УДК 517.9

Е. Ю. Романенко, А. Н. Шарковский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

We propose an approach to the analysis of turbulent oscillations described by nonlinear boundary-value problems for partial differential equations. This approach is based on the transition to a dynamical system of shifts along solutions and uses the notion of ideal turbulence (a mathematical phenomenon such that the attractor of an infinite-dimensional dynamical system lies not in the phase space of the system but in a wider functional space and, among attractor "points", there are fractal or random functions). A scenario for ideal turbulence in systems with regular dynamics on an attractor is described; in this case, the space-time chaotization of a system, in particular, the intermixing, the self-stochastisity, and the cascade process of creation of structures, is due to the very complicated organization of attractor "points" (elements of a certain wider functional space). Such a scenario is available in some idealized models of parameter-distributed systems in electrodynamics, acoustics, radiophysics, etc.

Окреслено підхід до аналізу турбулентних коливань, що описуються нелінійними крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними. Цей підхід базується на переході до динамічної системи зсувів вздовж розв'язків і використовує поняття ідеальної турбулентності — математичного явища, при якому атрактор нескінченновимірної динамічної системи міститься не у фазовому просторі системи, а у ширшому функціональному просторі і серед „точок" атрактора є фрактальні або й випадкові функції. Описано сценарій турбулентності в системах з регулярною динамікою на атракторі, коли просторово-часова хаотизація системи, зокрема перемішування, автостохастичність, каскадний процес утворення структур, зумовлені дуже складною внутрішньою організацією „точок" атрактора — елементів ширшого функціонального простору. Такий сценарій реалізується у певних ідеалізованих моделях розподілених систем електродинаміки, акустики, радіофизики.

1. Введение. Во второй половине прошлого века происходило интенсивное развитие асимптотических методов как в теоретическом плане, так и в плане применений к нелинейным, преимущественно регулярным, колебательным процессам. Вместе с тем все больше ощущалась необходимость и создавались предпосылки для исследования нелинейных процессов с крайне нерегулярной пространственно-временной динамикой. Появились и стали активно использоваться такие понятия, как *хаос* — для характеристики нерегулярного поведения во времени и/или пространстве динамических процессов, *фрактал* — как множество с очень сложным топологическим устройством, имеющим, например, дробную размерность, *странный аттрактор* — как фрактал в фазовом пространстве динамической системы, притягивающий траектории из некоторой своей окрестности.

Теория динамических систем, возникшая как средство для исследования асимптотических свойств решений дифференциальных уравнений, постепенно, получая мощные импульсы для своего развития со стороны прикладных наук, превратилась в самостоятельный раздел математики, представляющий, в частности, эффективный математический аппарат для изучения динамических процессов в окружающем мире.

В начале 60-х годов в отделе математической физики и теории нелинейных колебаний Института математики НАН Украины начали изучать динамические системы с дискретным временем и простейшим фазовым пространством — вещественной прямой. В результате были созданы основы топологической теории одномерных динамических систем, которая через 15 – 20 лет стала одним из важнейших инструментов исследования самых разнообразных нелинейных систем.

Дальнейшие исследования динамических систем, проводившиеся в Институте математики, показали, что одномерные динамические системы очень эффективны и при исследовании определенных классов бесконечномерных динамических систем, порождаемых нелинейными краевыми задачами математической физики. В частности, на этом пути оказалось возможным проанализировать различные математические механизмы возникновения и развития турбулентности — вероятно, самого сложного колебательного процесса, встречающегося в природе. Именно об этих исследованиях и идет речь в статье.

Термин *турбулентность,* который возник в гидродинамике и первоначально использовался только для потоков жидкостей и газов, теперь часто понимается значительно шире и означает, что некоторые характеристики распределенной системы изменяются хаотически во времени и пространстве. Переход от регулярной динамики к турбулентной всегда связан с формированием и разрушением структур, которые, как единое целое, характеризуются большим числом пространственных и временных масштабов. В реальных системах минимальный масштаб пространственных структур „диктуется" внутренним сопротивлением системы. Идеальные системы — системы без внутреннего сопротивления („вязкости") — сами по себе не препятствуют развитию каскадного процесса вплоть до образования структур сколь угодно малых масштабов, что может даже приводить к стохастизации системы, когда ее поведение на больших временах описывается некоторым случайным процессом. Поэтому важным и весьма продуктивным (!) этапом на пути к пониманию природы реальной турбулентности является изучение *идеальной турбулентности* — турбулентности в системах без внутреннего сопротивления.

Идеальными математическими моделями идеальной турбулентности являются краевые задачи (КЗ) для уравнений в частных производных (УЧП). Эти задачи порождают бесконечномерные динамические системы сдвигов вдоль решений, которые, как оказалось, демонстрируют многие особенности структурной турбулентности, в том числе две наиболее характерные: каскадный процесс возникновения структур убывающих масштабов и хаотическое перемешивание. Эффективное изучение динамики идеальных систем стало возможным только в последние 20 – 30 лет благодаря развитию теории разностных уравнений с непрерывным аргументом (см. [16, 17, 20, 40, 44] и приведенную там библиографию), которая в значительной степени опирается на теорию одномерных динамических систем.

Ниже кратко изложен подход к моделированию турбулентных процессов, развитый в наших работах по хаотической динамике бесконечномерных динамических систем и КЗ для УЧП. Понятие идеальной турбулентности было предложено одним из авторов еще в 1983 г.; первоначально использовалось название „сухая турбулентность" [27 – 29] по аналогии с „сухой водой" Неймана. С тех пор проблематика идеальной турбулентности постоянно оставалась в поле зрения авторов (см., например, [12, 21 – 25, 31, 32, 34, 37, 41, 42, 46 – 48]). В итоге было „отработано" строгое математическое определение и методология исследований [35, 45] (см. также [32, 48]), „увенчавшиеся" фиксацией в научной терминологии понятия *турбулентность идеальная,* которое, в частности, представлено в „Encyclopedia of Nonlinear Science" (ed. Alwyn Scott, New York: Routledge, 2005). Отметим, что рассматриваемые ниже модели идеальной турбулентности не имеют прямого отношения к гидродинамике, а связаны с изучением электромагнитных и акустических колебаний [8, 9, 11, 30, 31, 38, 39].

2. Идеальная турбулентность: определения и простейшая модель. Содержательное математическое определение турбулентности можно дать для динамических систем (ДС) на пространствах гладких (или кусочно-гладких) функций. Пусть

$$\{ C^k(D, E),\ \mathbb{T},\ S^t \} \tag{1}$$

— динамическая система, $C^k(D, E)$ — пространство C^k-функций $\varphi : D \to E$; D и E — компактные области в евклидовых пространствах; $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ или $\mathbb{Z}^+$. Фазовое пространство C^k, снабженное *a priori* „обычной" C^k-метрикой, является некомпактным, и потому для некоторых, а возможно, и для почти всех[1] начальных состояний системы $\varphi \in C^k(D, E)$ соответствующие траектории $S^t[\varphi]$ имеют пустые ω-предельные множества. Более того, происходит пространственно-временная хаотизация системы: эволюция начальных состояний системы — гладких функций из фазового пространства — сопровождается все большим и большим усложнением их структуры (поведения) вплоть до такого, что предельное состояние системы уже не может быть описано в терминах гладких функций. В таком случае аттрактор системы не содержится целиком в фазовом пространстве C^k. Следовательно, ДС необходимо продолжить на некоторое более широкое функциональное пространство C^* с новой метрикой ρ^*, причем так, чтобы новое пространство C^* содержало ω-предельные множества всех или почти всех траекторий, начинающихся в исходном фазовом пространстве. Тогда можно построить глобальный аттрактор, понимаемый, например, как аналог Generic Limit Set Дж. Милнора [13] для динамических систем на некомпактных пространствах [22].

Определение 1. *Глобальным аттрактором в пространстве* C^* *системы* (1) *назовем наименьшее замкнутое множество* $\mathcal{A}^*$ *в расширенном фазовом пространстве* C^*, *содержащее* ω*-предельные множества траекторий, порождаемых почти всеми начальными состояниями* $\varphi \in C^k(D, E)$.

При реализации этого подхода — выборе расширенного пространства и метрики в этом пространстве — нужно иметь в виду такую „физическую” аргументацию. Чтобы исследовать поведение функции $S^t[\varphi](y)$ при $t \to \infty$ при наличии больших градиентов как по y, так и/или по t (с чем, собственно, и имеем дело), в частности, чтобы проанализировать свойства $S^t[\varphi](y)$ в какой-либо точке $y = y_*$, необходимо принимать во внимание значения $\varphi(y)$ не только в точке $y = y_*$, но и в некоторой ε-окрестности этой точки. Если речь идет обо всех $y \in D$, то для каждой конкретной задачи следует, уменьшая ε, найти „оптимальное разрешение” — малое, но конечное значение ε. Это означает, что искомая метрика должна осуществлять не поточечное сравнение функций, а сравнение значений функций в „оптимальных” окрестностях точек. Близкие идеи высказывались в [3, 6].

Для осуществления описанной выше „стратегии” в качестве расширенного пространства C^* предлагаются два пространства C^Δ и $C^\#$, первое из которых возникает как естественное расширение пространства гладких функций, а второе позволяет, при определенных условиях, существенно уточнить описание функций, составляющих аттрактор системы (1). Пространство C^Δ — это пространство полунепрерывных сверху функций $\xi : D \to 2^E$ с метрикой

$$\rho^\Delta(\xi_1, \xi_2) = \sup_{\varepsilon > 0} \min \left\{ \varepsilon, \sup_{y \in D} \operatorname{dist}_H \left(V^\varepsilon_{\xi_1}(y), V^\varepsilon_{\xi_2}(y) \right) \right\}, \tag{2}$$

где $\operatorname{dist}_H(\cdot,\cdot)$ — расстояние Хаусдорфа между множествами, $V^\varepsilon_\xi(y) = \xi(V_\varepsilon(y))$ и $V_\varepsilon(\cdot)$ — ε-окрестность точки. Метрика ρ^Δ, как нетрудно видеть, эквивалентна метрике

$$\rho^\Delta_H(\xi_1, \xi_2) = \operatorname{dist}_H(\operatorname{gr}\xi_1, \operatorname{gr}\xi_2), \qquad \operatorname{gr}\xi \text{ — график функции } \xi(y). \tag{3}$$

[1] Будем говорить, что некоторое свойство имеет место для почти всех $x \in X$, если множество тех x, для которых это свойство выполняется, является резидуальным в X.

Метрика ρ_H^Δ во многих случаях удобнее для использования, чем метрика ρ^Δ; она, в частности, позволяет легко понять смысл сходимости в пространстве C^Δ: сходимость последовательности функций ξ_i к функции ξ эквивалентна соотношению

$$\mathrm{Lt}_{i\to\infty}\,\mathrm{gr}\,\xi_i = \mathrm{gr}\,\xi, \tag{4}$$

где Lt — операция перехода к топологическому пределу. Нетрудно видеть, что значениями функций $\xi \in C^\Delta$ являются замкнутые связные (!) множества из E (подробнее см. [17, 18]).

Пространство $C^\#$ — это пространство функций $\zeta: D \to E$, заданных наборами конечномерных распределений, т. е. $C^\#$ состоит из случайных и измеримых детерминированных функций. Под случайной функцией фактически понимаем распределение случайной функции (или, иначе, меру на пространстве реализаций); в таком смысле термин „случайная функция" используется ради удобства (что не является общепринятым в теории вероятностей). Метрика в $C^\#$ должна сравнивать распределения значений функций ζ в окрестности каждой точки из D. Заменяя множество $V_\xi^\varepsilon(y)$ в (2) усредненным распределением функции ζ на $V_\varepsilon(y)$, получаем искомую метрику

$$\rho^\#(\zeta_1,\zeta_2) = \sup_{\varepsilon>0}\min\left\{\varepsilon,\ \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^r}\,\mathrm{dist}_R\big(V_{\zeta_1}^{\varepsilon,r}(z,y),\ V_{\zeta_2}^{\varepsilon,r}(z,y)\big)\right\}, \tag{5}$$

где

$$\mathrm{dist}_R\big(V_{\zeta_1}^{\varepsilon,r},\ V_{\zeta_2}^{\varepsilon,r}\big) = \sup_{z\in E^r}\frac{1}{\mathrm{mes}\,D^r}\int\limits_{D^r}\left|F_{\zeta_1}^{\varepsilon,r}(z,y) - F_{\zeta_2}^{\varepsilon,r}(z,y)\right|dy,$$

D^r и E^r — прямые произведения r копий D и E, $F_\zeta^{\varepsilon,r}(z,y)$ — усреднение r-мерного распределения $F_\zeta^r(z,\cdot)$ функции $\zeta(y)$ по ε-окрестности точки $y \in D^r$. Для детерминированной функции $\zeta: D \to E$ все конечномерные распределения однозначно определяются ее функцией распределения $F_\zeta(x,z) = \chi_{(-\infty,z)}(\zeta(x))$, $x \in D$, где $\chi_A(\cdot)$ — индикатор множества A. Смысл сходимости в пространстве $C^\#$ таков: если последовательность функций ζ_i сходится к функции ζ, то при фиксированных $\varepsilon_* > 0$, $r_* \in \mathbb{Z}^+$, $z_* \in D^{r_*}$ последовательность распределений $F_{\zeta_i}^{\varepsilon_*,r_*}(z_*,y)$ сходится к распределению $F_\zeta^{\varepsilon_*,r_*}(z_*,y)$ по мере, равномерно по z_* (подробнее см. [20]).

Пространство C^Δ является компактным и потому всегда „работает": пополнение пространства $C^k(D,E)$ в метрике ρ^Δ приводит к тому, что все траектории системы (1) оказываются компактными в пространстве C^Δ (относительно метрики ρ^Δ), и тогда для каждого начального состояния $\varphi \in C^k(D,E)$ соответствующая траектория уже имеет в C^Δ непустое компактное ω-предельное множество, которое обозначим $\omega^\Delta[\varphi]$. При этом типична ситуация, когда некоторые (а возможно, и все) „точки" множества $\omega^\Delta[\varphi]$ являются собственно полунепрерывными сверху (т. е. разрывными) функциями, и, следовательно, их графики (как множества в $D \times E$) могут оказаться фрактальными (точнее, для $\xi \in \omega^{\Delta}[\varphi]$ какая-либо из фрактальных размерностей графика $\mathrm{gr}\,\xi$ больше топологической размерности области D — области определения функции $\xi(y)$).

Второе расширенное пространство $C^{\#}$, вообще говоря, не является компактным и потому „работоспособность" $C^{\#}$ уже зависит от оператора S^t. Для простейших систем вида (1) основным из условий, которые позволяют эффективно использовать пространство $C^{\#}$, является существование гладкой (т. е. абсолютно непрерывной относительно меры Лебега) инвариантной меры ДС. Если для $\varphi \in C^k(D, E)$ соответствующая траектория системы (1) компактна в $C^{\#}$, то ее (непустое компактное) ω-предельное множество в $C^{\#}$ обозначим $\omega^{\#}[\varphi]$; для некомпактных в $C^{\#}$ траекторий примем $\omega^{\#}[\varphi] = \varnothing$.

Имея пространства C^{Δ} и $C^{\#}$, можно предложить математическое определение турбулентности и классифицировать турбулентные колебания по свойствам ω-предельных множеств траекторий.

Определение 2. *Будем говорить, что начальное состояние* $\varphi \in C^k$ *порождает*:

идеальную турбулентность (*ИТ*), *если найдется функция* $\xi \in \omega^{\Delta}[\varphi]$, *график которой является фрактальным*;

стохастическую идеальную турбулентность (*СтИТ*), *если множество* $\omega^{\#}[\varphi]$ *содержит случайную функцию*;

слабую идеальную турбулентность (*СлИТ*), *если* φ *не порождает идеальную турбулентность, но существует функция* $\xi \in \omega^{\Delta}[\varphi]$, *разрывная на бесконечном множестве точек из* D [2].

Будем говорить, что динамическая система демонстрирует турбулентность того или иного типа, когда начальные состояния $\varphi \in C^k(D, E)$, *порождающие такую турбулентность, образуют массивное* (*в том или ином смысле*) *множество*[3] *в фазовом пространстве* C^k.

Стохастическая турбулентность эквивалентна автостохастичности [41, 42]. Можно предложить [40] и другую градацию турбулентных колебаний, исходя, например, из топологической структуры и мощности множества точек разрыва функций из $\omega^{\Delta}[\varphi]$.

Простейший представитель ДС с идеальной турбулентностью — ДС на пространстве гладких функций $\varphi : D \to E$, действующая по правилу

$$S : \varphi \mapsto f \circ \varphi, \quad f : E \to E \text{ — гладкая необратимая функция,} \tag{6}$$

где $\circ$ — операция композиции функций. Траекторию „точки" φ можно записать в виде

$$S^n[\varphi] = f^n \circ \varphi \quad \text{или} \quad S^n[\varphi](y) = f^n(\varphi(y)), \qquad n \in \mathbb{Z}^+, \quad y \in D,$$

индекс n обозначает n-ю итерацию функции (т. е. $f^n = f \circ f^{n-1}$, $f^0(y) = y$).

---

[2] То есть на бесконечном множестве точек $y' \in D$ значения функции $\xi(y)$ (принадлежащие 2^E) не являются одноточечными множествами.

[3] Это может быть множество положительной или полной меры, всюду плотное множество или множество второй категории, или еще какое-нибудь множество, естественное для рассматриваемой задачи.

Последняя формула означает, что динамику почти каждой траектории $S^n[\varphi]$ можно рассматривать как динамику континуума несвязанных осцилляторов: в каждой точке $y \in D$ „подвешен маятник”, колеблющийся по закону $z_n \mapsto \mapsto z_{n+1} = f(z_n)$, где $z_0 = \varphi(y)$; его колебания не зависят от „маятников” в других точках области D. Именно независимость колебаний и есть причиной идеальной турбулентности в ДС (6): состояния подвешенных в точках $z \in D$ „маятников”, которые (состояния) были близки в начальный момент, со временем могут оказаться очень далекими.

Описание асимптотической динамики системы (6) можем предложить для случая, когда D и E — интервалы (и тогда f — одномерное отображение).

Теорема 1. 1. *При почти всех f для почти каждого начального состояния φ*

ω-предельное множество $\omega^{\Delta}[\varphi]$ является циклом Δ-расширенной системы $\xi \mapsto f \circ \xi,\ \xi \in C^{\Delta}$;

ω-предельное множество $\omega^{\#}[\varphi]$, если оно не пусто, является циклом #-расширенной системы $\zeta \mapsto f \circ \zeta,\ \zeta \in C^{\#}$.

2. *Если f имеет циклы только периодов 2^i, $i = 0, 1, \ldots, l < \infty$, то для каждого начального состояния φ множество $\omega^{\Delta}[\varphi]$ является циклом Δ-расширенной системы.*

3. *Система* (6) *имеет аттрактор $\mathcal{A}^{\Delta}$ в пространстве C^{Δ} и при почти всех f этот аттрактор состоит из циклов Δ-расширенной системы. Если система* (6) *имеет аттрактор $\mathcal{A}^{\#}$ в пространстве $C^{\#}$, то этот аттрактор состоит из циклов #-расширенной системы*[4].

Таким образом, можно констатировать, что ДС (6) оказывается в определенном смысле более простой, нежели ДС, индуцируемая отображением f: типичные траектории первой системы являются асимптотически периодическими, в то время как типичные траектории второй могут, как известно, и не быть асимптотически периодическими.

Теорема 2. *При сделанных выше предположениях система* (6) *демонстрирует*:

1) *СлИТ, если f имеет циклы с периодами 2^i, $i = 0, 1, \ldots, l$, $1 < l < \infty$, и не имеет других периодических траекторий*;

2) *ИТ, если f имеет цикл периода $\neq 2^i$, $i = 0, 1, \ldots$*;

3) *СтИТ, если найдется $n > 0$ такое, что f^n имеет инвариантную меру, сосредоточенную на некотором интервале и эквивалентную на нем мере Лебега, и f^n является перемешивающим относительно этой меры.*

Здесь используем „box-counting” размерность — одну из версий фрактальной размерности, которая наиболее широко применяется в приложениях и хорошо приспособлена для вычислений (определение см., например, в [15]). В случаях 1 и 2 турбулентность порождается начальными состояниями φ, которые образуют в C^k множество второй категории, а в случае 3 — несингулярными (относительно меры Лебега) начальными состояниями φ, для которых интервал

[4] Теорема 1 вытекает из двух фактов: а) асимптотическая динамики траекторий системы (6) определяется траекториями окрестностей (!) точек (а не траекториями точек) при отображении f [40], б) для почти каждого f траектория окрестности точки является асимптотически периодической [19, 26].

$\varphi(D)$ имеет непустое пересечение с бассейном инвариантной меры (определение см., например, в [1]), при этом функции $\zeta \in \omega^{\#}[\varphi]$ являются собственно случайными функциями с независимыми значениями, распределения которых выражаются через упомянутую меру.

В качестве примера используем популярную и хорошо изученную параболу $f_\lambda\colon z \mapsto \lambda z(1-z)$, $z \in [0,1]$, $0 < \lambda \leq 4$. Когда λ изменяется в интервале $(1+\sqrt{6}, \lambda^*)$, где $\lambda^* \approx 3{,}57$ — значение λ, предельное для бифуркационных значений удвоения периода, отображение f_λ имеет циклы только периодов $1, 2, 2^2, \ldots, 2^r$ с некоторым конечным $r > 1$. Когда $\lambda > \lambda^*$, отображение f_λ уже имеет цикл периода, отличного от степени 2. Каждая функция $\varphi \in C^k$, не равная тождественно константе ни на одном из интервалов из $[0,1]$, порождает СлИТ в первом случае[5] и ИТ во втором. И, наконец, третий случай: существует множество $\Lambda \subset (\lambda^*, 4]$ положительной меры Лебега такое, что f_λ при $\lambda \in \Lambda$ имеет (единственную) гладкую эргодическую инвариантную меру. Тогда ДС демонстрирует СтИТ. В частности, отображение $z \mapsto 4z(1-z)$ имеет инвариантную меру с плотностью $p(z) = 1/\pi\sqrt{z(1-z)}$ и носителем $[0,1]$. В этом случае для каждой несингулярной функции $\varphi \in C^k$ множество $\omega^{\#}[\varphi]$ состоит из единственной случайной функции (с независимыми значениями) $\zeta^*(y)$, которая задается не зависящей от y функцией распределения $F_{\zeta^*}(z,y) = \int_0^z p(z)\,dz = (2/\pi)\arcsin\sqrt{z}$, и глобальный аттрактор $\mathcal{A}^{\#}$ состоит из одной траектории — точки $\{\zeta^*\}$.

В общей ситуации функции, образующие ω-предельные множества траекторий ДС (6), могут быть детерминированными на одних подмножествах области D и случайными на других. Для этого необходимо, чтобы отображение f имело несколько аттракторов и интервал начальных значений $\varphi(D)$ пересекался с бассейнами, по крайней мере, двух из них. Заметим, что *топологическая энтропия ДС* (6) *равняется нулю, если ДС демонстрирует СлИТ, и бесконечна, если ДС демонстрирует ИТ* [44].

3. Турбулентность в краевых задачах. Сейчас не вызывает удивления появление хаоса и разного рода фрактальных объектов в тех или иных областях естествознания, в том числе и в теории эволюционных задач, задаваемых как обычными дифференциальными уравнениями, так и УЧП. Однако в случае УЧП (ввиду бесконечномерности задачи) можно и, более того, необходимо (!) говорить не только о сложной динамике переходов между мгновенными состояниями системы (как для обычных дифференциальных уравнений), но и о сложном „внутреннем" устройстве самих состояний в каждый момент времени. Именно, усложнение „внутреннего" строения состояний с возрастанием времени и может приводить к пространственно (!) -временной хаотизации системы (турбулентности в широком смысле).

Эволюционные КЗ для УЧП, как правило, индуцируют на пространстве начальных состояний бесконечномерные динамические системы сдвигов вдоль решений. Для уравнений параболического типа (классический представитель — уравнение Навье – Стокса) аттракторы соответствующих ДС[6] обычно являются

[5] При этом эволюция турбулентности с возрастанием λ происходит в соответствии с известной моделью бифуркаций удвоения периода.

[6] В теории диссипативных систем под аттрактором обычно понимается наименьшее замкнутое множество в фазовом пространстве, содержащее ω-предельные множества всех траекторий системы.

конечномерными подмножествами фазового пространства. Совершенно другая ситуация имеет место, когда речь идет о КЗ для уравнений гиперболического типа, которые мы как раз и будем рассматривать. Фазовые пространства ДС, индуцированных такими задачами, обычно являются некомпактными, в результате чего ДС вообще не имеют аттрактора в фазовом пространстве. В этом случае для исследования асимптотической динамики КЗ следует воспользоваться методикой, предложенной в предыдущем пункте. Это, в частности, позволяет строить для широких классов эволюционных краевых задач теорию идеальной турбулентности, основанную на существовании аттракторов с простой динамикой (когда аттрактор состоит из неподвижных точек и циклов), но с очень сложной внутренней структурой самих „точек" (!) аттрактора — элементов определенных функциональных пространств[7].

Естественно говорить, что *в краевой задаче имеет место турбулентность,* если соответствующая ей ДС демонстрирует турбулентность.

Приведем несколько примеров. Рассмотрим простейшую краевую задачу

$$w_t - w_x = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{7}$$

$$w(1,t) = f(w(0,t)), \quad f \text{ — } C^1\text{-функция.} \tag{8}$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид $w(x,t) = u(x+t)$, u — произвольная C^1-функция. Подставляя эту формулу в краевое условие (8), получаем *разностное уравнение с непрерывным аргументом* (НРУ)

$$u(\tau+1) = f(u(\tau)), \quad \tau \in \mathbb{R}^+. \tag{9}$$

Каждое начальное условие $w(x,0) = \varphi(x)$ при $x \in [0,1]$ (φ — C^1-функция) порождает начальное условие $u(\tau) = \varphi(\tau)$ при $\tau \in [0,1)$ для уравнения (9). Соответствующие этим начальным условиям решения задачи (7), (8) и уравнения (9) обозначим $w_\varphi(x,t)$ и $u_\varphi(\tau)$ соответственно. Решение $u_\varphi(\tau)$ можно представить в виде

$$u_\varphi(\tau) = f^n(\varphi(\{\tau-n\})), \quad n \le \tau < n+1, \quad n = 0, 1, \ldots \,. \tag{10}$$

Тогда соответствующее решение $w_\varphi(x,t)$ принимает вид

$$w_\varphi(x,t) = f^{[t+x]}\big(\varphi(\{t+x\})\big), \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{11}$$

где $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ — целая и дробная части числа. В частности, $w(x,n) = f^n(\varphi(x))$. Таким образом, свойства решений и уравнения (9), и задачи (7), (8) тесно связаны со свойствами дискретного разностного уравнения $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, или, иначе, со свойствами динамической системы, задаваемой отображением $u \mapsto f(u)$.

Как уже отмечалось, при исследовании асимптотического поведения решений краевых задач обычно бывает удобным перейти к динамической системе сдвигов вдоль решений (на пространстве начальных состояний). Для задачи (7), (8) соответствующая ДС сдвигов имеет вид

$$S^t\colon\ \varphi(x) \mapsto f^{[t+x]}\big(\varphi(\{t+x\})\big), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \text{в частности,} \quad S[\varphi] = f \circ \varphi. \tag{12}$$

ДС (12) является непрерывным аналогом рассмотренной ранее дискретной ДС (6), и для нее также является правильным приведенный выше критерий турбулентности.

[7] Этот сценарий является в некотором смысле альтернативой „привычным" сценариям хаоса, которые основываются на существовании аттракторов со сложной динамикой (странных аттракторов).

Аналогичная ситуация имеет место для волнового уравнения и родственных ему уравнений. Типичным примером является краевая задача

$$w_{tt} - w_{xx} = 0, \qquad x \in [0, 1], \tag{13}$$

$$w(0, t) = 0, \qquad w_t(1, t) = h(w_x(1, t)), \tag{14}$$

где h — C^1-функция, определенная на действительной прямой. Каждое начальное условие

$$w(x, 0) = \varphi(x), \qquad w_t(x, 0) = \psi(x) \tag{15}$$

определяет траекторию в фазовом пространстве динамической системы сдвигов, ассоциируемой с задачей (13), (14). Оператор сдвига на этом пространстве определяется следующим образом:

$$S^t[(\varphi, \psi)](x, t) = \left(w_{\varphi,\psi}(x, t), \frac{\partial w_{\varphi,\psi}(x, t)}{\partial t} \right), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \tag{16}$$

где $w_{\varphi,\psi}(x, t)$ — решение краевой задачи с начальными условиями (15). Исходя из общего решения уравнения (13)

$$w(x, t) = u(t + x) + v(t - x), \qquad u, v \text{ — произвольные } C^1\text{-функции},$$

и краевого условия (14), можно получить представление оператора (16) через итерации некоторого одномерного отображения $f: u_n \mapsto u_{n+1}$. Соответствующие выкладки (см., например, [23, 29]) просты, но слишком громоздки, чтобы приводить их здесь, поэтому ограничимся конечным результатом: упомянутое отображение f задается неявно формулой

$$u_{n+1} - u_n = h(u_n + u_{n+1}).$$

Если краевое условие (14) заменить условием $w(0, t) = 0$, $w_x(1, t) = h(w_x(0, t))$, то придем к двумерному отображению, задаваемому формулой $u_{n+1} - u_{n-1} = h(u_n)$.

Существует много других классов одно- и многомерных КЗ, асимптотическая динамика которых определяется одно- или маломерным отображением интервала, которое естественно назвать *управляющим отображением* соответствующей КЗ. Для таких КЗ имеет место ситуация, аналогичная рассмотренной в первом примере: исходя из свойств управляющего отображения, можно формулировать условия реализации в КЗ турбулентности того или иного типа.

Приведем в качестве еще одного примера электрическую цепь с распределенными параметрами — так называемую цепь Чуа с запаздыванием, содержащую туннельный диод Чуа [11, 30, 31, 38, 39]. При некоторой идеализации эта цепь моделируется краевой задачей

$$v_x = -Li_t, \qquad i_x = -Cv_t, \qquad 0 \le x \le l, \qquad t \in \mathbb{R}^+, \tag{17}$$

$$v(0, t) = 0, \qquad i(l, t) = G(v(l, t) - E - Ri(l, t)). \tag{18}$$

Здесь $v(x, t)$ и $i(x, t)$ — напряжение и ток вдоль линии, L и C — удельные индуктивность и емкость, R — сопротивление; вольт-амперная характеристика для диода Чуа симметрична относительно $v = E$ и задается некоторой кусочно-линейной функцией $G(z)$.

Решение уравнений (17) при условии $v(0, t) = 0$ имеет вид

$$v(x, t) = \alpha(t - x/\nu) - \alpha(t + x/\nu), \tag{19}$$

$$i(x, t) = (1/Z)\big(\alpha(t - x/\nu) + \alpha(t + x/\nu)\big),$$

где $\nu = \sqrt{1/LC}$, $Z = \sqrt{L/C}$, α — произвольная функция. Вводя новые переменные $\tau = (\nu t/l - 1)/2$, $u(\tau) = \alpha(2l\tau/\nu)$ и подставляя (19) во второе из краевых условий (18), получаем для $u(\tau)$ разностное уравнение с непрерывным аргументом

$$u(\tau + 1) + u(\tau) = F\big(u(\tau) - u(\tau + 1)\big), \qquad \tau \geq -1, \tag{20}$$

где $F(z) = Z \cdot G((1 - R/Z)z - E)$.

Итак, асимптотическое поведение решений КЗ определяется одномерным отображением — управляющим отображением $f\colon u_n \mapsto u_{n+1}$, которое задается неявно формулой

$$u_{n+1} + u_n = F(u_n - u_{n+1}).$$

Используя (19), можно выразить оператор сдвига S^t, задающий ДС для задачи (17), (18), через итерации управляющего отображения.

Если функция $G(z)$ является кусочно-линейной, как в случае диода Чуа, то обычно существует область значений параметров КЗ, где управляющее отображение f имеет инвариантный интервал, на котором f эквивалентно отображению

$$g\colon u_n \mapsto \begin{cases} p(u_{n+1} - a) + 1, & u_n \in [0, a], \\ q(1 - u_{n+1}), & u_n \in (a, 1], \end{cases} \text{ с некоторыми } p > 0,\ q > 1,\ a = 1 - 1/q. \tag{21}$$

Для любого целого $m \geq 2$ отображение g имеет притягивающий цикл периода m тогда и только тогда, когда параметры (p, q) удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^{m-2} p^{-i} \leq q < p^{-m+1}.$$

При других значениях параметров (p, q) из области $\{0 < p < 1\}$ отображение g имеет гладкую инвариантную меру. В этих случаях, применив критерий турбулентности, можем заключить следующее.

Если при некоторых значениях параметров краевой задачи (17), (18) *управляющее отображение* f *эквивалентно на каком-то интервале отображению* (21) *с параметрами* $(p, q) \in \{0 < p < 1\}$, *то в КЗ имеет место*:

1) *ИТ* (*без СтИТ*), *если* g *имеет притягивающий цикл периода* $m > 2$;
2) *СтИТ — в противном случае.*

Это утверждение конкретизировано в [31] для случая диода Чуа.

4. Математические механизмы идеальной турбулентности. Если КЗ индуцирует бесконечномерную ДС сдвигов, динамика которой определяется некоторым (управляющим) отображением интервала, то теория одномерных отображений позволяет понять, почему и как в КЗ возникает и развивается турбулентность, и предложить сценарии *явления самоорганизации* и *явления автостохастичности*. Наиболее подходит для пояснений задача (7), (8) с квадратичной нелинейностью $f\colon I \to I$, I — ограниченный замкнутый интервал.

Основным фактором *идеальной турбулентности* является сложная топологическая структура множества, образованного точками неустойчивых траекторий управляющего отображения f. Это множество называем разделителем отображения f и обозначаем $\mathcal{D}(f)$. Разделитель обладает свойством локального самоподобия в точках отталкивающих циклов и в их прообразах. В случае, когда f имеет цикл периода, отличного от степени 2, это приводит к тому, что „box-counting” размерность разделителя $\mathcal{D}(f)$ оказывается положительной. Тогда график каждого решения $w_\varphi(x, t)$, оставаясь гладкой поверхностью, становится с возрастанием t все более и более близким к некоторой фрактальной поверхности, „box-counting" размерность которой больше 2. Это в свою очередь инициирует (и объясняет) развитие в задаче ИТ.

Каскадный процесс возникновения структур в решениях КЗ непосредственно связан со сложной топологической и динамической организацией бассейнов притягивающих циклов управляющего отображения f. Как правило, бассейн представим в виде $\bigcup_{i\geq 0} B_i$, где B_0 — область непосредственного притяжения соответствующего цикла, $B_1 = f^{-1}(B_0)\setminus B_0$ и $B_i = f^{-1}(B_{i-1})$, $i \geq 2$. При этом граничные точки бассейна принадлежат разделителю $\mathcal{D}(f)$. Очевидно, что $B_{i'} \bigcap B_{i''} = \varnothing$, если $i' \neq i''$, и каждое множество B_i является объединением конечного числа непересекающихся интервалов B_{ij} (возможно, $B_i = \varnothing$, начиная с некоторого $i = i_0 > 0$).

Пусть $m(B_i)$ — число интервалов B_{ij} (компонент связности) множества B_i. Если m — период притягивающего цикла, то $m(B_0) = m$. Предположим, для $B_{i'j'}$ и $B_{i''j''}$, $i' < i''$, имеет место равенство $f^{i'}(B_{i'j'}) = f^{i''}(B_{i''j''})$ и, кроме того, отображения $f^{i'}\big|_{B_{i'j'}}$, $f^{i''}\big|_{B_{i''j''}}$ являются взаимно однозначными. Если начальное состояние $\varphi(x)$ таково, что $\varphi(D) \supset B_{i'j'} \bigcup B_{i''j''}$, то для любого $t_* > 0$ решение $w_\varphi(x, t)$ „вычерчивает" одну и ту же „картинку" (структуру) над областью $D_{i'j'} = \varphi^{-1}(B_{i'j'})$ в момент времени $t = t_* + i'$ и над областью $D_{i''j''} = \varphi^{-1}(B_{i''j''})$ в момент времени $t = t_* + i''$. В этом случае естественно говорить, что *решение* $w_\varphi(x, t)$ *продуцирует когерентные структуры над областями* $D_{i'j'}$, $D_{i''j''} \subset D$. Поскольку $\operatorname{diam} B_{ij} \to 0$ при $i \to \infty$, масштабы структур, продуцируемых в момент t, убывают к нулю при $t \to \infty$. Если $m \neq 2^i$, $i = 0, 1, \ldots$, то между любыми интервалами $B_{i'j'}$ и $B_{i''j''}$, $i' \neq i''$, найдется интервал $B_{i_*j_*}$ $i_* > i', i''$. Описанный процесс продуцирования структур является каскадным, скорость продуцирования структур задается величиной $c_i = m(B_{i+1})/m(B_i)$, причем $\log c_i \to \operatorname{ent} f$ при $i \to \infty$, где $\operatorname{ent} f$ — топологическая энтропия f.

Для развития *стохастической турбулентности* принципиальное значение имеют как существование гладкой эргодической инвариантной меры (и. м. э. г.) управляющего отображения, так и тот факт, что для отображений интервала наличие и. м. э. г. не является исключительной ситуацией: для широких классов отображений, зависящих от параметра, упомянутая ситуация реализуется на множестве параметров положительной меры Лебега [1, 10, 49]. В частности, когда у квадратичного отображения $f: I \to I$ существует и. м. э. г., то на носителе меры отображение f обладает чувствительной зависимостью от начальных данных и, более того, траектория почти каждой точки $z \in I$ восстанавливает меру: время пребывания траектории в множестве $A \subset I$ совпадает с мерой этого множества. Вследствие (12) такая *временна́я стохастичность* траекторий управляющего отображения f трансформируется в *пространственно-временную стохастизацию* решений КЗ и порождает СтИТ посредством каскадных процессов „рождения и разрушения" структур вплоть до структур бесконечно малых масштабов.

5. Заключение. Выше в общих чертах изложен развитый авторами подход к анализу турбулентных колебаний, описываемых нелинейными КЗ для УЧП. Этот подход основывается на методе перехода к ДС сдвигов вдоль решений, индуцируемой КЗ на пространстве начальных состояний. Метод перехода к ДС довольно широко применяется в теории эволюционных задач, главным образом диссипативных (см., например, [2, 7]). В общей ситуации, когда ДС сдвигов является недиссипативной (!), применение этого метода наталкивается на существенные трудности, обусловленные некомпактностью фазового пространства ДС — некоторого пространства гладких (вектор-) функций. В частности, аттрактор системы нельзя описать, оставаясь в исходном фазовом пространстве. И это при том, что именно аттрактор является основным объектом изучения, когда речь идет о выяснении того, как процессы, имеющие явно выраженный случайный характер, можно объяснить в рамках детерминистического описания.

Предложенный подход развивает методику решения этой проблемы — „выход" в более широкое функциональное пространство (с метрикой, отличной от обычной sup-метрики) и построение в этом новом пространстве аттрактора ДС (и соответствующей КЗ). В качестве расширенных пространств предлагаются пространство полунепрерывных сверху функций и пространство случайных функций, наделенные специальными метриками (позволяющими вложить исходное пространство гладких функций в соответствующее расширенное пространство). Исходя из такой схемы, описан „бесконечномерный" сценарий идеальной турбулентности, при котором хаотизация системы обусловлена сложным устройством „точек" аттрактора — элементов расширенного функционального пространства, при этом динамика на само́м аттракторе совершенно простая — аттрактор состоит из периодических и/ или почти периодических траекторий (см. [22, 33, 40, 43, 44]). Этот сценарий, в частности, объясняет *самостохастизацию полностью детерминированной КЗ,* когда на больших временах поведение решений асимптотически точно описывается случайными процессами.

Этот общий подход весьма эффективно применим к КЗ, которые сводятся к РНУ или близким к ним уравнениям (несколько тому примеров приведено выше). Как правило, такая редукция становится возможной, если известна формула общего решения соответствующего УЧП. В этом смысле наиболее „плодовитыми" являются уравнения гиперболического типа: уже линейные гиперболические уравнения в сочетании с нелинейными краевыми условиями приводят к большому разнообразию НРУ [40, 44]. Хотя примеры такого рода сводимых КЗ известны довольно давно (см., в частности, [4, 5, 14]), метод сведения не привлек серьезного внимания специалистов. Основных причин, по-видимому, две: во-первых, действительно результативным этот метод стал сравнительно недавно — благодаря развитию качественной теории НРУ, и, во-вторых, достижения теории НРУ известны, к сожалению, недостаточно широко.

По нашему мнению, применение предложенного подхода при исследовании разнообразных задач, описывающих сложные колебательные режимы, является относительно простым и весьма эффективным инструментом, который позволяет существенно продвинуться на пути к более глубокому пониманию общих закономерностей реальной турбулентности. Этот подход ожидает как дальнейшего применения к новым классам краевых задач, сводящихся к простейшим разностным уравнениям (с непрерывным аргументом), так и распространения на те задачи, которые сводятся к более сложным уравнениям, например, к дифференциально-разностным, или не являются сводимыми, но близки к сводимым.

Последнее предполагает построение „стандартной" теории возмущений, что, однако, является далеко не стандартной и, вместе с тем, весьма важной задачей, которая, надеемся, привлечет внимание и специалистов по теории асимптотических методов.

1. *Avila A., Lyubich M., de Melo W.* Regular or stochastic dynamics in real analytic families of unimodal maps // Invent. math. – 2003. – **154**. – P. 451 – 550.
2. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. – М.: Наука, 1989. – 296 с.
3. *Born M.* Vorhersagbarkeit in der klassischen Mechanik // Z. Phys. – 1958. – **153**. – S. 372 – 388.
4. *Витт А. А.* К теории скрипичной струны // Журн. техн. физики. – 1936. – **6**, № 9. – С. 1459 – 1479.
5. *Cooke K. L.,Krumme D.* Differential difference equations and nonlinear initial-boundary-value

problems for linear hyperbolic partial differential equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1968. – **24**. – P. 372 – 387.

6. *Крылов Н. С.* Работы по обоснованию статистической физики // Труды АН СССР. – М.; Л., 1950. – 208 с.
7. *Ладыженская О. А.* О нахождении глобального аттрактора для уравнения Навье – Стокса и других уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. – 1987. – **42**, № 6. – С. 25 – 60.
8. *Lukin K. A., Maistrenko Yu. L., Sharkovsky A. N., Shestopalov V. P.* Nonlinear difference equations with two argument deviations in the electro-dynamics problems // Proc. IV Int. Workshop „Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics". – Kyiv: Naukova Dumka, 1989.
9. *Лукин К. А., Майстренко Ю. Л., Шарковский А. Н., Шестопалов В. П.* Метод разностных уравнений в резонаторной задаче с нелинейным отражением // Докл. АН СССР. – 1989. – **309**, № 2. – С. 327 – 331.
10. *Lyubich M.* Almost any real quadratic map is either regular or stochastic // Ann. Math. – 2002. – **156**. – P. 1 – 78.
11. *Maistrenko Yu. L., Maistrenko V. L., Vikul S. I., Chua L. O.* Bifurcations of attracting cycles from time-delayed Chua's circuit // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1995. – **5**, № 3. – P. 653 – 671.
12. *Maistrenko Yu. L., Romanenko E. Yu., Sharkovsky A. N.* Attractors of difference equations and turbulence // Proc. III Int. Workshop „Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics". – Singapore: World Sci. Publ., 1988. – P. 520 – 536.
13. *Milnor J.* On the concept of attractor // Communs Math. Phys. – 1985. – **99**. – P. 177 – 195.
14. *Nagumo J., Shimura M.* Self-oscillation in a transmission line with a tunnel diode // Proc. IEEE. – 1961. – **49**. – P. 1281 – 1291.
15. *Peitgen H. O., Jürgens H., Saupe D.* Chaos and fractals: new frontiers of science. – New York: Springer, 1993. – 984 p.
16. *Romanenko E. Yu.* On attractors of continuous time difference equations // Comput. and Math. Appl. – 1998. – **36**, № 10 – 12. – P. 377 – 390.
17. *Romanenko E. Yu.* Dynamical systems iuced by continuous time difference equations and long-time behavior of solutions // Int. J. Difference Equat. and Appl. – 2003. – **9**, № 3-4. – P. 263 – 280.
18. *Романенко О. Ю.* Динамічні системи, породжувані різницевими рівняннями з неперервним часом // Пр. Укр. мат. конгр. Секц. Динамічні системи. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 94 – 104.
19. *Романенко Е. Ю.* Динамика окрестностей точек при непрерывном отображении интервала // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 11. – С. 534 – 547.
20. *Романенко О. Ю.* Явище автостохастичності в динамічних системах, породжуваних різницевими рівняннями з неперервним аргументом // Там же. – 2006. – **58**, № 7. – С. 954 – 975.
21. *Romanenko E. Yu., Sharkovsky A. N.* Formation of structures and autostochasticity in distributive systems // Proc. IV Int. Workshop „Nonlinear and Turbulent Processes in Physics". – Kiev: Naukova Dumka, 1989. – **2**. – P. 416 – 419.
22. *Романенко О. Ю., Шарковський О. М.* Від одновимірних до нескінченновимірних динамічних систем: ідеальна турбулентність // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 12. – С. 1604 – 1627.
23. *Romanenko E. Yu., Sharkovsky A. N.* From boundary value problems to difference equations: a method of investigation of chaotic vibrations // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1999. – **9**, № 7. – P. 1285 – 1306.
24. *Romanenko E. Yu., Sharkovsky A. N., Vereikina M. B.* Self-structuring and self-similarity in boundary value problems // Ibid. – 1995. – **5**, № 5. – P. 145 – 156.
25. *Romanenko E. Yu., Sharkovsky A. N., Vereikina M. B.* Self-stochasticity in deterministic boundary value problems // Nonlinear Boundary Value Problems. – Donetsk: Inst. Appl. Math. and Mech. NAS Ukraine. – 1999. – **9**. – P. 174 – 184.
26. *Федоренко В. В.* Топологический предел траекторий интервала простейших одномерных динамических систем // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 425 – 430.
27. *Шарковский А. Н.* Колебания, описываемые автономными разностными и дифференциально-разностными уравнениями // Proc. VIII Int. Conf. Nonlinear Oscillations. – Prague: Academia, 1979. – **2**. – P. 1073 – 1078.
28. *Sharkovsky A. N.* "Dry" turbulence // Short Comm. Int. Congr. Math. – Warszawa, 1983. – **10 (12).** – P. 4.
29. *Sharkovsky A. N.* "Dry" turbulence // Proc. Int. Workshop „Nonlinear and Turbulent Processes in Physics". – 1984. – **3**. – P. 1621 – 1626.
30. *Sharkovsky A. N.* Chaos from a time-delayed Chua's circuit // IEEE Trans. Circ. and Syst. – 1993. – **40**, № 10. – P. 781 – 783.

31. *Sharkovsky A. N.* Ideal turbulence in an idealized time-delayed Chua's circuit // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1994. – **4**, № 2. – P. 303 – 309.
32. *Sharkovsky A. N.* Universal phenomena in some infinite-dimensional dynamical systems // Ibid. – 1995. – **5**, № 5. – P. 1419 – 1425.
33. *Sharkovsky A. N.* Iteration of continuous functions and dynamics of solutions for some boundary value problems // Ann. Math. Silesianae (Proc. Int. Conf. Iteration Theory). – 1999. – **13**. – P. 243 – 255.
34. *Шарковський О. М.* Динамічні системи, породжувані крайовими задачами. Ідеальна турбулентність. Комп'ютерна турбулентність // Пр. Укр. мат. конгр. Секц. Динамічні системи. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 125 – 129.
35. *Sharkovsky A. N.* Difference equations and boundary value problems // New Progress in Difference Equations (Proc. Int. Conf. „Difference Equations and Appl." (ICDEA-2001)). – 2004. – P. 3 – 22.
36. *Sharkovsky A. N.* Ideal turbulence: definition // Grazer Math. Berichte (Proc. Int. Conf. Iteration Theory). – 2004. – № 346. – P. 403 – 412.
37. *Sharkovsky A. N.* Ideal turbulence // Nonlinear Dynamics. – 2006. – **44**. – P. 15 – 27.
38. *Sharkovsky A. N., Deregel Ph., Chua L. O.* Dry turbulence and period-adding phenomena from a 1-D map // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1995. – **5**, № 5. – P. 1283 – 1302.
39. *Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., Deregel Ph., Chua L. O.* Dry turbulence from a time delayed Chua's circuit // Syst. and Comput. – 1993. – **3**, № 2. – P. 645 – 668.
40. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с. (Англ. перевод: *Sharkovsky A. N., Maistrenko Yu. L., Romanenko E. Yu.* Difference equations and their applications // Ser. Math. and its Appl. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – **250**. – 358 p.)
41. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu.* Ideal turbulence: attractors of deterministic systems may lie in the space of random fields // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1992. – **2**, № 1. – P. 31 – 36.
42. *Шарковський О. М., Романенко О. Ю.* Автостохастичність: атрактори детермінованих задач можуть містити випадкові функції // Допов. НАН України. – 1992. – № 10. – С. 33 – 39.
43. *Шарковський О. М., Романенко О. Ю.* Асимптотичні властивості розв'язків одного класу граничних задач // Там же. – 1999. – № 3. – С. 43 – 48.
44. *Шарковский А. Н., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и динамические системы, порождаемые некоторыми классами краевых задач // Тр. Мат. ин-та РАН. – 2004. – **244**. – С. 281 – 296.
45. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu.* Turbulence: ideal // Encycl. Nonlinear Sci. / Ed. Alwyn Scott. – New York; London: Routledge, 2005. – P. 955 – 957.
46. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu., Berezovsky S. A.* Ideal turbulence: definition and models // Proc. Int. Conf. „Physics and Control". – Petersburg, 2003. – **1**. – P. 23 – 30.
47. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu., Fedorenko V. V.* One-dimensional bifurcations in some infinite-dimensional dynamical systems and ideal turbulence // Regular and Chaotic Dynamics. – 2006. – **11**, № 2.
48. *Sharkovsky A. N., Sivak A. G.* Universal phenomena in solution bifurcations of some boundary value problems // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**, № 2. – P. 147 – 157.
49. *Jakobson M. V.* Absolutely continuous invariant measure for one-parameter families of one-dimensional maps // Communs Math. Phys. – 1981. – **81**. – P. 39 – 88.

Получено 11.10.2006