УДК 517.962.2

Г. П. Пелюх (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ МНОЖЕСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ АРГУМЕНТОМ

We study the structure of the set of continuous solutions for a certain class of systems of nonlinear difference equations with a continuous argument in neighborhoods of equilibrium states.

Досліджено структуру множини неперервних розв'язків одного класу систем нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом в околах станів рівноваги.

В современной теории разностных уравнений с непрерывным аргументом имеется ряд хорошо разработанных направлений. К ним, в частности, относятся направления, основными целями которых является построение представления общего непрерывного решения в окрестности особой точки $[1-7]$ и исследование поведения непрерывных при $t \geq 0$ решений таких уравнений при $t \to +\infty$ $[8-12]$. В настоящей работе получены новые результаты, касающиеся этих направлений, которые существенно дополняют и развивают полученные ранее результаты.

1. Представление непрерывных решений систем нелинейных разностных уравнений. Рассмотрим систему разностных уравнений вида

$$x(t+1) = \Lambda x(t) + f(t, x(t)), \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, Λ — постоянная вещественная $(n \times n)$-матрица, $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, и исследуем структуру множества ее непрерывных решений в окрестности тривиального решения $x(t) = 0$ $(f(t,0) \equiv 0)$. При различных предположениях относительно матрицы Λ и вектор-функции $f(t,x)$ эта задача изучалась многими математиками $[1-7]$ и в настоящее время достаточно хорошо исследована. Тем не менее здесь имеется ряд вопросов, которые ждут своего решения. В настоящей работе рассматривается один из них — исследуется структура общего непрерывного решения системы уравнений (1).

Для простоты в дальнейшем будем считать, что собственные числа λ_i, $i = 1, \ldots, n$, матрицы Λ являются вещественными и матрица Λ имеет вид $\Lambda = \operatorname{diag}\big(\Lambda_1(\lambda_1), \ldots, \Lambda_k(\lambda_k)\big)$, $1 \leq k \leq n$, где Λ_i, $i = 1, \ldots, k$, — квадратные $(n_i \times n_i)$-матрицы,

$$\Lambda_i = \begin{vmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{vmatrix},$$

причем $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ и ε — сколь угодно малое положительное число (в противном случае систему уравнений (1) можно привести к указанному виду с помощью линейной неособой вещественной замены переменных).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*:

1) *вектор-функция* $f(t,x)$ *непрерывна в области* $D\colon t \geq 0,\ |x| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq b$ *и* $f(t,0) \equiv 0$;

2) *для произвольных точек* $(t,\overline{x}),\ (t,\widehat{x}) \in D$ *выполняется неравенство*

$$\bigl|f(t,\overline{x}) - f(t,\widehat{x})\bigr| \leq L\bigl(|\overline{x}| + |\widehat{x}|\bigr)^{\alpha}|\overline{x} - \widehat{x}|,$$

где $L, \alpha = \mathrm{const} > 0$;

3) $0 < |\lambda_i| < 1,\ i = 1,\ldots,k,\ |\Lambda^{-1}||\Lambda|^{1+\alpha} = \delta < 1$.

Тогда в некоторой области $D_* \subset D$ *существует замена переменных*

$$x(t) = \kappa(t,y(t)) = y(t) + \gamma(t,y(t)), \tag{2}$$

где вектор-функция $\gamma(t,y)$ *является непрерывной, удовлетворяет условию*

$$\bigl|\gamma(t,\overline{y}) - \gamma(t,\widehat{y})\bigr| \leq \frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}\bigl(|\overline{y}| + |\widehat{y}|\bigr)^{\alpha}|\overline{y} - \widehat{y}|, \quad (t,\overline{y}),\ (t,\widehat{y}) \in D_*, \tag{3}$$

$\widetilde{L} = L\Delta,\ \delta < \Delta < 1$, *и* $\gamma(t,0) \equiv 0$, *приводящая систему уравнений* (1) *к виду*

$$y(t+1) = \Lambda y(t). \tag{4}$$

Для доказательства теоремы достаточно, очевидно, доказать, что в некоторой области $D_* \subset D$ система уравнений

$$\kappa(t+1,\Lambda y) = \Lambda\kappa(t,y) + f\bigl(t,\kappa(t,y)\bigr) \tag{5}$$

имеет решение $\kappa(t,y) = y + \gamma(t,y)$, удовлетворяющее указанным в теореме условиям.

Решение системы уравнений (5) построим с помощью метода последовательных приближений. При этом последовательные приближения $\kappa_m(t,y),\ m = 0,1,\ldots,$ определим соотношениями

$$\begin{gathered}\kappa_0(t,y) = y,\\ \kappa_m(t,y) = \Lambda^{-1}\kappa_{m-1}(t+1,\Lambda y) - \Lambda^{-1}f(t,\kappa_{m-1}(t,y)), \quad m = 1,2,\ldots.\end{gathered} \tag{6}$$

Сначала покажем, что при всех $t \geq 0$ и достаточно малых $|y|$ выполняются неравенства

$$\bigl|\kappa_m(t,y)\bigr| \leq |y| + \frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}|y|^{1+\alpha}, \quad m = 0,1,\ldots. \tag{7}$$

Существует положительное число b_* $(b_* < b)$ такое, что при $|x| \leq b_*,\ |y| \leq b_*$ имеем

$$\begin{gathered}\left(1 + \frac{2\widetilde{L}}{1-\Delta}(|x| + |y|)^{\alpha}\right)^{1+\alpha} \leq \frac{1-\delta}{1-\Delta},\\ |y| + \frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}|y|^{1+\alpha} \leq b,\end{gathered} \tag{8}$$

$$2^\alpha \widetilde{L}\left(|y|+\frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}|y|^{1+\alpha}\right)^\alpha \le \Delta-\delta.$$

Поскольку $\big|\kappa_m(t,y)\big| \le |y| + \big|\kappa_m(t,y)-y\big|$, для доказательства (7) достаточно доказать справедливость соотношений

$$\big|\kappa_m(t,y)-y\big| \le \frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}|y|^{1+\alpha}, \quad m=0,1,\ldots. \tag{9}$$

Соотношение (9) выполняется, очевидно, при $m=0$. Пусть оно доказано для некоторого $m\ge 0$. Так как в силу (6)

$$\kappa_{m+1}(t,y)-y=\Lambda^{-1}\kappa_m(t+1,\Lambda y)-\Lambda^{-1}f(t,\kappa_m(t,y))-\Lambda^{-1}\Lambda y,$$

отсюда с учетом условий 1 – 3 и неравенств (7), (8) имеем

$$\big|\kappa_{m+1}(t,y)-y\big| \le |\Lambda^{-1}|\big|\kappa_m(t+1,\Lambda y)-\Lambda y\big| + |\Lambda^{-1}|L\big|\kappa_m(t,y)\big|^{1+\alpha} \le$$

$$\le |\Lambda^{-1}|\frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}|\Lambda y|^{1+\alpha} + |\Lambda^{-1}|L\left(|y|+\frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}|y|^{1+\alpha}\right)^{1+\alpha} \le$$

$$\le \frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}\left(\delta+(1-\Delta)\left(1+\frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}|y|^\alpha\right)^{1+\alpha}\right)|y|^{1+\alpha} \le \frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}|y|^{1+\alpha}.$$

Следовательно, соотношения (9) выполняются при $t\ge 0$, $|y|\le b_*$ и всех $m\ge 0$.

Теперь покажем, что при $t\ge 0$, $|y|\le b_*$ и всех $m\ge 1$ имеет место оценка

$$\big|\kappa_m(t,y)-\kappa_{m-1}(t,y)\big| \le \widetilde{L}\Delta^{m-1}|y|^{1+\alpha}. \tag{10}$$

Действительно, в силу условий 1 – 3 и соотношений (6) – (8) имеем

$$\big|\kappa_1(t,y)-\kappa_0(t,y)\big| = \big|\Lambda^{-1}\Lambda y-\Lambda^{-1}f(t,y)-y\big| \le \widetilde{L}|y|^{1+\alpha},$$

т. е. оценка (10) имеет место при $m=1$. Предположим, что она доказана для некоторого $m\ge 1$. Тогда, принимая во внимание условия теоремы и (6) – (8), получаем

$$\big|\kappa_{m+1}(t,y)-\kappa_m(t,y)\big| =$$

$$= \Big|\Lambda^{-1}\kappa_m(t+1,\Lambda y)-\Lambda^{-1}f\big(t,\kappa_m(t,y)\big)-$$

$$-\Lambda^{-1}\kappa_{m-1}(t+1,\Lambda y)+\Lambda^{-1}f\big(t,\kappa_{m-1}(t,y)\big)\big| \le$$

$$\le |\Lambda^{-1}|\big|\kappa_m(t+1,\Lambda y)-\kappa_{m-1}(t+1,\Lambda y)\big|+$$

$$+|\Lambda^{-1}|\big|f(t,\kappa_m(t,y))-f(t,\kappa_{m-1}(t,y))\big| \le$$

$$\le |\Lambda^{-1}|\widetilde{L}\Delta^{m-1}|\Lambda|^{1+\alpha}|y|^{1+\alpha}+$$

$$+|\Lambda^{-1}|L2^\alpha\left(|y|+\frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}|y|^{1+\alpha}\right)^\alpha \widetilde{L}\Delta^{m-1}|y|^{1+\alpha} \le$$

$$\leq \widetilde{L}\Delta^{m-1}\left[\delta+\widetilde{L}2^{\alpha}\left(|y|+\frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}|y|^{1+\alpha}\right)^{\alpha}\right]|y|^{1+\alpha}\leq \widetilde{L}\Delta^{m}|y|^{1+\alpha}.$$

Таким образом, оценка (10) имеет место при $t\geq 0$, $|y|\leq b_*$ и всех $m\geq 1$.

Из (10) непосредственно вытекает, что при $t\geq 0$, $|y|\leq b_*$ ряд $\kappa_0(t,y)+$ $+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\kappa_i(t,y)-\kappa_{i-1}(t,y)\right]$ и, следовательно, последовательность функций (6) равномерно сходятся к некоторой непрерывной функции $\kappa(t,y)$. Переходя в (6) к пределу при $m\to\infty$, можно показать, что $\kappa(t,y)$ является решением системы уравнений (5).

Обозначим

$$\gamma_m(t,y)=\kappa_m(t,y)-y,\quad m=0,1,\ldots. \tag{11}$$

Тогда, очевидно, $\lim\limits_{m\to\infty}\gamma_m(t,y)=\kappa(t,y)-y=\gamma(t,y)$ и $\gamma(t,0)\equiv 0$ (следует из (7), (11)). Покажем, что вектор-функция $\gamma(t,y)$ удовлетворяет условию (3).

Действительно, пусть $(t,\overline{x})$, $(t,\widehat{x})$ — произвольные точки из D_*: $t\geq 0$, $|y|\leq$ $\leq b_*$. Тогда, использовав соотношения (6) – (8), (11), докажем, что при всех $m\geq 0$ выполняются неравенства

$$\left|\gamma_m(t,\overline{y})-\gamma_m(t,\widehat{y})\right|\leq\frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}\big(|\overline{y}|+|\widehat{y}|\big)^{\alpha}|\overline{y}-\widehat{y}|. \tag{12}$$

При $m=0$ неравенство (12), очевидно, имеет место. Тогда, предположив его справедливость для некоторого $m\geq 0$, докажем, что оно сохранится при переходе от m к $m+1$. Действительно, в силу условий теоремы, (6) – (8), (11), (12) получаем

$$\left|\gamma_{m+1}(t,\overline{y})-\gamma_{m+1}(t,\widehat{y})\right|=$$

$$=\Big|\Lambda^{-1}\gamma_m(t+1,\Lambda\overline{y})-\Lambda^{-1}f\big(t,\overline{y}+\gamma_m(t,\overline{y})\big)-$$

$$-\Lambda^{-1}\gamma_m(t+1,\Lambda\widehat{y})+\Lambda^{-1}f\big(t,\widehat{y}+\gamma_m(t,\widehat{y})\big)\Big|\leq$$

$$\leq|\Lambda^{-1}|\frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}|\Lambda|^{1+\alpha}\big(|\overline{y}|+|\widehat{y}|\big)^{\alpha}|\overline{y}-\widehat{y}|+$$

$$+|\Lambda^{-1}|L\big(|\overline{y}|+|\gamma_m(t,\overline{y})|+|\widehat{y}|+|\gamma_m(t,\widehat{y})|\big)^{\alpha}\times$$

$$\times\big(|\overline{y}-\widehat{y}|+|\gamma_m(t,\overline{y})|-|\gamma_m(t,\widehat{y})|\big)\leq$$

$$\leq\frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}\delta\big(|\overline{y}|+|\widehat{y}|\big)^{\alpha}|\overline{y}-\widehat{y}|+\widetilde{L}\left(|\overline{y}|+|\widehat{y}|+2\frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}\big(|\overline{y}|+|\widehat{y}|\big)^{1+\alpha}\right)^{\alpha}\times$$

$$\times\left(|\overline{y}-\widehat{y}|+\frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}\big(|\overline{y}|+|\widehat{y}|\big)^{\alpha}|\overline{y}-\widehat{y}|\right)\leq$$

$$\leq\frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}\left[\delta+(1-\Delta)\left(1+2\frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}\big(|\overline{y}|+|\widehat{y}|\big)^{\alpha}\right)^{\alpha}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}\big(|\overline{y}|+|\widehat{y}|\big)^{\alpha}\right)\right]\big(|\overline{y}|+|\widehat{y}|\big)^{\alpha}|\overline{y}-\widehat{y}|\leq$$

$$\leq \frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}\left[\delta + (1-\Delta)\frac{1-\delta}{1-\Delta}\right]\big(|\overline{y}| + |\widehat{y}|\big)^{\alpha}|\overline{y} - \widehat{y}| \leq$$

$$\leq \frac{\widetilde{L}}{1-\Delta}\big(|\overline{y}| + |\widehat{y}|\big)^{\alpha}|\overline{y} - \widehat{y}|.$$

Тем самым доказано, что неравенство (12) имеет место при $t \geq 0$, $|\overline{y}| \leq b_*$, $|\widehat{y}| \leq b_*$ и всех $m \geq 0$. Переходя в (12) к пределу при $m \to \infty$, получаем условие (3).

Теорема 1 доказана.

Таким образом, с помощью взаимно однозначной (следует из (3), (8)) замены переменных (2) исследование системы уравнений (1) в области D_* сводится к исследованию линейной системы уравнений (4). В свою очередь, построение решений системы уравнений (4) сводится к построению решений подсистем уравнений вида

$$y_i(t+1) = \Lambda_i y_i(t), \tag{13}$$

где $y_i = \mathrm{col}\big(y_1^i, \ldots, y_{n_i}^i\big)$, $i = 1, \ldots, k$. Общее непрерывное решение системы уравнений (13) можно легко построить. Например, в случае, когда $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, оно имеет вид

$$y_1^i(t) = \lambda_i^t \omega_{n_i}(t) + c_{i,n_i-1}^1 t \lambda_i^t \omega_{n_i-1}^i(t) + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{n_i-1} c_{i,1}^j t^j\right)\lambda_i^t \omega_1^i(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{n_i}^i(t) = \lambda_i^t \omega_1^i(t), \quad i = 1, \ldots, k,$$

где $c_{i_1 i_2}^j$ — некоторые постоянные и $\omega_j^i(t)$, $j = 1, \ldots, n_i$, $i = 1, \ldots, k$, — произвольные непрерывные 1-периодические функции.

Принимая во внимание представление общего непрерывного решения системы (4) и замену переменных (2), можно получить представление общего непрерывного решения системы уравнений (1) при достаточно больших $t > 0$. Из этого представления непосредственно вытекает ряд интересных результатов, имеющих важное значение для теории разностных уравнений.

При исследовании системы уравнений (1) в случае, когда собственные числа λ_i, $i = 1, \ldots, n$, матрицы Λ удовлетворяют условию $0 < |\lambda_i| < 1 < |\lambda_{p+j}|$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$, $p + q = n$, запишем ее в виде

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \overline{\Lambda}x(t) + f\big(t, x(t), y(t)\big), \\ y(t+1) &= \widehat{\Lambda}y(t) + \varphi\big(t, x(t), y(t)\big), \end{aligned} \tag{14}$$

где $= \mathrm{col}\big(x_1, \ldots, x_p\big)$, $y = \mathrm{col}\big(y_1, \ldots, y_q\big)$, $f = \mathrm{col}\big(f_1, \ldots, f_p\big)$, $\varphi = \mathrm{col}\big(\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_q\big)$, $\overline{\Lambda} = \mathrm{diag}\big(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r\big)$, $1 \leq r \leq p$, $\widehat{\Lambda} = \mathrm{diag}\big(\widehat{\Lambda}_1, \ldots, \widehat{\Lambda}_s\big)$, $1 \leq s \leq q$, и $\overline{\Lambda}_i$, $i = 1, \ldots, r$, $\widehat{\Lambda}_j$, $j = 1, \ldots, s$, — квадратные соответственно $(p_i \times p_i)$- и $(q_j \times q_j)$-матрицы,

$$\overline{\Lambda}_i = \left|\begin{array}{ccccc} \overline{\lambda}_i & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_i & \varepsilon & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \overline{\lambda}_i \end{array}\right|,$$

$$\widehat{\Lambda}_j = \begin{vmatrix} \widehat{\lambda}_j & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \widehat{\lambda}_j & \varepsilon & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \widehat{\lambda}_j \end{vmatrix},$$

причем $\sum_{i=1}^{r} p_i = p$, $\sum_{j=1}^{s} q_j = q$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*:

1) $0 < |\overline{\lambda}_i| < 1 < |\widehat{\lambda}_j|$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s$;

2) *вектор-функции* $f(t, x, y)$, $\varphi(t, x, y)$ *являются непрерывными в области* D: $t \geq 0$, $|x| = \max\limits_{1 \leq i \leq p} |x_i| \leq b$, $|y| = \max\limits_{1 \leq j \leq q} |y_j| \leq b$, *удовлетворяют условию Липшица*

$$\big|f(t, \overline{x}, \overline{y}) - f(t, \widehat{x}, \widehat{y})\big| \leq l_1\big(|\overline{x} - \widehat{x}| + |\overline{y} - \widehat{y}|\big),$$

$$\big|\varphi(t, \overline{x}, \overline{y}) - \varphi(t, \widehat{x}, \widehat{y})\big| \leq l_2\big(|\overline{x} - \widehat{x}| + |\overline{y} - \widehat{y}|\big), \qquad (t, \overline{x}, \overline{y}), \quad (t, \widehat{x}, \widehat{y}) \in D,$$

где l_1, l_2 *— достаточно малые положительные постоянные и* $f(t, 0, 0) \equiv 0$, $\varphi(t, 0, 0) \equiv 0$.

Тогда в некоторой области $D_* \subset D$ *существует замена переменных*

$$x(t) = u(t), \quad y(t) = v(t) + \gamma(t, u(t)), \tag{15}$$

где вектор-функция $\gamma(t, u)$ *является непрерывной, удовлетворяет условию* $\big|\gamma(t, \overline{u}) - \gamma(t, \widehat{u})\big| \leq l|\overline{u} - \widehat{u}|$ (l *— достаточно малая положительная постоянная*) *и* $\gamma(t, 0) \equiv 0$, *приводящая систему уравнений* (14) *к виду*

$$\begin{aligned} u(t+1) &= \overline{\Lambda} u(t) + \widetilde{f}\big(t, u(t), v(t)\big), \\ v(t+1) &= \widehat{\Lambda} v(t) + \widetilde{\varphi}\big(t, u(t), v(t)\big), \end{aligned} \tag{16}$$

где вектор-функции $\widetilde{f}(t, u, v)$, $\widetilde{\varphi}(t, u, v)$ *непрерывны в области* D_*, *удовлетворяют условию Липшица по* u, v *и* $\widetilde{\varphi}(t, u, 0) \equiv 0$.

Для доказательства теоремы достаточно в качестве вектор-функции $\gamma(t, u)$ использовать решение системы уравнений

$$\gamma\big(t+1, \overline{\Lambda} u + f(t, u, \gamma(t, u))\big) = \widehat{\Lambda}\gamma(t, u) + \varphi\big(t, u, \gamma(t, u)\big), \tag{17}$$

удовлетворяющее указанным в теореме условиям.

Решение системы уравнений (17) можно построить с помощью метода последовательных приближений. При этом последовательные приближения $\gamma_m(t, u)$, $m = 0, 1, \ldots$, определяются следующими соотношениями:

$$\gamma_0(t, u) = 0,$$

$$\gamma_m(t, u) = \widehat{\Lambda}^{-1}\gamma_{m-1}(t+1, \overline{\Lambda} u) + f(t, u, \gamma_{m-1}(t, u)) -$$

$$- \widehat{\Lambda}^{-1}\varphi(t, u, \gamma_{m-1}(t, u)), \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Поскольку для системы уравнений

$$u(t+1) = \overline{\Lambda} u(t) + \widetilde{f}(t, u(t), 0)$$

можно доказать теорему, аналогичную теореме 1, и, следовательно, построить ее общее непрерывное решение в некоторой области $D_* \subset D$, используя замену переменных (15), можно построить множество непрерывных решений системы уравнений (14), зависящее от произвольных непрерывных периодических функций.

2. Исследование свойств непрерывных решений систем нелинейных разностных уравнений при $t \to +\infty$. Рассмотрим теперь систему нелинейных разностных уравнений вида

$$x(t+1) = x(t) + \sum_{i=0}^{\infty} f_i(t, x(t+i)), \tag{18}$$

где $t \in \mathbb{R}^+$, $f_i \colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, и исследуем поведение ее непрерывных и ограниченных решений при $t \to +\infty$. Поскольку свойства непрерывных и ограниченных при $t \in \mathbb{R}^+$ решений системы (18) достаточно хорошо характеризуются наличием у нее непрерывного при $t \in \mathbb{R}^+$, 1-периодического асимптотического равновесия, то основной нашей целью является установление достаточных условий существования такого равновесия.

Определение 1. *Будем говорить, что система уравнений* (18) *имеет непрерывное при $t \in \mathbb{R}^+$,* 1*-периодическое асимптотическое равновесие, если*:

а) *произвольное непрерывное и ограниченное при $t \in \mathbb{R}^+$ решение $x(t)$ удовлетворяет при $t \to +\infty$ соотношению*

$$x(t) = \omega(t) + o(1), \tag{19}$$

где $\omega(t)$ — непрерывная при $t \in \mathbb{R}^+$, 1*-периодическая вектор-функция*;

б) *для произвольной непрерывной при $t \in \mathbb{R}^+$,* 1*-периодической вектор-функции $\omega(t)$ существует непрерывное и ограниченное при $t \in \mathbb{R}^+$ решение $x(t)$ системы уравнений* (18)*, удовлетворяющее при $t \to +\infty$ соотношению* (19).

Условия, гарантирующие справедливость утверждения а), устанавливаются в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*:

1) *вектор-функции $f_i(t, x)$, $i = 0, 1, \ldots$, являются непрерывными при $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f_i(t, 0) \equiv 0$, $i = 0, 1, \ldots$, и удовлетворяют соотношениям*

$$\left| f_i(t, x) - f_i(t, y) \right| \leq \eta_i(t) |x - y|, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

где $\eta_i(t)$ — некоторые неотрицательные непрерывные и ограниченные при $t \in \mathbb{R}^+$ функции, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$;

2) *ряды*

$$H(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i(t), \qquad \widetilde{H}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{\eta}_i(t),$$

где

$$\widetilde{\eta}_i(t) = \sum_{j=0}^{i} \eta_{i-j}(t+j)^*,$$

равномерно сходятся при всех $t \in \mathbb{R}^+$ *и* $\widetilde{H}(t) \le \theta < 1$ *при всех* $t \in \mathbb{R}^+$.

Тогда для произвольного непрерывного и ограниченного при $t \in \mathbb{R}^+$ *решения* $x(t)$ *системы уравнений* (18) *существует непрерывная при* $t \in \mathbb{R}^+$, 1*-периодическая вектор-функция* $\omega(t)$ *такая, что при* $t \to +\infty$ *выполняется соотношение* (19).

Доказательство. Предположим, что $x(t)$ — непрерывное и ограниченное при $t \in \mathbb{R}^+$ решение системы уравнений (18). Тогда в силу условий 1, 2 теоремы имеем

$$x(t) = \omega(t) - \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{f}_i(t, x(t+i)), \tag{20}$$

где

$$\widetilde{f}_i(t, x(t+i)) = \sum_{j=0}^{i} f_{i-j}(t+j, x(t+i)),$$

$$\omega(t) = x(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{f}_i(t, x(t+i)).$$

Отсюда вследствие условий 1, 2 непосредственно следует, что таким образом определенная вектор-функция $\omega(t)$ является непрерывной и ограниченной при $t \in \mathbb{R}^+$. Кроме этого, поскольку в силу условий 1, 2 имеем $\widetilde{H}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, из (20) следует, что при $t \to +\infty$ имеет место соотношение (19).

Покажем, что вектор-функция $\omega(t) = x(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{f}_i(t, x(t+i))$ является 1-периодической. Действительно, поскольку

$$x(t+1) \equiv x(t) + \sum_{i=0}^{\infty} f_i\big(t, x(t+i)\big)$$

и

$$\widetilde{f}_i\big(t, x(t+i)\big) = \widetilde{f}_{i-1}\big(t+1, x(t+i)\big) + f_i\big(t, x(t+i)\big),$$

то

$$\omega(t+1) = x(t+1) + \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{f}_i\big(t+1, x(t+1+i)\big) =$$

$$= x(t) + \sum_{i=0}^{\infty} f_i\big(t, x(t+i)\big) + \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{f}_i\big(t+1, x(t+1+i)\big) =$$

$$= x(t) + \sum_{i=0}^{\infty} f_i\big(t, x(t+i)\big) + \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{f}_{i-1}\big(t+1, x(t+i)\big) =$$

$$= x(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{f}_i\big(t, x(t+i)\big) = \omega(t).$$

*Поскольку $\tilde{H}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, соотношение $\tilde{H}(t) \le \theta < 1$ всегда имеет место при $t \ge T$, где T достаточно велико.

Теорема 3 доказана.

Теперь докажем, что для произвольной непрерывной при $t \in \mathbb{R}^+$, 1-периодической вектор-функции $\omega(t)$ существует непрерывное и ограниченное при $t \in \mathbb{R}^+$ решение системы уравнений (18), удовлетворяющее условию (19). Поскольку произвольное непрерывное и ограниченное при $t \in \mathbb{R}^+$ решение системы уравнений (20) удовлетворяет системе уравнений (18) (в этом можно убедиться непосредственной подстановкой (20) в (18)), для этого достаточно показать, что такое решение имеет система уравнений (20).

Теорема 4. *Если выполняются условия теоремы* 1, *то система уравнений* (20) *имеет непрерывное и ограниченное при* $t \in \mathbb{R}^+$ *решение* $x(t)$, *удовлетворяющее при* $t \to +\infty$ *условию* (19).

Доказательство. С помощью соотношений

$$
\begin{gathered}
x_0(t) = \omega(t), \\
x_m(t) = \omega(t) - \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{f}_i\left(t, x_{m-1}(t+i)\right), \quad m = 1, 2, \ldots,
\end{gathered}
\tag{21}
$$

определим последовательность вектор-функций $x_m(t)$, $m = 0, 1 \ldots$, и докажем, что она равномерно сходится при $t \in \mathbb{R}^+$ к непрерывному и ограниченному при $t \in \mathbb{R}^+$ решению системы уравнений (20).

Принимая во внимание условия 1, 2, можно по индукции показать, что вектор-функции $_m(t)$, $m = 0, 1 \ldots$, являются непрерывными при $t \in \mathbb{R}^+$ и при всех $m \geq 0$, $t \in \mathbb{R}^+$ выполняется соотношение

$$
|x_m(t)| \leq \frac{M}{1-\theta}, \tag{22}
$$

где $M = \max\limits_t |\omega(t)|$. Более того, покажем, что при всех $m \geq 1$, $t \in \mathbb{R}^+$ имеет место оценка

$$
\left|x_m(t) - x_{m-1}(t)\right| \leq M\theta^m. \tag{23}
$$

Действительно, в силу (21) и условия 2 при $m = 1$ имеем

$$
\left|x_1(t) - x_0(t)\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left|\widetilde{f}_i\left(t, \omega(t+i)\right)\right| \leq M \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{\eta}_i(t) \leq M\theta
$$

и, следовательно, оценка (23) имеет место при $m = 1$. Рассуждая по индукции, предположим, что она доказана для некоторого $m \geq 1$. Тогда в силу (21), условия 2 и (23) получаем

$$
\left|x_{m+1}(t) - x_m(t)\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left|\widetilde{f}_i\left(t, x_m(t+i)\right) - \widetilde{f}_i\left(t, x_{m-1}(t+i)\right)\right| \leq
$$

$$
\leq \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{\eta}_i(t) \left|x_m(t+i) - x_{m-1}(t+i)\right| \leq M\theta^m \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{\eta}_i(t) \leq M\theta^{m+1}.
$$

Таким образом, оценка (23) имеет место при всех $t \in \mathbb{R}^+$ и $m \geq 1$.

Непосредственно из (22), (23) следует, что последовательность вектор-функций $x_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, равномерно сходится к некоторой непрерывной при $t \in \mathbb{R}^+$ вектор-функции $x(t)$, удовлетворяющей условию

$$|x(t)| \le \frac{M}{1-\theta}.$$

Если теперь перейти в (21) к пределу при $m \to +\infty$, то можно убедиться, что вектор-функция $x(t) = \lim\limits_{m\to+\infty} x_m(t)$ удовлетворяет системе уравнений (20). Тем самым теорема 4 доказана.

Непосредственным следствием теорем 3, 4 является следующая теорема.

Теорема 5. *Если для системы уравнений* (18) *выполняются условия теоремы* 3, *то она имеет непрерывное при* $t \in \mathbb{R}^+$, 1-*периодическое асимптотическое равновесие.*

1. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – **12**. – P. 243 – 284.
2. *Birkhoff G. D.* Formal theory of irregular linear difference equations // Acta math. – 1930. – **54**. – P. 205 – 246.
3. *Tokano B. K.* Solutions containing arbitrary periodic functions of systems of nonlinear difference equations // Funkc. ekvacioj. – 1973. – **16**, № 2. – P. 137 – 164.
4. *Пелюх Г. П.* О структуре непрерывных решений одного класса нелинейных разностных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 6. – С. 1083 – 1085.
5. *Пелюх Г. П.* Представление решений разностных уравнений с непрерывным аргументом // Там же. – 1996. – **32**, № 2. – С. 304 – 312.
6. *Пелюх Г. П.* Общее решение систем нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 7. – С. 936 – 953.
7. *Быков Я. В., Линенко В. Г.* О некоторых вопросах качественной теории систем разностных уравнений. – Фрунзе: Илим, 1968. – 127 с.
8. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И., Самойленко А. М.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 216 с.
9. *Stević S.* Asymptotic behaviour of solutions of systems of a nonlinear difference equations with a continuous argument // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 8. – С. 1095 – 1100.
10. *Пелюх Г. П.* Об асимптотических свойствах непрерывных решений систем нелинейных функционально-разностных уравнений // Докл. РАН. – 2002. – № 1. – С. 14 – 16.
11. *Пелюх Г. П.* Асимптотическое поведение решений нелинейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 138 – 141.
12. *Пелюх Г. П.* О структуре множества непрерывных решений систем нелинейных функционально-разностных уравнений // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 1. – С. 115 – 120.

Получено 20.09.2006