УДК 917.9

В. Г. Самойленко, Ю. І. Самойленко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

An algorithm of the construction of asymptotic solutions of the Cauchy problem for singularly perturbed Korteweg – de Vries equation with varying coefficients is proposed. The theorem on estimation of its precision is proved.

Предложен алгоритм построения асимптотического решения задачи Коши для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега – де Фриза с переменными коэффициентами и доказана теорема об оценке его точности.

1. Вступ. Одним із фундаментальних рівнянь сучасної фізики є рівняння Кортевега – де Фріза [1], яке в 1895 році було запропоноване Кортевегом і де Фрізом для опису явища „відокремленої хвилі", відкритого Расселом [2]. Як виявилося згодом, рівняння Кортевега – де Фріза не лише описує довгі хвилі поверхні рідини, а й моделює низку інших фізичних явищ та процесів [3]. Зокрема, це рівняння стало математичним підґрунтям для розвитку нового напрямку в математиці – математичної теорії солітонів, різні аспекти якої вивчались у працях таких відомих математиків, як Крускал [3, 4], Лакс [5, 6], В. Є. Захаров, С. П. Новіков, Л. Д. Фаддєєв [7 – 11], В. О. Марченко [12, 13], Ю. О. Митропольський [14] та ін. Зокрема, для рівняння Кортевега – де Фріза, що записується у вигляді

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

за допомогою методу оберненої задачі теорії розсіяння було знайдено різні класи точних розв'язків цього рівняння.

Для рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$u_t + u_{xxx} = (g(t, x, u))_x + f(t, x, u) + F(t, x)$$

з початковою умовою

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

знайдено умови існування розв'язку у просторі швидкоспадних функцій [15]. У праці [16] розглянуто регуляризоване рівняння для довгої хвилі вигляду

$$u_t + uu_x - u_{xxt} = 0.$$

Проте, незважаючи на те, що рівняння Кортевега – де Фріза спонукало розвиток оберненої задачі теорії розсіяння, яка дозволяє отримати точні розв'язки для багатьох диференціальних рівнянь з частинними похідними, серед яких рівняння Кортевега – де Фріза, нелінійне рівняння Шредінгера, рівняння sin-Гордона, рівняння Кадомцева – Петвіашвілі та інші [10, 11, 14], що мають важливе значення в сучасній фізиці, цей підхід не дозволяє записати в явному вигляді розв'язки при наявності у таких рівнянь змінних коефіцієнтів. Через це для рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами, що є узагальненням так званих інтегровних [7, 14] рівнянь, доводиться застосовувати різні аналітичні методи, серед яких найбільш ефективними є класичні асимптотичні методи [17], які дозволяють побудувати їх наближені розв'язки за допомогою достатньо простих обчислювальних алгоритмів. Зокрема, для рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами та малим параметром у [18 – 20] знайдено його наближені розв'язки за допомогою асимптотичного методу.

2. Постановка задачі. Основні припущення і позначення. В даній статті розглядається питання про побудову асимптотичних розв'язків задачі Коші рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0,\varepsilon) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{2}$$

де

$$a(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \qquad b(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

функції $a_k(x)$, $b_k(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $k = 0, 1, \ldots$; функція $f(\eta)$, $\eta \in \mathbf{R}$, належить простору Шварца; $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Сформулюємо основні припущення та наведемо означення, необхідні для подальшого викладу.

Нехай незбурене для (1) рівняння $(\varepsilon = 0)$

$$a_0(x)u_t + b_0(x)uu_x = 0 \tag{3}$$

має нескінченно диференційовний в $\mathbf{R}\times[0;T]\setminus\Gamma$, де $\Gamma = \{(t,x): x = \varphi(t), t\in[0;T]\}$ — деяка крива, розв'язок, який є розривним лише на кривій Γ; припускаємо, що ця крива є гладкою. Такі розв'язки для рівняння вигляду (3), як відомо, існують [18].

Позначимо через $G_1 = G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x, t, \tau) \in \mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, таких, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, m, q, p рівномірно щодо змінних x, t на кожній компактній множині $K \subset \mathbf{R}\times[0;T]$ виконуються такі дві умови [18]:

1) справджується співвідношення

$$(x,\ t,\ \tau) \qquad \lim_{\tau\to+\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t,\tau) = 0, \quad (x,t)\in K; \tag{4}$$

2) існує така нескінченно диференційовна функція $f^-(x,t)$, що

$$\lim_{\tau\to-\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p}\Big(f(x,t,\tau) - f^-(x,t)\Big) = 0, \quad (x,t)\in K. \tag{5}$$

Позначимо через $G_1^0 = G_1^0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ лінійний підпростір простору $G_1 = G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau)$, $(x, t, \tau)\in \mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, таких, що для довільних невід'ємних цілих чисел n, m, q, p рівномірно щодо змінних x, t на кожному компакті $K \subset \mathbf{R}\times[0;T]$ додатково до умов (4), (5) виконується умова

$$\lim_{\tau\to-\infty} \tau^n \frac{\partial^m}{\partial\tau^m}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t,\tau) = 0. \tag{6}$$

Зауважимо, що простір G_1^0 — це простір нескінченно диференційовних функцій, залежних від змінних $(x, t, \tau)\in \mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, які щодо змінної τ належать простору Шварца.

Позначимо через $G_2^+ = G_2^+(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}\times[0;\Theta])$, де Θ — деяке дійсне додатне число, лінійний простір нескінченно диференційовних функцій $f = f(x,t,\tau_1,\tau_2)$, $(\tau_1, \tau_2)\in \mathbf{R}\times[0;\Theta]$, $(x, t)\in \mathbf{R}\times[0;T]$, таких, що для довільних невід'ємних цілих чисел p, q, r, q_1, q_2 рівномірно щодо змінних x, t на кожній компактній множині $K \subset \mathbf{R}\times[0;T]$ виконується співвідношення

$$\lim_{\tau\to\pm\infty} \tau_1^r \frac{\partial^{q_1}}{\partial\tau_1^{q_1}} \frac{\partial^{q_2}}{\partial\tau_2^{q_2}} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x, t, \tau_1, \tau_2) = 0, \quad (x, t) \in K, \quad \tau_2 \in [0; \Theta]. \tag{7}$$

Означення 1 [18]. *Функція* $u = u(x, t, \varepsilon)$ *називається однофазовою солітоноподібною, якщо для довільного цілого числа* $N \geq 0$ *функцію* $u(x, t, \varepsilon)$ *можна зобразити за допомогою розкладу за малим параметром* ε:

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)] + O(\varepsilon^{N+1}),$$

де $\tau = (x - \varphi(t))\varepsilon^{-1}$; $\varphi(t) \in C^\infty(\mathbf{R}_x^1 \times [0; T])$ — *деяка скалярна дійсна функція*; *функції* $u_j(x, t)$, $j = \overline{0, N}$, — *нескінченно диференційовні* (*в точках* $t = 0$, $t = T$ *розглядаються відповідно ліва та права похідні*); $V_0(x, t, \tau) \in G_1^0$; $V_j(x, t, \tau) \in G_1$, $j = \overline{1, N}$.

Функція $S(x, t) = x - \varphi(t)$ називається фазою однофазової солітоноподібної функції $u(x, t, \varepsilon)$. Функція $\varphi(t)$ визначає лінію розриву функції $u(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$.

3. Зображення асимптотичного розв'язку задачі Коші (1), (2). Розв'язок задачі Коші (1), (2) шукаємо у вигляді асимптотичного ряду

$$u(x, t, \varepsilon) = Y_N(x, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{8}$$

де

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau_1) + W_j(\tau_1, \tau_2)], \tag{9}$$

$$\tau_1 = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, \qquad \tau_2 = \frac{t}{\varepsilon}.$$

Функція

$$U_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x, t)$$

називається регулярною частиною асимптотики (8), а функція

$$V_N(x, t, \varepsilon) + W_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j [V_j(x, t, \tau_1) + W_j(\tau_1, \tau_2)] \tag{10}$$

— сингулярною частиною асимптотики (8). При цьому функцію $V_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j V_j(x, t, \tau_1)$ визначено в деякому околі кривої Γ, а функцію $W_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j W_j(\tau_1, \tau_2)$ — в деякому околі зв'язної множини

$$\{(t, x) : t = 0, \; x \in \mathbf{R}\} \cup \{(t, x) : x = \varphi(t), \; t \in [0; T]\}$$

і, крім того,

$$Y_N(x, t, \varepsilon) = U_N(x, t, \varepsilon) + V_N(x, t, \varepsilon) + W_N(x, t, \varepsilon).$$

Означення 2. *Якщо для розв'язку* $u(x, t, \varepsilon)$ *задачі Коші* (1), (2) *при будь-якому цілому числі* $N \geq 0$ *має місце зображення* (8), (9), *де* $\varphi(t) \in C^\infty(\mathbf{R}_x^1 \times [0; T])$ — *деяка скалярна дійсна функція; функції* $u_j(x, t)$, $j = \overline{0, N}$, — *нескінченно диференційовні* (*в точках* $t = 0$, $t = T$ *розглядаються від-*

повідно ліва та права похідні); $V_0(x, t, \tau_1) \in G_1^0$; $V_j(x, t, \tau_1) \in G_1$, $j = \overline{1, N}$; $W_j(\tau_1, \tau_2) \in G_2^+$, $j = \overline{0, N}$, *то функція* $u(x, t, \varepsilon)$ *називається асимптотичним однофазовим солітоноподібним розв'язком задачі Коші* (1), (2).

Відповідно до загальної методології асимптотичних методів [17], для визначення коефіцієнтів асимптотичних розкладів (8) – (10) знаходимо

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^3 U_N}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 V_N}{\partial x^3} + \frac{3}{\varepsilon}\frac{\partial^3 V_N}{\partial x^2 \partial\tau_1} + \frac{3}{\varepsilon^2}\frac{\partial^3 V_N}{\partial x \partial\tau_1^2} + \frac{1}{\varepsilon^3}\frac{\partial^3 V_N}{\partial\tau_1^3}\right) =$$

$$= a(x, \varepsilon)\left(\frac{\partial U_N}{\partial t} + \frac{\partial V_N}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial V_N}{\partial\tau_1}\varphi'(t) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial V_N}{\partial\tau_2}\right) +$$

$$+ b(x, \varepsilon)(U_N + V_N)\left(\frac{\partial U_N}{\partial x} + \frac{\partial V_N}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial V_N}{\partial\tau_1}\right) + g_N(x, t, \varepsilon), \tag{11}$$

де $g_N(x, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1})$ — деяка нескінченно диференційовна функція своїх аргументів, що визначається рекурентним (щодо j) чином за функціями $Y_j(x, t, \varepsilon)$, $j = \overline{0, N-1}$. Число N вважаємо довільним, але фіксованим.

Для визначення регулярної частини асимптотики $U_N(x, t, \varepsilon)$ в (8) спрямуємо τ_1 до $+\infty$ в лівій та правій частинах співвідношення (11), а потім, врахувавши (8) – (10), прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. В результаті отримаємо деяку систему диференціальних рівнянь для функцій $u_j(x, t)$, $j = \overline{0, N}$, які входять до регулярної частини асимптотики в (8). Якщо додатково припустити, що виконується умова $u_0(0, 0) = 0$, то регулярна частина асимптотики (8) визначається функціями, які є розв'язками задач вигляду

$$a_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial t} + b_0(x)u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad u_0(0, 0) = 0, \tag{12}$$

$$a_0(x)\frac{\partial u_j}{\partial t} + b_0(x)u_0\frac{\partial u_j}{\partial x} + b_0(x)\frac{\partial u_0}{\partial x}u_j = f_j(x, t, u_0, u_1, \ldots, u_{j-1}), \quad j = \overline{1, N}. \tag{13}$$

Зауважимо, що розв'язок задач (12), (13) існує при досить загальних умовах, а тому задачу про знаходження регулярної частини асимптотики (8) можна вважати розв'язаною.

4. Визначення сингулярної частини асимптотики $V_N(x, t, \varepsilon)$. Вважаючи відомою регулярну частину асимптотики в (8), після прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε (в лівій та правій частинах рівності (11)) знаходимо систему диференціальних рівнянь для визначення функцій $V_j(x, t, \tau_1)$, $j = \overline{0, N}$, які входять до сингулярної частини асимптотики $V_N(x, t, \varepsilon)$. Одержані рівняння спочатку використовуємо для визначення функцій $V_j(x, t, \tau_1)$, $j = \overline{0, N}$, на кривій розриву Γ, а потім — для продовження цих функцій в деякий 2μ-окіл кривої Γ — область

$$\Omega_\mu(\Gamma) = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times [0; T] : |x - \varphi(t)| < 2\mu\},$$

де $\mu \in (0; 1)$ — деяка (достатньо мала) стала. При цьому ми використовуємо те, що будь-яку нескінченно диференційовну функцію $g(x, t)$ в області $\Omega_\mu(\Gamma)$ можна зобразити таким чином:

$$g(\varphi(t) + \varepsilon\tau_1, t) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j \frac{1}{j!}\tau_1^j \left(\frac{\partial^j}{\partial x^j} g(x, t)\right)\Bigg|_{x=\varphi(t)} + O(\varepsilon^{N+1}). \tag{14}$$

Зауважимо, що область $\Omega_\mu(\Gamma)$ і крива Γ поки що невідомі і мають бути визначені згодом.

4.1. Визначення сингулярної частини асимптотики $V_N(x, t, \varepsilon)$ на кривій Γ. Позначимо

$$v_j^\Gamma = v_j^\Gamma(t, \tau_1) = V_j(x, t, \tau_1)\big|_{x=\varphi(t)}, \qquad j = \overline{0, N}. \tag{15}$$

Враховуючи (12), (13), з (11) знаходимо, що функції $v_j^\Gamma = v_j^\Gamma(t, \tau_1)$, $j = \overline{0, N}$, є розв'язками системи квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними:

$$\frac{\partial^3 v_0^\Gamma}{\partial \tau_1^3} + a_0(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{\partial v_0^\Gamma}{\partial \tau_1} - b_0(\varphi(t))\left[u_0(\varphi(t), t)\frac{\partial v_0^\Gamma}{\partial \tau_1} + v_0^\Gamma \frac{\partial v_0^\Gamma}{\partial \tau_1}\right] = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^3 v_j^\Gamma}{\partial \tau_1^3} + a_0(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{\partial v_j^\Gamma}{\partial \tau_1} - b_0(\varphi(t))\left[u_0(\varphi(t), t)\frac{\partial v_j^\Gamma}{\partial \tau_1} + \frac{\partial v_0^\Gamma}{\partial \tau_1} v_j^\Gamma + v_0^\Gamma \frac{\partial v_j^\Gamma}{\partial \tau_1}\right] = \mathcal{F}_j(t, \tau_1), \tag{17}$$

де функції

$$\mathcal{F}_j(t, \tau_1) = F_j(t, v_0^\Gamma(t, \tau_1), \ldots, v_{j-1}^\Gamma(t, \tau_1), u_0(x, t), \ldots, u_j(x, t))\big|_{x=\varphi(t)}, \quad j = \overline{1, N},$$

визначаються рекурентним чином.

Розв'язок рівняння (16) у просторі G_1^0 можна подати у вигляді [19]

$$v_0^\Gamma(t, \tau_1) = A[\varphi]ch^{-2}((\tau_1 + C_0)H[\varphi]), \qquad C_0 = \text{const},$$

де

$$A[\varphi] = -2\frac{a_0(\varphi(t))\varphi'(t) - b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t), t)}{b_0(\varphi(t))}, \qquad H[\varphi] = \frac{2\sqrt{A[\varphi]}}{b_0(\varphi(t))},$$

при умові, що функція $\varphi = \varphi(t)$ визначена для $t \in [0; T]$ і для неї при всіх $t \in \in [0; T]$ виконуються нерівності $b_0(\varphi(t)) \neq 0$, $A[\varphi] > 0$.

Розглянемо питання про розв'язність системи (17) при $j = \overline{1, N}$. Позначимо

$$L = \frac{\partial^3}{\partial \tau_1^3} + \left[a_0(\varphi(t))\varphi'(t) - b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t), t) - b_0(\varphi(t))v_0^\Gamma\right]\frac{\partial}{\partial \tau_1} - b_0(\varphi(t))\frac{\partial v_0^\Gamma}{\partial \tau_1}.$$

Тоді систему рівнянь (16) за допомогою оператора L можна записати в операторному вигляді таким чином:

$$L v_j^\Gamma(t, \tau_1) = \mathcal{F}_j(t, \tau_1), \quad j = \overline{1, N}. \tag{18}$$

Якщо функції $F_j(t, \tau_1)$, $j = \overline{1, N}$, задовольняють умову $\mathcal{F}_j(t, \tau_1) \in G_1^0$, $j = \overline{1, N}$, то для розв'язності операторних рівнянь (18) у просторі G_1 необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова ортогональності [19]

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_j(t, \tau_1) v_0^\Gamma(t, \tau_1) d\tau_1 = 0, \qquad j = \overline{1, N}. \tag{19}$$

Інтегруючи (18) за змінною τ_1 від $-\infty$ до τ_1, для функції $v_j^\Gamma(t, \tau_1)$, $j = \overline{1, N}$, знаходимо рівняння

$$L_1 v_j^\Gamma(t, \tau_1) = \Phi_j(t, \tau_1),$$

де

$$L_1 \;=\; \frac{\partial^2}{\partial\tau_1^2} + a_0(\varphi(t))\varphi'(t) - b_0(\varphi(t))\,v_0^\Gamma - b_0(\varphi(t))u_0(\varphi(t), t).$$

Тоді функцію $v_j^\Gamma(t, \tau_1)$, $j = \overline{1, N}$, можна записати у вигляді

$$v_j^\Gamma(t, \tau_1) \;=\; \nu_j(t)\eta(t, \tau_1) + \psi_j(t, \tau_1),$$

де

$$\nu_j(t) \;=\; -(a_0(\varphi(t))\varphi'(t) - b_0(\varphi(t)))^{-1} \lim_{\tau_1 \to -\infty} \Phi_j(t, \tau_1),$$

$$\Phi_j(t, \tau_1) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\tau_1} \mathcal{F}_j(t, \tau)\,d\tau + E_j(t), \qquad \lim_{\tau_1 \to +\infty} \Phi_j(t, \tau_1) \;=\; 0.$$

Тут $\eta(t, \tau_1)$ — деяка функція з простору G_1 така, що $\lim\limits_{\tau_1 \to -\infty} \eta(t, \tau_1) = 1$, $E_j(t)$ — деяка нескінченно диференційовна функція („стала інтегрування”).

Якщо $\psi_j(t, \tau_1) \in G_1^0$, $j = \overline{1, N}$, то для $(x, t) \notin \Omega_\mu(\Gamma)$ функції $v_j^\Gamma(t, \tau_1)$, $j = \overline{1, N}$, можна записати у вигляді $v_j^\Gamma(t, \tau_1) = \nu_j(t)\eta(t, \tau_1) + \psi_j(t, \tau_1)$, $j = \overline{1, N}$.

Покажемо, що функція $\psi_j(t, \tau_1) \in G_1^0$, $j = \overline{1, N}$. Для цього розглянемо рівняння щодо $\psi_j(t, \tau_1)$, $j = \overline{1, N}$. Маємо

$$L_1\psi_j \;=\; \Phi_j(t, \tau_1) - \nu_j(t)L_1\eta(t, \tau_1). \tag{20}$$

Очевидно, що функція $\Phi_j(t, \tau_1) - \nu_j(t)L_1\eta(t, \tau_1)$ належить простору G_1^0. Оскільки простір G_1^0 є скрізь щільним у просторі $(G_1^0)'$, простір $(G_1^0)'$ — повним, а оператор $L_1 : G_1^0 \to (G_1^0)'$ — нетеровим, то для розв'язності рівняння (20) у просторі G_1^0 необхідною і достатньою є умова ортогональності вигляду [21]

$$\langle \Phi_j(t, \tau_1) - \nu_j(t)L_1\eta(t, \tau_1),\, v \rangle \;=\; 0, \tag{21}$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартний скалярний добуток у просторі G_1^0; $v = v(\tau_1) \in \operatorname{Ker} L_1^*$; L_1^* — оператор, спряжений до L_1 стосовно скалярного добутку у просторі G_1^0.

Далі, оскільки $\operatorname{Ker} L_1^* = \{v_{0\tau}^\Gamma\}$, то умова (21) має місце тоді і лише тоді, коли виконується умова (19). Це означає, що $\psi_j(t, \tau_1) \in G_1^0$, $j = \overline{1, N}$, за умови, що виконується умова ортогональності (19).

З умови ортогональності (19) при $j = 1$ знаходимо звичайне диференціальне рівняння для визначення функції $\varphi = \varphi(t)$. Це рівняння записується таким чином [19]:

$$a_0(\varphi)\frac{d}{dt}\frac{A^2[\varphi]}{H[\varphi]} + \left(2a_0'(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} - 2b_0'(\varphi)u_0(\varphi, t) - b_0(\varphi)\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x}\bigg|_{x=\varphi}\right)\frac{A^2[\varphi]}{H[\varphi]} \;=\; 0. \tag{22}$$

Далі припускаємо, що рівняння (22) має розв'язок $\varphi = \varphi(t)$, визначений при $t \in [0; T]$, який задовольняє початкову умову

$$\varphi(0) \;=\; 0. \tag{23}$$

4.2. Продовження сингулярної частини асимптотики $V_N(x, t, \varepsilon)$ в 2μ-окіл кривої Γ. Опишемо процедуру визначення функцій $V_j(x, t, \tau_1)$, $j = \overline{1, N}$, в замиканні деякої області $\Omega_\mu(\Gamma) \supset \Gamma$. Враховуючи (17), визначаємо продовження функцій $v_j^{\Gamma}(t, \tau_1)$, $j = \overline{0, N}$, з кривої Γ в область $\Omega_\mu(\Gamma)$ за допомогою формули

$$V_0(x, t, \tau_1) = v_0^{\Gamma}(t, \tau_1), \qquad V_j(x, t, \tau_1) = v_j^-(x, t)\eta(t, \tau_1) + \psi_j(t, \tau_1), \qquad j = \overline{1, N},$$

де $v_j^-(x, t)$, $j = \overline{1, N}$, — деякі функції, які визначаються як розв'язки задач Коші вигляду

$$\Lambda v_j^-(x, t) = f_j^-(x, t), \tag{24}$$

$$v_j^-(x, t)\Big|_{\Gamma} = \nu_j(t), \quad j = \overline{1, N}. \tag{25}$$

Диференціальний оператор Λ в (24) записується у вигляді

$$\Lambda = a_0(x)\frac{\partial}{\partial t} + b_0(x)u_0(x, t)\frac{\partial}{\partial x} + b_0(x)\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x}.$$

Диференціальне рівняння (24) для визначення функції $v_j^-(x, t)$, $j = \overline{1, N}$, отримано з (11) за допомогою граничного переходу при $\tau_1 \to -\infty$.

Оскільки крива Γ при всіх $t \in [0; T]$ трансверсальна характеристикам оператора Λ, то згідно з теоремою Коші – Ковалевської початкова задача (24), (25) має розв'язок $v_j^-(x, t) \in C^\infty(\Omega_\mu(\Gamma))$, $j = \overline{1, N}$, принаймні в деякій області $\Omega_\mu(\Gamma)$ за умови, що число μ достатньо мале. Далі припускаємо, що задача Коші (24), (25) має розв'язок і в області $\{(x, t): x - \varphi(t) \le -\mu,\ t \in (0; T)\}$.

***Зауваження* 1.** Для функції $u_0(x, t) + V_0(x, t, \tau_1)$ мають місце співвідношення

$$u_0(x, t) + V_0(x, t, \tau_1) \to u_0(x, t) \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

$$\frac{V_0(x, t, \tau_1)}{\varepsilon} \to g(t)\delta(x - \varphi(t)) \quad \text{в} \quad D' \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

де D' — простір узагальнених функцій.

Таким чином, N-те наближення $U_N(x, t, \varepsilon) + V_N(x, t, \tau_1, \varepsilon)$, $(x,\ t) \in \mathbf{R}^1 \times [0; T]$, розв'язку рівняння (1) можна записати за допомогою формули

$$U_N(x, t, \varepsilon) + V_N(x, t, \tau_1, \varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau_1)], & (x, t) \in \Omega_\mu(\Gamma), \\ u_0(x, t) + \sum\limits_{j=1}^{N} \varepsilon^j [u_j(x, t) + v_j^-(x, t)], & (x, t) \in D_- \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \\ \sum\limits_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x, t), & (x, t) \in D_+ \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \end{cases} \tag{26}$$

де

$$D_- = \left\{(x, t)) \in \mathbf{R}^1 \times [0; T]: \varphi(t) - x \ge \mu\right\},$$

$$D_+ = \left\{(x, t)) \in \mathbf{R}^1 \times [0; T]: x - \varphi(t) \ge \mu\right\},$$

а функції $v_j^-(x, t)$, $j = \overline{0, N}$, визначено як розв'язки задач Коші (24), (25) як в області $\Omega_\mu(\Gamma)$, так і в області $\{(x, t): x - \varphi(t) \le -\mu,\ t \in (0; T)\}$.

***Зауваження* 2.** При вказаному вище продовженні функції $V_j(x, t, \tau_1)$, $j =$

$= \overline{0, N}$, з кривої Γ в область $\Omega_\mu(\Gamma)$ функція $Y_N(x, t, \varepsilon)$, визначена за допомогою формули (26), при $\tau_1 \to -\infty$ задовольняє рівняння (1) з точністю $O(\varepsilon^{N+2})$.

***Зауваження* 3.** У випадку, коли розв'язки задач Коші (24), (25) визначені лише в області $\Omega_\mu(\Gamma)$, N-те наближення $U_N(x, t, \varepsilon) + V_N(x, t, \varepsilon)$, $(x, t) \in \in \mathbf{R}^1 \times [0; T]$, розв'язку рівняння (1) можна записати за допомогою формули

$$U_N(x, t, \varepsilon) + V_N(x, t, \varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{N} \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau_1)], & (x, t) \in \Omega_\mu(\Gamma), \\ \sum\limits_{j=0}^{N} \varepsilon^j u_j(x, t), & (x, t) \in (D_+ \cup D_-) \setminus \Omega_\mu(\Gamma), \end{cases} \tag{27}$$

і таке наближення розв'язку рівняння (1) при $\tau_1 \to -\infty$ задовольняє рівняння (1) з точністю $O(\varepsilon^{N+2})$.

5. Визначення сингулярної частини асимптотики $W_N(x, t, \varepsilon)$. Враховуючи задачі (12), (13), з (11) стандартним чином (прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε) знаходимо систему диференціальних рівнянь для визначення функцій $W_j(\tau_1, \tau_2)$, $j = \overline{0, N}$, в околі зв'язної множини

$$\mathcal{M} = \left\{(t, x) : t = 0, \ x \in \mathbf{R}^1\right\} \cup \{(t, x) : x = \varphi(t), \ t \in [0; T]\}.$$

Таким чином, для визначення сингулярної частини $W_N(x, t, \varepsilon)$ маємо диференціальні рівняння

$$\frac{\partial^3 W_0}{\partial \tau_1^3} = -a_0(0)\left[\varphi'(0)\frac{\partial W_0}{\partial \tau_1} - \frac{\partial W_0}{\partial \tau_2}\right] +$$

$$+ b_0(0)\left[V_0(0, \tau_1)\frac{\partial W_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0(0, \tau_1)}{\partial \tau_1} W_0 + W_0 \frac{\partial W_0}{\partial \tau_1}\right], \tag{28}$$

$$\frac{\partial^3 W_j}{\partial \tau_1^3} = -a_0(0)\left[\varphi'(0)\frac{\partial W_j}{\partial \tau_1} - \frac{\partial W_j}{\partial \tau_2}\right] +$$

$$+ b_0(0)\left[V_0(0, \tau_1)\frac{\partial W_j}{\partial \tau_1} + \frac{\partial V_0(0, \tau_1)}{\partial \tau_1} W_j + \frac{\partial W_0}{\partial \tau_1} W_j + W_0 \frac{\partial W_j}{\partial \tau_1}\right] + \mathcal{G}_j(\tau_1, \tau_2), \tag{29}$$

де функції $\mathcal{G}_j(\tau_1, \tau_2)$, $j = \overline{1, N}$, визначаються рекурентним чином після визначення функцій $W_0(\tau_1, \tau_2)$, $W_1(\tau_1, \tau_2), \ldots, W_{j-1}(\tau_1, \tau_2)$.

Використовуючи початкову умову (2), знаходимо співвідношення

$$\left(U_N(x, t, \varepsilon) + V_N(x, t, \varepsilon) + W_N(x, t, \varepsilon)\right)\big|_{t=0} = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

звідки, враховуючи асимптотичні розклади для функцій $U_N(x, t, \varepsilon)$, $V_N(x, t, \varepsilon)$, $W_N(x, t, \varepsilon)$ вигляду (8) – (10), отримуємо початкові умови для функцій $W_j(\tau_1, \tau_2)$, $j = \overline{0, N}$, при $\tau_2 = 0$:

$$W_0(\tau_1, 0) = f(\tau_1) - V_0(0, \tau_1), \tag{30}$$

$$W_j(\tau_1, 0) = -V_j(0, 0, \tau_1) + Q_j(\tau_1), \quad j = \overline{0, N}, \tag{31}$$

де функції Q_j, $j = \overline{1, N}$, визначаються рекурентним чином після визначення функцій $W_0(\tau_1, \tau_2)$, $W_1(\tau_1, \tau_2), \ldots, W_{j-1}(\tau_1, \tau_2)$.

З'ясуємо питання про існування розв'язку задач (28), (30) та (29), (31) у просторі G_2^+. Для розв'язності цих задач у просторі G_2^+ достатньою є умова вигляду $\mathcal{G}_j(\tau_1, \tau_2) \in G_2^+$. При цьому розв'язок задач (28), (30) та (29), (31) існує для $\tau_2 \in [0; \Theta]$, де Θ — деяке додатне число.

Справедлива така лема.

Лема 1. *Функція* $W_0(\tau_1, \tau_2)$, *яка є розв'язком задачі* (28), (30), *належить простору* G_2^+.

Лема 1 випливає з умови $W_0(\tau_1, 0) \in G_1^0$.

Лема 2. *Якщо функція* $-V_j(0, \tau_1) + Q_j(\tau_1)$, $j = \overline{1, N}$, *належить простору* G_1^0, *а функція* $\mathcal{G}_j(\tau_1, \tau_2)$, $j = \overline{1, N}$, — *простору* G_2^+, *то функція* $W_j(\tau_1, \tau_2)$, $j = \overline{1, N}$, *яка є розв'язком задачі* (29), (31), *належить простору* G_2^+.

Лема 2 випливає з теореми 2.1 [15].

Таким чином, ґрунтуючись на викладених вище міркуваннях, можна сформулювати таке твердження.

Теорема 1. *Нехай виконуються такі припущення*:

1) *функції* $a_k(x)$, $b_k(x)$ *належать простору* $C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1)$, $k \geq 0$;

2) *задача Коші* (22), (23) *має розв'язок* $\varphi(t)$, $t \geq 0$, *для якого виконується нерівність* $A[\varphi] > 0$;

3) *функції* $\mathcal{F}_j(t, \tau_1)$, $j = \overline{1, N}$, *належать простору* G_1^0 *та задовольняють умову ортогональності* (19);

4) *виконуються умови леми* 2.

Тоді функція

$$Y(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{N} \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau_1) + W_j(\tau_1, \tau_2)] + O(\varepsilon^{N+1}), \tag{32}$$

$$\tau_1 = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, \qquad \tau_2 = \frac{t}{\varepsilon},$$

є асимптотичним розвиненням для однофазового солітоноподібного розв'язку задачі Коші (1), (2) *для рівняння Кортевега – де Фріза при* $0 \leq t \leq \varepsilon\Theta$.

Можна встановити оцінку між точним $u(x, t, \varepsilon)$ і наближеним $Y_N(x, t, \varepsilon)$ розв'язками задачі (1), (2). Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1, *функції* $a(x, \varepsilon)$, $b(x, \varepsilon)$ *належать простору* G_1^0 *для* $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, *функція* $a(x, \varepsilon) < 0$ *для всіх* $x \in \mathbf{R}^1$ *та для всіх* $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$. *Тоді має місце оцінка між точним* $u(x, t, \varepsilon)$ *і наближеним* $Y_N(x, t, \varepsilon)$ *розв'язками задачі* (1), (2) *вигляду*

$$\max_{t \in [0; \varepsilon\Theta]} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\alpha(x) [u(x, t, \varepsilon) - Y_N(x, t, \varepsilon)]^2 dx \leq \inf_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\alpha(x) h^2(x, \varepsilon) dx, \tag{33}$$

де $\alpha \in \mathbf{N} \cup \{0\}$; *функція* $h(x, \varepsilon) \in G_1^0$ — *деяка функція, для якої виконується нерівність* $|h(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^{N+1}$, *а функція* $\rho_\alpha(x)$ *має вигляд*

$$\rho_\alpha(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ (1 + x)^\alpha, & x > 0. \end{cases},$$

Доведення. Розглянемо функцію вигляду

$$\omega_N(x, t, \varepsilon) = u(x, t, \varepsilon) - Y_N(x, t, \varepsilon),$$

де функція $u(x, t, \varepsilon)$ — точний розв'язок задачі (1), (2). Тоді функція $\omega_N(x, t, \varepsilon)$ є розв'язком задачі Коші вигляду

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^3 \omega_N}{\partial x^3} = a(x, \varepsilon)\frac{\partial \omega_N}{\partial t} + b(x, \varepsilon)\left(\omega_N \frac{\partial \omega_N}{\partial x} + Y_N \frac{\partial \omega_N}{\partial x} + \omega_N \frac{\partial Y_N}{\partial x}\right), \tag{34}$$

$$\omega_N(x, 0, \varepsilon) = h(x, \varepsilon), \tag{35}$$

де $h(x, \varepsilon) \in G_1^0$ — деяка функція, для якої виконується асимптотична нерівність $|h(x, \varepsilon)| \le C\varepsilon^{N+1}$.

Виконавши в рівнянні (34) заміну змінних

$$x = \varepsilon\xi, \quad t = -\varepsilon a(\varepsilon\xi, \varepsilon)\eta,$$

отримаємо рівняння

$$\frac{\partial^3 \omega_N}{\partial \xi^3} + \frac{\partial \omega_N}{\partial \eta} = b(\varepsilon\xi, \varepsilon)\left(\omega_N \frac{\partial \omega_N}{\partial \xi} + Y_N \frac{\partial \omega_N}{\partial \xi} + \omega_N \frac{\partial Y_N}{\partial \xi}\right),$$

для розв'язку $\omega_N(\xi, \eta, \varepsilon)$ якого виконується нерівність

$$\max_{t \in [0; \varepsilon\Theta]} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\alpha(x)(\omega_N(\xi, \eta, \varepsilon))^2 d\xi \le \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\alpha(x) h^2(\varepsilon\xi, \varepsilon)) d\xi,$$

де $\alpha \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Звідси випливає (33).

Теорему 2 доведено.

Висновок. За допомогою запропонованого алгоритму побудовано однофазові солітоноподібні асимптотичні розв'язки задачі Коші для рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами та встановлено асимптотичну оцінку для них.

1. *Korteweg D. J., de Vries G.* On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Phil. Mag. – 1895. – № 39. – P. 422 – 433.
2. *Russel J. S.* Report on waves // Rept Fourteenth Meeting Brit Assoc. Adv. Sci. – London: John Murray, 1844. – P. 311 – 390.
3. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of „solutions" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. – 1965. – **15**. – P. 240.
4. *Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Korteweg – de Vries equation // Ibid. – 1967. – **19**. – P. 1095.
5. *Lax P. D.* Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Communs Pure and Appl. Math. – 1968. – **21**, № 2. – P. 467 – 490 (Переклад рос. мовою: Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны // Математика. – 1969. – **13**, № 15. – С. 128 – 150).
6. *Lax P. D.* Periodic solutions of the Korteweg – de Vries equation // Communs Pure and Appl. Math. – 1975. – **28**, № 2. – P. 141 – 188.
7. *Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.* Уравнение Кортевега – де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, № 4. – С. 18 – 27.
8. *Новиков С. П.* Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза // Там же. – 1974. – **8**, № 3. – С. 54 – 66.
9. *Захаров В. Е., Манаков С. В.* Обобщение метода обратной задачи теории рассеивания // Теор. и мат. физика. – 1976. – **27**, № 3. – С. 283 – 287.
10. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
11. *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 527 с.
12. *Марченко В. А.* Периодическая задача Кортевега – де Фриза // Мат. сб. – 1974. – **95**, № 3. – С. 331 – 356.
13. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 332 с.

14. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и алгебро-геометрические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1987. – 296 с.
15. *Фаминский А. В.* Задача Коши для уравнения Кортевега – де Фриза и его обобщений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1988. – Вып. 13. – С. 56 – 105.
16. *Dye J. M., Parker A.* An inverse scattering scheme for the regularized long-wave equation // J. Math. Phys. – 2000. – **41**, № 5. – P. 2889 – 2904.
17. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
18. *Маслов В. П., Омельянов Г. А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией // Успехи мат. наук. – 1981. – Вып. 36 (219), № 2. – С. 63 – 124.
19. *Самойленко В. Г., Самойленко Ю. І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега – де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – **58**, № 1. – С. 111 – 124.
20. *Samoylenko Yul.* Asymptotical expansions for one-phase solution-type solution to perturbed Korteweg – de Vries equation // Proc. Fifth. Int. Conf. „Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics". – Kyiv: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine, 2004. – **3**. – P. 1435 – 1441.
21. *Математическая* энциклопедия: В 5 т. – М.: Наука, 1982. – Т. 3. – 1026 с.
22. *Samoylenko V. Hr., Samoylenko Yul.* Asymptotical expansions of solution to Cauchy problem for Korteweg – de Vries equation with varying coefficients and small parameter // CERMCS Int. Conf. Young Sci. Communs. – Chisinau: Moldova State Univ., 2006. – P. 186 – 192.
23. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения с частными производными. – М.: Наука, 1976. – 391 с.

Одержано 11.10.2006