\le[l/2]} \mu^{2(i+j)-1}\tilde{F}_{ij}(\mu)w^{2i}z^{2j} + O(|\mu|^l + \varepsilon^r) + \beta\cdot\psi.$$

Введемо тепер змінні $(y, \phi|\bmod 2\pi)$ за формулами

$$w_i = \sqrt{2(\xi_i + y_i)}\cos\phi_i, \qquad w_{m+i} = \sqrt{2(\xi_i + y_i)}\sin\phi_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

де $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ — m-вимірний параметр. Тоді для дужки Пуассона матимемо рівності

$$\{\phi, y\} = E_m, \qquad \{z, z\} = I_{2k}, \qquad \{\psi, \psi\} = C^{-1}, \tag{30}$$

а збурений гамільтоніан набере вигляду

$$H_\mu = \mu\left(\frac{1}{2}\tilde{\lambda}(\mu)\cdot y + \bar{G}_2(\mu)z^2\right) + \\ + \sum_{i,j=\overline{0,[l/2]},\ \ 2\le i+j\le[l/2]} \mu^{2(i+j)-1}\tilde{A}_{ij}(\mu)y^i z^{2j} + O(|\mu|^l + \varepsilon^r) + \beta\cdot\psi,$$

або

$$H_\mu = \hat{\lambda}(\xi, \mu)\cdot y + \mu\bar{G}_2(\mu)z^2 + \mu^3 G_3(y, z, \xi, \mu) + f_\varepsilon(y, z, \phi, \psi, \xi, \mu) + \beta\cdot\psi,$$

де $\hat{\lambda}(\xi, \mu) := \mu\tilde{\lambda}(\mu) + \sum_{j=2}^{[l/2]} \mu^{2j-1}\big(\tilde{A}_{j0}(\mu)\xi^j\big)'_\xi$, матриця $\bar{G}_2(\mu)$ невироджена для всіх $|\mu| < \mu_*$, форма $G_3(y, z, \xi, \mu)$ поліноміально залежить від y, z, ξ, μ і не містить доданків по y, z степеня, нижчого ніж 3, а $f_\varepsilon(y, z, \phi, \psi, \xi, \mu)$ — дійсно-аналітична функція в області

$$|y| < \rho, \quad |z| < \rho, \quad |\operatorname{Im}\phi| < \rho, \quad |\operatorname{Im}\psi| < \rho, \quad \rho < |\xi| < R, \quad |\mu| < \mu_*, \tag{31}$$

де ρ, δ і R $(R > \rho)$ — деякі додатні числа, причому $f_\varepsilon(y, z, \phi, \psi, \xi, \mu) = O(|\mu|^l + \varepsilon^r)$ рівномірно щодо змінних ϕ, ψ, ξ, які задовольняють нерівності (31).

Зафіксуємо тепер додатні числа d та r так, щоб вони задовольняли нерівності $l > 6 + d$, $r > 1 + 6/d$, і покладемо $\varepsilon = |\mu|^d$. Тоді для досить малого $\mu_* > 0$ в області (31) буде виконуватись нерівність $|f_{\mu^d}(y, z, \phi, \psi, \xi, \mu)| < |\mu|^{6+d}$. Нарешті, увівши функцію

$$h_\mu(y, z, \phi, \psi, \xi) = \mu^3 G_3(y, z, \xi, \mu) + f_{\mu^d}(y, z, \phi, \psi, \xi, \mu),$$

з урахуванням наведених вище міркувань сформулюємо такий підготовчий результат для випадку невиродженої матриці дужок Пуассона.

Теорема 5. *Нехай виконуються припущення* 2, 3, 7. *Тоді для кожного* $\mu \in \in (-\mu_*; \mu_*)$, *де* $\mu_* > 0$ — *досить мале, в* $O(|\mu|)$*-околі інваріантного тора незбуреної системи, який відповідає квазістаціонарній точці* p_*, *існує відкрита множина, яка розшаровується* $(m+n)$*-вимірними торами* $\mathbb{T}^{m+n}_\mu(\xi) = \mathbb{T}^m_\mu(\xi) \times \mathbb{T}^n_\mu(\xi)$, *занумерованими* m *параметрами* $\xi \in \mathcal{W}_0 := \big\{\xi \in \mathbb{R}^m : \rho < |\xi| < R\big\}$. *В околі кожного тора* $\mathbb{T}^{m+n}_\mu(\xi)$ *можна ввести дійсно-аналітичні і дійсно-аналітично залежні від* ξ *координати прямого добутку*

$$\{y \in \mathbb{R}^m\} \times \{z \in \mathbb{R}^{2k}\} \times \{\phi \in \mathbb{R}^m/2\pi\mathbb{Z}^m\} \times \{\psi \in \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n\}$$

так, щоб цей тор задавався рівняннями $y = 0$, $z = 0$, *змінні* ϕ *і* ψ *були кутовими координатами на торах* $\mathbb{T}^m_\mu(\xi)$ *і* $\mathbb{T}^n_\mu(\xi)$ *відповідно, дужка Пуассона визначалася рівностями* (30)*, а гамільтоніан збуреної системи мав вигляд*

$$H_\mu = \hat{\lambda}(\xi,\mu)\cdot y + \mu \bar{G}_2(\mu) z^2 + h_\mu(y,z,\phi,\psi,\xi) + \beta\cdot\psi, \tag{32}$$

де $\hat{\lambda}(\xi,\mu)$, $\bar{G}_2(\mu)$ — *гладкі в сенсі дійсного аналізу і рівномірно щодо* $\mu \in (-\mu_*, \mu_*)$ *обмежені разом з усіма своїми частинними похідними довільного порядку в області* (31)*, матриця* $\bar{G}_2(\mu)$ *невироджена для всіх* $\mu \in (-\mu_*, \mu_*)$, $h_\mu(y,z,\phi,\psi,\xi)$ — *дійсно-аналітична функція змінних* $x = (y,z,\phi,\psi,\xi)$ *в області, яка визначається умовами* (31)*. Крім того, в цій області виконані оцінки*

$$\max\left\{|h_\mu|_{\substack{y=0\\z=0}}, \left|h'_{\mu y}\right|_{\substack{y=0\\z=0}}, |h'_{\mu z}|_{\substack{y=0\\z=0}}\right\} \le |\mu|^{6+d},$$

$$\max\left\{\left|h''_{\mu yy}\right|_{\substack{y=0\\z=0}}, \left|h''_{\mu yz}\right|_{\substack{y=0\\z=0}}\right\} \le |\mu|^3 c,$$

$$\max\left\{|h_\mu|, |h'_{\mu x}|, |h''_{\mu xx}|\right\} \le c$$

з деякою сталою $c > 0$ *і* $x = (y,z,\phi,\psi,\xi)$.

3.3. Доведення основного результату. *Випадок виродженої білінійної форми* $\mathcal{C}$. Якщо ввести $(k+m)$-вимірні вектори $y := (v,u)$ та $\lambda_\mu(\vartheta) := \big(\breve{\Lambda}(\eta,\mu), \hat{\lambda}(\eta,\xi,\mu)\big)$, $\varPi = 2\mu\bar{G}_2(\mu)$, а також $(m+n)$-вимірні вектори $\varphi := (\phi,\psi)$ та $\zeta = (0,\beta)$, то отримаємо

$$H_\mu = \lambda_\mu(\vartheta)\cdot y + \frac{1}{2}\varPi z^2 + h_\mu(y,z,\varphi,\vartheta) + \zeta\cdot\varphi.$$

Відповідні матриці дужок Пуассона в даному випадку матимуть вигляд

$$\{\varphi, y\} = \begin{pmatrix} 0_{m\times k} & E_m \\ \varSigma & 0_{n\times m}\end{pmatrix} =: \sigma, \qquad \{z,z\} = \begin{pmatrix} 0_k & -E_k \\ E_k & 0_k\end{pmatrix} =: I,$$

$$\{\varphi,\varphi\} = \begin{pmatrix} 0_m & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & \varGamma\end{pmatrix} =: \chi.$$

Для того щоб застосувати теорему 1, потрібно визначити множину $\mathcal{V}$. Будемо вважати, що β — фіксований вектор, так що параметрами є ϑ і $\lambda \in \mathbb{R}^{m+k}$. Покладемо $r_\mu := \mu|\ln\mu^d|^{-\tau-1}$.

Введемо множину $\mathcal{V}_\mu$, яка складається з тих $\nu = (\lambda,\eta,\xi) \in \mathbb{R}^{2(m+k)}$, що задовольняють умови

$$|\lambda| < R, \quad \eta \in \mathcal{U}, \quad \rho + r_\mu < |\xi| < R - r_\mu,$$
$$\left|\mathbf{m} \cdot H_0{}'(p_0(\eta, \mu))\right| \geq \gamma |\mathbf{m}|^{-\tau}, \quad \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n\colon\ 0 < |\mathbf{m}| \leq N_\mu, \tag{33}$$
$$\left|\,\tilde{\mathbf{j}} \cdot \mathrm{i}\tilde{\lambda}(\eta, \mu) + \bar{\mathbf{j}} \cdot \tilde{\varpi}(\eta, \mu)\right| \neq 0, \quad \mathbf{j} = (\tilde{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{j}}) \in \mathbb{Z}^{m+k}\colon 0 < |\mathbf{j}| \leq l.$$

Тепер очевидно, що функція h_μ в області

$$\Omega_\mu := \Big\{(y, \varphi, \nu) \in \mathbb{C}^{2k+3m+2n}\colon |y| < \rho, \|z| < \rho,\ |\operatorname{Im}\varphi| < \rho,\ \nu \in \mathcal{V}_\mu + r_\mu\Big\},$$

задовольняє всі умови теореми 1.

Спираючись на цю теорему, опишемо побудову множини параметрів ϑ, кожній точці якої відповідає $(m+n)$-вимірний інваріантний тор гамільтонової системи, породженої гамільтоніаном H_μ. Нехай $F(\varphi, \nu) = F_\mu(\varphi, \lambda, \vartheta)$, $G(\varphi, \nu) = G_\mu(\varphi, \lambda, \vartheta)$ і $\Delta(\nu) = \Delta_\mu(\lambda, \vartheta)$ — відображення, побудовані згідно з теоремою 1. Відповідно до зауваження 1 для кожного натурального s і дійсного $k \geq 1$ можна вибрати числа r, d і $\mu_* > 0$ так, щоб виконувалось

$$\max\left\{\left|F_\mu(\varphi, \lambda, \vartheta)\right|_s,\ \left|\Delta_\mu(\lambda, \vartheta)\right|_s,\ \left|G_\mu(\varphi, \lambda, \vartheta)\right|_s\right\} \leq$$
$$\leq c(s, \varkappa)\mu^{bd+1-s}|\ln \mu^d|^{s(\tau+1)} \leq \mu^k$$

для всіх $|\mu| < \mu_*$. Відтак рівняння $\lambda + \mu\Delta_\mu(\lambda, \vartheta) = \lambda_\mu(\vartheta)$ можна розв'язати відносно λ і таким чином визначити гладку функцію вигляду $\lambda = \lambda_\mu(\vartheta) + \mu\check{\lambda}_\mu(\vartheta)$, де $|\check{\lambda}_\mu(\vartheta)|_s = O(\mu^s)$ при $\mu \to 0$.

Нарешті, визначимо множину $\mathcal{W}_\mu$, яка складається з тих ϑ, які задовольняють умови (33) і нерівності

$$\left|\mathbf{n} \cdot \mathrm{i}\big(\sigma(\lambda_\mu(\vartheta) + \mu\hat{\lambda}_\mu(\vartheta)) + \chi(\eta)\zeta\big) - \varpi_j(\vartheta)\right| \geq \mu\gamma|\mathbf{n}|^{-\tau},$$
$$\left|\mathbf{n} \cdot \big(\sigma(\lambda_\mu(\vartheta) + \mu\hat{\lambda}_\mu(\vartheta)) + \chi(\eta)\zeta\big)\right| \geq \mu\gamma|\mathbf{n}|^{-\tau} \tag{34}$$
$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^{m+n} \setminus \{0\}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Зауважимо, з огляду на рівність (26), що основну роль при визначенні структури і метричних характеристик множини $\mathcal{W}_\mu$ відіграють дійсно-аналітичні в області $\mathcal{U} + \delta$ функції $H_0{}'(p_0(\eta, \mu))$ і $\bar{\lambda}(\eta, \mu)$.

З відомих результатів теорії діофантових наближень на підмноговидах евклідового простору [5, 10, 13] та припущення 6 випливає така лема.

Лема 2. *Для кожного $\xi \in \mathbb{R}^m$ такого, що $\rho + r_\mu < |\xi| < R - r_\mu$, позначимо через $\mathcal{U}_{\mu,\xi}$ множину, утворену тими $\eta \in \mathcal{U}$, що задовольняють нерівності* (33) *та* (34)*. Тоді при відповідному виборі числа τ справджується рівність* $\lim\limits_{\mu\to 0} \operatorname{mes}\mathcal{U}_{\mu,\xi}\big/\operatorname{mes}\mathcal{U} = 1$.

Випадок невиродженої білінійної форми $\mathcal{C}$. Введемо $(m+n)$-вимірні вектори $\varphi{:=}(\phi, \psi)$, $\zeta := (0, \beta)$ та $\mathit{\Pi} = 2\mu\bar{G}_2(\mu)$. Тоді

$$H_\mu = \hat{\lambda}(\xi, \mu)\cdot y + \frac{1}{2}\mathit{\Pi} z^2 + h_\mu(y, \varphi, \xi) + \zeta\cdot\varphi, \tag{35}$$

а для матриці дужок Пуассона матимемо

$$\{\varphi, y\} = \begin{pmatrix} E_m \\ 0_{n\times m} \end{pmatrix} =: \sigma, \qquad \{z, z\} = \begin{pmatrix} 0_k & -E_k \\ E_k & 0_k \end{pmatrix} =: I,$$

$$\{\varphi, \varphi\} = \begin{pmatrix} 0_m & 0_{m\times n} \\ 0_{n\times m} & C^{-1} \end{pmatrix} =: \chi.$$

Покладемо $r_\mu := |\mu|^3 |\ln|\mu|^d|^{-\tau-1}$. На підставі теореми 5, рівності $\sigma^{\mathrm{T}}\zeta = 0$, теореми 1 і зауваження 1 можна зробити такий висновок: якщо зафіксувати довільним чином числа $\varkappa \in (0;1)$, $b \in (1/2;1)$, $s \in \mathbb{N}$, то число $\mu_* \in (0;1)$ можна вибрати так, щоб для кожного $\mu \in (-\mu_*, \mu_*)$ існували відображення

$$F_\mu(\varphi, \lambda, \xi) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{T}^{m+n} \times \mathbb{R}^{2m} \mapsto \mathbb{R}^m),$$

$$G_\mu(\varphi, \lambda, \xi) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{T}^{m+n} \times \mathbb{R}^{2m} \mapsto \mathbb{R}^k),$$

$$\Delta_\mu(\lambda, \xi) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^{2m} \mapsto \mathbb{R}^m)$$

такі, що для будь-яких λ, ξ, які задовольняють умови

$$|\lambda| < R, \qquad \rho + r_\mu < |\xi| < R - r_\mu, \qquad |\mathbf{j}\cdot\lambda + \mathbf{k}\cdot C^{-1}\beta| > |\mu|^3\gamma(|\mathbf{j}| + |\mathbf{k}|)^{-\tau},$$

$$\left|\mathrm{i}(\mathbf{j}\cdot\lambda + \mathbf{k}\cdot C^{-1}\beta) - \varpi_i\right| > |\mu|^3\gamma(|\mathbf{j}| + |\mathbf{k}|)^{-\tau}$$

$$\forall (\mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \mathbb{Z}^{m+n} \setminus \{0\}, \quad i = 1, \ldots, k,$$

допоміжна система з гамільтоніаном $(\lambda + \mu^3\Delta_\mu(\lambda, \xi))\cdot y + \dfrac{1}{2}\Pi z^2 + h_\mu(y, \varphi, \xi) + \zeta\cdot\varphi$ мала інваріантний тор, заданий рівняннями $y = F_\mu(\varphi, \lambda, \xi)$, $z = G_\mu(\varphi, \lambda, \xi)$, і при цьому C^s-норми зазначених відображень задовольняли нерівності

$$\max\left\{\left|F_\mu(\varphi, \lambda, \xi)\right|_s,\ \left|G_\mu(\varphi, \lambda, \xi)\right|_s,\ \left|\Delta_\mu(\lambda, \xi)\right|_s\right\} \le$$

$$\le c(s, \varkappa)|\mu|^{bd+3(1-s)}|\ln|\mu|^d|^{s(\tau+1)}, \quad \forall\, \mu \in (-\mu_*, \mu_*),$$

де $c(s, \varkappa)$ — стала, яка залежить лише від s та $\varkappa$. Для того щоб цей результат застосувати до системи з гамільтоніаном (35), потрібно відповідно до модифікованого методу штучних параметрів [5] визначити $\lambda = \lambda_\mu(\xi)$ як неявну функцію зі співвідношення

$$\lambda + \mu^3\Delta_\mu(\lambda, \xi) = \hat{\lambda}(\xi, \mu) \equiv \mu\tilde{\lambda}(\mu) + \sum_{j=2}^{[l/2]} \mu^{2j-1}\big(\tilde{A}_{j0}(\mu)\xi^j\big)'_\xi.$$

Зрозуміло, що за умови достатньої мализни μ_* для кожного $\mu \in (-\mu_*, \mu_*)$ така функція існує і є гладкою в області $\rho + 2r_\mu < |\xi| < R - 2r_\mu$. Крім того, $\lambda_\mu(\xi) = \mu\tilde{\lambda}(\mu) + 2\mu^3 A_{2,0}(p_*)\xi + O(\mu^4)$ і $\dfrac{\partial}{\partial\xi}\lambda_\mu(\xi) = 2\mu^3 A_{2,0}(p_*) + O(\mu^4)$. Відтак, зауваживши, що вектор $C^{-1}\beta = H_0{}'(p_*)$ задовольняє діофантові умови припущення 7, можна стверджувати, що для кожного $\mu \in (-\mu_*, \mu_*)$ і для кожного $\xi \in \mathbb{R}^m$, яке справджує нерівності

$$\rho + 2r_\mu < |\xi| < R - 2r_\mu, \quad |\mathbf{j} \cdot \lambda_\mu(\xi) + \mathbf{k} \cdot C^{-1}\beta| > |\mu|^3 \gamma(|\mathbf{j}| + |\mathbf{k}|)^{-\tau},$$
$$\left| \mathrm{i}(\mathbf{j} \cdot \lambda_\mu(\xi) + \mathbf{k} \cdot C^{-1}\beta) - \varpi_i \right| > |\mu|^3 \gamma(|\mathbf{j}| + |\mathbf{k}|)^{-\tau} \tag{36}$$
$$\forall (\mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \mathbb{Z}^{m+n}, \quad \mathbf{j} \neq 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

система з гамільтоніаном (35) має інваріантний тор, який задається рівняннями

$$y = F_\mu(\varphi, \lambda_\mu(\xi), \xi), \qquad z = G_\mu(\varphi, \lambda_\mu(\xi), \xi).$$

Щоб переконатися, що інваріантні тори існують для більшості значень параметра ξ з області $\rho < |\xi| < R$, оцінимо міру множини $\mathfrak{C}_\mu$, визначеної нерівностями (36). Спочатку розглянемо підмножину $\mathcal{X}_\mu$ обмеженої області $D \subset \mathbb{R}^m$, задану умовами

$$x \in D, \quad \left| \mathrm{i}(\mathbf{j} \cdot (x_0 + \mu^3 x) + \mathbf{k} \cdot C^{-1}\beta) - \varpi_i \right| \leq |\mu|^3 \gamma(|\mathbf{j}| + |\mathbf{k}|)^{-\tau},$$
$$|\mathbf{j} \cdot (x_0 + \mu^3 x) + \mathbf{k} \cdot C^{-1}\beta| \leq |\mu|^3 \gamma(|\mathbf{j}| + |\mathbf{k}|)^{-\tau} \tag{37}$$
$$\forall (\mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \mathbb{Z}^{m+n}, \quad \mathbf{j} \neq 0, \quad i = 1, \ldots, k,$$

де $x_0 \in \mathbb{R}^m$ — фіксований вектор.

Легко бачити, що для кожної фіксованої пари $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, такої що $\mathbf{j} \neq 0$, міра множини, заданої нерівностями (37), не перевищує міри множини

$$x \in D - \frac{1}{\mu^3} \left(x_0 + \frac{\mathbf{k} \cdot C^{-1}\beta}{\|\mathbf{j}\|} \mathbf{j} \right), \qquad |\mathbf{j} \cdot x| \leq \gamma(|\mathbf{j}| + |\mathbf{k}|)^{-\tau}.$$

Оскільки відстань між гіперплощинами $\mathbf{j} \cdot x = \pm \gamma(|\mathbf{j}| + |\mathbf{k}|)^{-\tau}$ дорівнює $2\gamma \|\mathbf{j}\|^{-1} \big(|\mathbf{j}| + |\mathbf{k}|\big)^{-\tau}$, де $\| \bullet \|$ — евклідова норма, то ця міра не перевищує

$$\gamma C_1(m) (\operatorname{diam} D)^{m-1} \|\mathbf{j}\|^{-1} \big(|\mathbf{j}| + |\mathbf{k}|\big)^{-\tau},$$

де стала $C_1(m)$ залежить лише від m. Але тоді за умови, що $\tau > m + n$, існує стала $C_2(m, n, \tau) > 0$ така, що

$$\operatorname{mes} \mathcal{X}_\mu \leq \gamma C_1(m) (\operatorname{diam} D)^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\tau} \sum_{|\mathbf{j}| + |\mathbf{k}| = k} \|\mathbf{j}\|^{-1} \leq$$
$$\leq \gamma C_2(m, n, \tau) (\operatorname{diam} D)^{m-1}.$$

З цих міркувань можна зробити висновок, що міру множини параметрів (36) можна зробити як завгодно близькою до міри області $\rho < |\xi| < R$ за умови достатньої мализни μ_* та γ.

4. Висновки. В даній роботі доведено теорему про існування квазіперіодичних рухів на інваріантних торах локально гамільтонових систем, близьких до умовно інтегровних. Ця теорема охоплює як вироджені випадки, коли серед частот квазіперіодичних рухів є такі, що прямують до нуля разом з величиною збурення, так і невироджені випадки, і дозволяє уніфікувати аналіз ситуацій, які виникають в теорії збурень інваріантних торів.

Також досліджено задачу про збурення цілком інтегровної гамільтонової системи локально гамільтоновим векторним полем при одночасній деформації симплектичної структури. Така деформація породжує ненульову матрицю μC дужок Пуассона змінних дії. За умови існування квазістаціонарного положення p_*, яке визначається як корінь рівняння $CH_0'(p_*) = \beta$, результати робіт [1, 2] розповсюджено на випадок, коли матриця $CH_0''(p_*)$, окрім суто уявних і, можливо, нульових власних чисел, має ще й ненульові власні числа.

1. *Ловейкін Ю. В., Парасюк І. О.* Теорема про збурення коізотропних інваріантних торів локально гамільтонових систем та її застосування // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 4. – С. 490 – 515.
2. *Ловейкін Ю. В., Парасюк І. О.* Біфуркація коізотропних інваріантних торів при локально гамільтонових збуреннях інтегровних систем та невиродженій деформації симплектичної структури // Там же. – 2006. – **9**, № 2. – С. 221 – 232.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
4. *Мозер Ю.* О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды // Успехи мат. наук. – 1969. – **24**, вып. 2. – С. 165 – 217.
5. *Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B.* Quasi-periodic motions in families of dynamical systems: order admits chaos // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1997. – **1645**. – 195 p.
6. *Парасюк И. О.* О сохранении коизотропных инвариантных торов локально гамильтоновых систем // Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 150 – 154.
7. *Pöschel J.* Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets // Communs Pure and Appl. Math. – 1982. – **35**, № 5. – P. 653 – 695.
8. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
9. *Парасюк І. О.* Біфуркація канторової множини коізотропних інваріантних торів гамільтонових систем при збуренні симплектичної структури // Нелінійні коливання. – 1998. – **1**, № 2. – С. 81 – 89.
10. *Rüssmann H.* Non-degeneracy in the perturbation theory of integrable dynamical systems // London Math. Soc. Lect. Notes Ser. – 1989. – № 134. – P. 15 – 18.
11. *Аносов Д. В.* Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 5. – С. 721 – 742.
12. *Kasuga T.* On the adiabatic theorem for the Hamaltonian system of differential equations in the classical mechanics // Proc. Jap. Acad. – 1961. – **37**, № 7. – P. 366 – 382.
13. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. – М: Эдиториал УРСС, 2002. – 416 с.
14. *Брюно А. Д.* Нормальная форма системы Гамильтона // Успехи мат. наук. – 1988. – **43**, вып. 1. – С. 23 – 56.

Одержано 22.09.2006