УДК 517.51

Ю. С. Лінчук (Чернів. нац. ун-т)

ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ

We describe solutions of one integro-differential operator equation in the class of linear continuous operators which act in spaces of functions analytic in domains.

Описаны решения одного интегро-дифференциального операторного уравнения в классе линейных непрерывных операторов, которые действуют в пространствах функций, аналитических в областях.

У багатьох математичних дослідженнях вивчається характеристика операторів, що задовольняють певні комутаційні співвідношення. У класичні праці [1] у класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторі цілих функцій, досліджувалося операторне рівняння вигляду

$$D^n T = T D^n, \tag{1}$$

де $D = \dfrac{d}{dz}$ — оператор диференціювання, а n — фіксоване натуральне число. Зокрема, в [1] стверджувалося, що загальний розв'язок рівняння (1) можна подати у вигляді

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} T_k P^k, \tag{2}$$

де P — лінійний неперервний оператор, що діє у просторі цілих функцій за правилом $(Pf)(z) = f(\omega z)$, $\omega = \exp\left(\dfrac{2\pi i}{n}\right)$, а кожен з операторів T_k, $k = \overline{0, n-1}$, є переставним з оператором D. М. І. Нагнибіда [2] встановив, що формула (2) описує деяку підмножину розв'язків рівняння (1), а також знайшов матричним методом усі розв'язки цього рівняння у класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах функцій, аналітичних у кругових областях. Пізніше рівняння (1) досліджувалося в інших класах лінійних неперервних операторів [3].

У цій роботі вивчаються розв'язки інтегро-диференціального операторного рівняння вигляду

$$D^n T = T \mathcal{J}^n \tag{3}$$

у класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторах функцій, аналітичних у областях $\Big($тут $\mathcal{J}$ — оператор інтегрування, який діє у відповідному просторі аналітичних функцій за правилом $(\mathcal{J}f)(z) = \int_0^z f(t)\,dt$ $\Big)$. Встановлено, що для рівняння (3) є правильним твердження, аналогічне до сформульованого вище результату Дельсарта і Ліонса з [1].

Нехай G — довільна область комплексної площини. Позначимо через $\mathcal{H}(G)$ простір усіх аналітичних у G функцій, наділений топологією компактної збіжності [4]. Вважатимемо, що область G є опуклою і містить початок координат. Опишемо спочатку розв'язки інтегро-диференціального операторного рівняння (3) у класі лінійних неперервних операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$, у випадку $n = 1$.

Оскільки область G є однозв'язною, то система функцій $\{\exp(\lambda z) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ є повною в $\mathcal{H}(G)$. Тому кожен оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ однозначно визначається за характеристичною функцією $t(\lambda, z) = T(\exp(\lambda z))$. З умови неперервності оператора T випливає, що функція $t(\lambda, z)$ є цілою по λ, аналітичною по z в G і задовольняє умову

$$\forall K_2 \subset G \;\; \exists K_1 \subset G \, \exists C > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}:$$

$$\max_{z \in K_2} |t(\lambda, z)| \leq C \exp\left(\max_{z \in K_1} \operatorname{Re}(\lambda z)\right), \tag{4}$$

де K_1, K_2 — компактні підмножини області G. Навпаки, кожна функція $t(\lambda, z)$, яка є цілою по λ, аналітичною по z в G і задовольняє умову (4), є характеристичною для деякого оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Дійсно, зафіксуємо довільну опуклу компактну множину $K_2 \subset G$ і знайдені для неї $K_1 \subset G$ та $C > 0$ згідно з (4). З (4) випливає, що при кожному $z \in K_2$ індикатриса $h_z(\varphi)$ цілої функції $t(\lambda, z)$ задовольняє нерівність $h_z(\varphi) \leq k(-\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, де $k(\varphi)$ — опорна функція множини K_1. Здійснивши перетворення Бореля [5] останньої функції за змінною λ, одержимо, що при кожному $z \in K_2$ формулою

$$t_1(\lambda, z) = \int_0^\infty t(\mu, z) \exp(-\lambda\mu)\, d\mu, \tag{5}$$

в якій шляхом інтегрування є промінь $\arg \mu = \varphi$, визначається функція $t_1(\lambda, z)$, яка є аналітичною в півплощині $\operatorname{Re}(\lambda e^{i\varphi}) > k(-\varphi)$. Тому функція $t_1(\lambda, z)$ є локально аналітичною на множині $\complement G \times G$ [4]. Нехай γ — замкнена спрямована жорданова крива, яка міститься в G і така, що множина K_1 знаходиться всередині області, обмеженій γ. Тоді для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$ при $z \in K_2$ формулою

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda) \left(\int_0^\infty t(\mu, z) \exp(-\lambda\mu)\, d\mu \right) d\lambda \tag{6}$$

визначається оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ [4]. Оскільки $t(\lambda, z) = T(\exp(\lambda z))$ при $\lambda \in \mathbb{C}$ і $z \in K_2$, то $t(\lambda, z)$ є характеристичною функцією побудованого оператора T.

Нехай оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ задовольняє рівність

$$DT = T\mathcal{J}. \tag{7}$$

Подіявши обома частинами рівності (7) на функцію $\exp(\lambda z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, одержимо, що функція $t(\lambda, z)$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і $z \in G$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{1}{\lambda} (t(\lambda, z) - \varphi(z)), \tag{8}$$

де $\varphi(z) = T1$ — функція з простору $\mathcal{H}(G)$. Розв'язавши рівняння (8), одержимо, що при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \in G$

$$t(\lambda, z) = \exp\left(\frac{z}{\lambda}\right) \left(-\frac{1}{\lambda} \int_0^z \varphi(\tau) \exp\left(-\frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau + c(\lambda) \right). \tag{9}$$

Оскільки функція $t(\lambda, z)$ є цілою по λ, то з (9) випливає, що $c(\lambda)$ — ціла функція, причому $c(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi^{(k)}(0)$, а $\varphi(z)$ — деяка функція з класу $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. Зауважимо, що символом $[\rho, \sigma)$, $0 < \rho < \infty$, $0 < \sigma \le \infty$, позначають клас цілих функцій, порядок яких менший за ρ або ж дорівнює ρ, але тип менший за σ. Тоді при $\lambda \in \mathbb{C}$ і $z \in G$

$$t(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi^{(k)}(z), \tag{10}$$

причому ціла функція $\varphi(z)$ така, що функція $t(\lambda, z)$ задовольняє умову (4). Відновлюючи за характеристичною функцією оператор T, одержуємо необхідність умов наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай G — довільна опукла область комплексної площини, яка містить початок координат. Для того щоб оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ був розв'язком рівняння* (7), *необхідно і достатньо, щоб він мав вигляд* (6), *де $\varphi(z)$ — деяка функція з класу $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, а $t(\lambda, z)$ визначається формулою* (10) *і задовольняє умову* (4).

Достатність умов теореми 1 встановлюється безпосереднім обчисленням.

У випадку, коли $G = \{z : |z| < R\}$, тобто $\mathcal{H}(G) = A_R$, $0 < R \le \infty$, умова (4) для $t(\lambda, z)$ рівносильна тому, що функція $\varphi \in \left[\frac{1}{2}, 2\sqrt{R}\right)$ і формула (6) набирає в цьому випадку вигляду

$$(Tf)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \varphi^{(k)}(z).$$

Рівняння (3) для довільного натурального n розв'язується за тією ж схемою, що і рівняння (7).

Теорема 2. *Нехай G — довільна опукла область комплексної площини, яка містить початок координат і є інваріантною відносно повороту навколо точки $z = 0$ на кут $2\pi/n$. Загальний розв'язок рівняння* (3) *у класі операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ задається формулою* (2), *де T_k, $k = \overline{0, n-1}$, — деякі оператори з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, що задовольняють рівняння* (7), *а $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і діє за правилом $(Pf)(z) = f(\omega z)$, де $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$.*

Доведення. Нехай оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ з характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ задовольняє рівняння (3). Тоді при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ і $z \in G$ функція $t(\lambda, z)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^n t}{\partial z^n} = \frac{1}{\lambda^n} t(\lambda, z) - \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \varphi_k(z), \tag{11}$$

де $\varphi_k \in \mathcal{H}(G)$, причому $\varphi_k(z) = Tz^k$, $k = \overline{0, n-1}$. Розв'язавши диференціальне рівняння (11) методом варіації сталих, одержимо, що загальний розв'язок рівняння (11) задається формулою

$$t(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k(\omega^k \lambda, z),$$

де кожна з функцій $t_k(\lambda, z)$ є характеристичною функцією деякого оператора $T_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, який є розв'язком рівняння (7). Відновлюючи за характеристичною функцією $t(\lambda, z)$ оператор T, одержуємо, що T має вигляд (2). Той факт, що кожен оператор T, який визначається формулою (2), задовольняє рівняння (3), встановлюється безпосередньою перевіркою.

1. *Delsartes J., Lions J. L.* Transmutations d'oprateurs differentieles dans le domaine complexe // Comment. math. helv. – 1957. – **32**, № 2. – P. 113 – 128.
2. *Нагнибіда М. І.* Класичні оператори в просторах аналітичних функцій. – Київ, 1995. – 297 с.
3. *Коробейник Ю. Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1983. – 156 с.
4. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math. – 1953. – **191**, № 1 – 2. – S. 30 – 49.
5. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.

Одержано 10.07.2006