УДК 517.956.45

А. Б. Васильева (Моск. ун-т, Россия)

О НЕКОТОРЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА*

We present results obtained in the theory of singular perturbations, in particular, concerning a new section of this theory — the contrast structures of alternating type.

Наведено результати з теорії сингулярних збурень, зокрема, з нового розділу цієї теорії — контрастних структур змінного типу.

1. Некоторые основные понятия. Рассмотрим параболическое уравнение

$$\varepsilon^2(u_{xx} - u_t) = F(u, x, t), \quad 0 < x < 1, \quad -\infty < t < +\infty, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, F — 2π-периодическая функция переменной t, с краевыми условиями

$$u(0, t, \varepsilon) = u^0, \quad u(1, t, \varepsilon) = u^1 \tag{2}$$

и условием 2π-периодичности по переменной t

$$u(x, t, \varepsilon) = u(x, t + 2\pi, \varepsilon). \tag{3}$$

Приведем некоторые известные результаты. Пусть вырожденное уравнение

$$F(u, x, t) = 0 \tag{4}$$

имеет три изолированных корня $\varphi_{-1}(x, t) < \varphi_0(x, t) < \varphi_1(x, t)$ (других корней нет) и

$$F_u\big|_{u=\varphi_i(x,t)} > 0, \quad \text{если} \quad i = -1, 1; \quad F_u\big|_{u=\varphi_0(x,t)} < 0. \tag{5}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tau_0^2} = F(\tilde{u}, 0, t), \quad \tau_0 = \frac{x}{\varepsilon}, \tag{6}$$

в правой части которого $x = 0$ фиксировано, и зададим два вида краевых условий

$$\begin{aligned} 1)\ \ \tilde{u}(0, t) &= u^0, \quad \tilde{u}(+\infty, t) = \varphi_1(0, t), \\ -1)\ \ \tilde{u}(0, t) &= u^0, \quad \tilde{u}(+\infty, t) = \varphi_{-1}(0, t). \end{aligned} \tag{7}$$

Тем самым для уравнения (6) определены две задачи: -1) и 1).

Рассмотрим фазовую плоскость $(\tilde{u}, \tilde{z})$, где $x = 0$ и t — параметр. В силу (5) точки $A(\varphi_{-1}, 0)$ и $C(\varphi_1, 0)$ являются седлами, а точка $B(\varphi_0, 0)$ — центром. Функция F отрицательна при $\tilde{u} < \varphi_{-1}$ и $\varphi_0 < \tilde{u} < \varphi_1$ и положительна при $\varphi_{-1} < \tilde{u} < \varphi_0$ и $\tilde{u} > \varphi_1$.

С изменением t фазовая картина может меняться, и при этом реализуется один из трех типов.

a) Пусть $\displaystyle\int_{\varphi_{-1}}^{\varphi_0} F(u, 0, t)\,du > -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} F(u, 0, t)\,du$.

Тогда через седло C проходят две сепаратрисы, симметричные относительно оси $\tilde{u}$, которые образуют петлю с вершиной в некоторой точке $(u^*, 0)$, где

---

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №05-01-00465 и №04-01-00710).

$\varphi_{-1} < u^* < \varphi_0$. В точке $(u^*, 0)$ положительная ветвь сепаратрисы переходит в отрицательную с вертикальной касательной. В то же время через точку A также проходят две сепаратрисы, симметричные относительно оси $\tilde{u}$, но одна из ветвей остается положительной при $\varphi_{-1} < \tilde{u} < \varphi_1$, а другая — отрицательной.

b) Пусть $\int_{\varphi_{-1}}^{\varphi_0} F(u,0,t)\,du < -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} F(u,0,t)\,du$.

Тогда имеет место аналогичная ситуация с петлей, образуемой двумя сепаратрисами, которые проходят через точку A, и имеющей вершину в точке $(u^{**}, 0)$, $\varphi_0 < u^{**} < \varphi_1$, с двумя сепаратрисами, проходящими через C, ординаты которых имеют разные знаки.

c) Пусть $\int_{\varphi_{-1}}^{\varphi_0} F(u,0,t)\,du = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} F(u,0,t)\,du$.

Тогда на фазовой плоскости имеются две сепаратрисы, соединяющие A и C, для одной из которых $\tilde{u} > 0$, а для другой $\tilde{u} < 0$. Эта фазовая картина называется ячейкой. Во всех трех случаях величина τ_0 возрастает, а величина $\tilde{u}$ возрастает при движении по положительной сепаратрисе и убывает при движении по отрицательной.

Все три случая легко получить из интегралов уравнения (6), которые имеют вид

$$\frac{1}{2}\tilde{z}^2 = \int_{\varphi_{-1}}^{\tilde{u}} F(u,0,t)\,du \tag{8}$$

и

$$\frac{1}{2}\tilde{z}^2 = \int_{\varphi_{+1}}^{\tilde{u}} F(u,0,t)\,du. \tag{9}$$

Интеграл (8) определяет сепаратрисы, проходящие через седло A, а интеграл (9) — сепаратрисы, проходящие через седло C. Описанная фазовая плоскость проиллюстрирована в статьях [1, 2].

Рассматривая описанные фазовые картины, можно сформулировать следующие выводы.

Теорема 1. *Пусть в случае* a) *имеем* $u^0 > u^*$. *Тогда вертикаль* $u = u^0$ *пересекает как сепаратрису, идущую при* $\tau_0 \to \infty$ *в* C, *так и сепаратрису, идущую при* $\tau_0 \to \infty$ *в* A. *Это означает, что существуют как решение* $\tilde{u}_1$ *задачи* (7), 1), *так и решение* $\tilde{u}_{-1}$ *задачи* (7), -1). *Пусть* $u^0 < u^*$. *Тогда вертикаль* $u = u^0$ *пересекает сепаратрису, идущую в* A, *но не пересекает идущую в* C. *Существует только решение задачи* (7), -1), *т. е.* $\tilde{u}_{-1}$.

Пусть в случае b) *имеем* $u^0 > u^{**}$. *Тогда вертикаль* $u = u^0$ *пересекает сепаратрису, идущую в* C, *и не пересекает идущую в* A. *Существует только решение задачи* (7), 1), *т. е.* $\tilde{u}_1$. *Пусть* $u^0 < u^{**}$. *Тогда вертикаль пересекает как сепаратрису, идущую в* A, *так и сепаратрису, идущую в* C. *Следовательно, существуют как решение* $\tilde{u}_{-1}$ *задачи* (7), -1), *так и решение* $\tilde{u}_1$ *задачи* (7), -1).

В случае c) (*ячейка*) *при любых* u^0 *существуют как решение задачи* (7), 1), *так и решение задачи* (7), -1).

***Замечание* 1.** Из теоремы 1 видно, что $u^0 = u^*$ является наименьшим значением u^0, при котором вертикаль $\tilde{u} = u^*$ еще попадает на сепаратрису, входящую в C при $\tau_0 \to \infty$.

Это же можно выразить иначе (такая трактовка понадобится в п. 6). Пусть u^0 фиксировано, а переменная t сдвигает всю фазовую картину. Тогда наибольшее значение φ_0, допускающее попадание вертикали $\tilde{u} = u^0$ на сепаратрису, входящую в C, будет такое, при котором $u^0 = u^*$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{d^2\hat{u}}{d\tau_1^2} = F(\hat{u}, 1, t), \qquad \tau_1 = \frac{x-1}{\varepsilon}, \tag{10}$$

в правой части которого переменная $x = 1$.

Поставим две задачи:

$$\begin{aligned} &1)\ \hat{u}(0,t) = u^1, \qquad \hat{u}(-\infty,t) = \varphi_1(0,t), \\ &-1)\ \hat{u}(0,t) = u^1, \qquad \hat{u}(-\infty,t) = \varphi_{-1}(0,t). \end{aligned} \tag{11}$$

Можно построить такую же фазовую картину, как для уравнения (6), в которой те же стрелочки указывают направление $\tau_1 \to -\infty$, а u^0 заменено на u^1. В этом случае справедлива такая же теорема, как теорема 1, в которой u^0 нужно заменить на u^1. Отдельно ее формулировать не будем, а считаем соединенной с теоремой 1.

Изложенный материал и ссылки на оригинальные работы содержатся в обзорах [1, 2].

2. Чисто погранслойное решение. Рассмотрим два выражения:

$$\varphi_1(x,t) + \Pi^{(1)} + R^{(1)}, \tag{12}$$

$$\varphi_{-1}(x,t) + \Pi^{(-1)} + R^{(-1)}, \tag{13}$$

где
*

$$\Pi^{(1)} = \tilde{u} - \varphi_1(0,t), \qquad \Pi^{(-1)} = \tilde{u} - \varphi_{-1}(0,t), \tag{14}$$

$$R^{(1)} = \hat{u} - \varphi_1(1,t), \qquad R^{(-1)} = \hat{u} - \varphi_{-1}(1,t). \tag{15}$$

Если согласно теореме 1 существуют $\tilde{u}_1,\ \tilde{u}_{-1},\ \hat{u}_1,\ \hat{u}_{-1}$, то существуют и выражения (14), (15).

Рассмотрим $\Pi^{(1)}$ и $R^{(1)}$. Они характеризуются следующими свойствами:

$$\Pi^{(1)}(0,t) = u^0 - \varphi_1(0,t), \qquad \Pi^{(1)}(\infty,t) = 0,$$

$$R^{(1)}(0,t) = u^0 - \varphi_1(1,t), \qquad R^{(1)}(-\infty,t) = 0.$$

Вырожденное решение $\varphi_1(x,t)$ не удовлетворяет краевым условиям (2), а функции $\Pi^{(1)}$ и $R^{(1)}$ на краях $x = 0$ и $x = 1$ соответственно обеспечивают в (12) выполнение краевых условий. По мере удаления от границ функции $\Pi^{(1)}$ и $R^{(1)}$ быстро убывают.

Аналогичную структуру имеет выражение (13). Функции $\Pi^{(k)}$ и $R^{(k)}$, где $k = -1, 1$, называются пограничными функциями.

Теорема 2. *Существуют решения* $u_{(1)}$ *и* $u_{(-1)}$ *задачи* (1) – (3), *для которых выражения* (12) *и* (13) *являются асимптотическими формулами, а именно,*

$$u_{(1)}(x,t,\varepsilon) = \varphi_1(x,t) + \Pi^{(1)} + R^{(1)} + O(\varepsilon), \tag{16}$$

$$u_{(-1)}(x,t,\varepsilon) = \varphi_{-1}(x,t) + \Pi^{(-1)} + R^{(-1)} + O(\varepsilon). \tag{17}$$

Решения $u_{(1)}$ и $u_{(-1)}$ называются чисто погранслойными решениями задачи (1) – (3). Их существование можно доказать методом дифференциальных неравенств (верхних и нижних барьеров, см., например, [3]).

В соответствии с формулой (16) существует решение $u_{(1)}$ задачи (1) – (3), которое на интервале (0, 1) близко к вырожденному решению $\varphi_{-1}(x,t)$, вблизи границы $x = 0$ быстро переходит к значению $\varphi_1(0,t)$. Этот переход описывается пограничной функцией $\Pi^{(1)}$. Вблизи границы $x = 1$ оно быстро переходит к значению $\varphi_1(1,t)$ и описывается пограничной функцией $R^{(1)}$. Формула (17) свидетельствует о существовании аналогичного решения $u_{(-1)}$ задачи (1) – (3). Решения $u_{(1)}$ и $u_{(-1)}$ будем называть также верхним и нижним погранслойными решениями.

Формулы (16) и (17) дают асимптотику решений $u_{(1)}$ и $u_{(-1)}$ с остаточным членом порядка $O(\varepsilon)$. Имеются общий результат (см., например, [2]) об асимптотике $u_{(1)}$ с остаточным членом порядка $O(\varepsilon^{n+1})$:

$$u_{(1)} = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \bar{u}_k^{(1)}(x,t) + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \Pi_k^{(1)}(\tau_0,t) + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k R_k^{(1)}(\tau_1,t) + O(\varepsilon^{n+1}) \qquad (18)$$

и аналогичная асимптотика для $u_{(-1)}$.

Ряд $\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \bar{u}_k^{(1)}(x,t)$ называется регулярным, его члены определяются, как в случае регулярно возмущенных уравнений, непосредственно подстановкой ряда в уравнение (1); главным членом, очевидно, является φ_1. Ряд $\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \Pi_k^{(1)}(\tau_0,t)$ называется левым пограничным рядом, а ряд $\sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k R_k^{(1)}(\tau_1,t)$ — правым пограничным рядом. Члены $\Pi_0^{(1)}$ и $R_0^{(1)}$ совпадают с $\Pi^{(1)}$ и $R^{(1)}$ из формулы (16). Следующие члены определяются более сложным образом. Детально на этом не останавливаемся [2], так как в дальнейшем будем иметь дело только с асимптотикой порядка $O(\varepsilon)$, которая задается формулами (16) и (17).

Фазовая картина с изменением параметра t меняется. Может случиться, что условия существования одного из решений $u_{(1)}$, $u_{(-1)}$ или и того, и другого, о которых говорилось в п. 1, выполняются при всех t. Но может случиться, что, например, в выражении (12) функция $R^{(1)}$, соединяющая u^1 с φ_1, перестает существовать, но продолжает существовать функция $\Pi^{(1)}$, соединяющая u^0 с φ_1. Функция $\Pi^{(1)}$, связанная с решением задачи (7), 1), тоже через некоторое время перестает существовать. Означает ли это, что решение $u_{(1)}$ сразу преобразуется в $u_{(-1)}$?

Не означает. Во-первых, решение $u_{(1)}$ в точке его прекращения и решение $u_{(-1)}$ не являются гладким продолжением друг друга. Во-вторых, разрушение в окрестности $x = 1$ происходит, вообще говоря, не одновременно с разрушением в окрестности $x = 0$.

В действительности, если $u_{(1)}$ разрушается, а $u_{(-1)}$ еще существует, то возникает промежуточное решение, которое естественным образом переводит $u_{(1)}$ в $u_{(-1)}$. Процесс перехода весьма сложен и до сих пор до конца не изучен. Вопрос о переходе будет рассматриваться в п. 6 для одного специального случая.

Чисто погранслойные решения, которые меняют форму от $u_{(1)}$ до $u_{(-1)}$ и наоборот, называются погранслойными решениями переменного типа (ПРПТ). Именно на исследование такого рода решений направлено внимание автора последнее время.

3. Контрастные структуры типа ступеньки. Помимо чисто погранслойных решений могут быть решения и другого вида, а именно контрастные структуры типа ступеньки (КСТС).

Рассмотрим сначала произвольную точку $x^*(t,\varepsilon)$ с предполагаемой асимптотикой вида

$$x^*(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots \tag{19}$$

и возьмем два погранслойных решения: верхнее на отрезке $[0, x^*]$ с левым краевым значением, которое задано в (2), и с правым краевым значением $u(x^*, t) = \varphi_0(x^*, t)$, а также нижнее на отрезке $[x^*, 1]$ с правым краевым значением из (2) и левым краевым значением $u(x^*, t) = \varphi_0(x^*, t)$. Такая составная функция будет непрерывной по x в точке x^*, однако, вообще говоря, не будет гладкой, и ее по этой причине нельзя считать решением задачи (1) – (3).

Найдем такое x^*, чтобы гладкость имела место. В п. 1 были построены функции $\tilde{u}$ и $\hat{u}$, через которые описывались пограничные слои в окрестностях $x = 0$ и $x = 1$. По этому же принципу построим уже не пограничный, а так называемый переходный слой от верхнего решения к нижнему в окрестности x^*. Выполним замену переменных $\tau = (x - x^*(t,\varepsilon))/\varepsilon$, $\eta = t$. Тогда

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{1}{\varepsilon}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\frac{1}{\varepsilon^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{\partial x^*}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 1,\end{gathered} \tag{20}$$

и уравнение (1) в нулевом приближении принимает вид

$$\frac{\partial^2 \breve{u}}{\partial \tau^2} = F(u, x_0(t), t), \qquad \tau = \frac{x - x_0(t)}{\varepsilon}. \tag{21}$$

При этом должны выполняться условия

$$\begin{gathered}\breve{u}(-\infty, x_0(t), t) = \varphi_1(x_0(t), t), \\ \breve{u}(\infty, x_0(t), t) = \varphi_{-1}(x_0(t), t).\end{gathered}$$

По типу формул (8) и (9) можно записать два интеграла:

$$\frac{\breve{z}^2}{2} = \int\limits_{\varphi_1(x_0(t),t)}^{\breve{u}} F(u, x_0(t), t)\,du \tag{22}$$

и

$$\frac{\breve{z}^2}{2} = \int\limits_{\varphi_{-1}(x_0(t),t)}^{\breve{u}} F(u, x_0(t), t)\,du. \tag{23}$$

Интеграл (22) при $\breve{u} = \varphi_0(x_0(t), t)$ дает квадрат производной от верхнего решения в точке x_0, а интеграл (23) — квадрат производной от нижнего решения в той же точке. Чтобы обеспечить гладкость составной кривой, нужно приравнять значения $\breve{z}$, полученные из (22) и (23). Имеем

$$\int\limits_{\varphi_1(x_0(t),t)}^{\varphi_0(x_0(t),t)} F(u, x_0(t), t)\,du = \int\limits_{\varphi_{-1}(x_0(t),t)}^{\varphi_0(x_0(t),t)} F(u, x_0(t), t)\,du.$$

Другими словами, величина $x_0(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$I(x,t) = 0, \tag{24}$$

где

$$I(x,t) = \int\limits_{\varphi_{-1}(x,t)}^{\varphi_1(x,t)} F(u,x,t)\,du.$$

Таким образом, получено уравнение для определения заранее не известного значения $x_0(t)$. При этом значении должно выполняться условие $I_x\big|_{x=x_0(t)} \neq$ $\neq 0$. Тогда составная кривая будет гладкой.

Построенная составная кривая является главным членом асимптотики решения задачи (1) – (3), которое называется КСТС. График составной кривой действительно напоминает ступеньку. Существование такого решения можно доказать методом дифференциальных неравенств и другими методами [2], но для этого надо приведенные здесь рассуждения провести в следующем приближении, на чем здесь детально останавливаться не будем.

Важно отметить, что существование КСТС доказано, если решение уравнения (24) удовлетворяет неравенству

$$0 < x_0(t) < 1. \tag{25}$$

Кроме того, применение метода дифференциальных неравенств связано с дополнительным условием для знака I_x. Кроме КСТС с переходом от верхнего решения к нижнему может быть также КСТС с переходом от нижнего решения к верхнему. При доказательстве требуется, чтобы знак I_x был противоположен знаку I_x при доказательстве существования КСТС с переходом от верхнего решения к нижнему.

В данном пункте мы представили простейший случай КСТС. Могут быть более сложные случаи, например, когда $I_x \equiv 0$ или когда правая часть уравнения (1) как аргумент содержит εu_x и, наконец, случаи большей размерности по пространственной переменной, на чем мы в настоящем обзоре не останавливаемся (см., например, [4]).

4. Усиление влияния по производной t. Рассмотрим уравнение вида

$$\varepsilon^2 u_{xx} - \varepsilon u_t = F(u,x,t), \tag{26}$$

в котором перед u_t вместо множителя ε^2 содержится множитель ε. При исследовании этого случая существенное изменение возникает при нахождении точки перехода $x^*(t,\varepsilon)$. Выполним замену переменных, как в предыдущем пункте при нахождении x^*. Тогда в нулевом приближении, в отличие от (21), получим

$$\frac{\partial^2\breve{u}}{\partial\tau^2} + \frac{\partial\breve{u}}{\partial\tau}\frac{dx_0}{dt} = F(\breve{u}, x_0(t), t). \tag{27}$$

Здесь уже нельзя записать зависимость $\breve{z}$ от $\breve{u}$ в явной форме, как в (22) и (23), и нужен численный расчет.

Однако в некоторых случаях функцию $\breve{z}$ от $\breve{u}$ можно найти элементарно. Пусть, например,

$$F(u, x_0(t), t) = a(u-\varphi_{-1})(u-\varphi_0)(u-\varphi_1), \qquad a > 0,$$

где a, φ_{-1}, φ_0, φ_1 — функции $x_0(t)$. Тогда $\breve{z}(\breve{u})$ можно найти в виде параболы

$$\breve{z} = a(\breve{u}-\varphi_{-1})(\breve{u}-\varphi_1).$$

Подставим это в уравнение (27), перейдя в нем предварительно к переменным $\breve{z}$ и $\breve{u}$, после чего приравняем члены с одинаковыми степенями $\breve{u}$. Тогда получим:

1) $2A^2 = a$,

2) $A^2(\varphi_{-1} + \varphi_1) + A\dfrac{dx_0}{dt} = a\varphi_0$.

Из первого уравнения находим $A = \pm\sqrt{a/2}$, причем знак выбирается в зависимости от того, изучается переход с верхнего решения на нижнее или наоборот. Второе уравнение представляет собой дифференциальное уравнение относительно x_0, и надо искать его периодическое решение. Таким образом, в случае (26) x_0 находится не из алгебраического, а, вообще говоря, из дифференциального уравнения.

5. Контрастные структуры переменного типа (КСПТ). До сих пор говорилось о случаях, когда при наличии t не возникало явлений, сильно отличающихся от тех, которые наблюдались при отсутствии t. О новых явлениях, которые привносит наличие t, упоминалось в п. 1.

Было отмечено, что $x_0(t)$ при изучении КСТС должно удовлетворять неравенству (25). Тогда наличие t не является существенным. Выясним, что будет, если условие (25) опустить.

Описание того, что произойдет, подкрепленное численным расчетом, было дано в [2, 5]. Пусть ступенька движется вправо, и при некотором $t = t_0$ возникает равенство $x_0(t) = 1$. Естественно предположить следующее: правая „полуволна" ступеньки будет сужаться и решение превратится в чисто погранслойное типа $u_{(1)}$. Но из п. 1 известно, что такое погранслойное решение, вообще говоря, не существует сколь угодно долго и при некотором $t > t_0$ правый погранслой разрушается, или, другими словами, происходит срыв с погранслойного решения. Предположим, что на левом конце разрушение пока не происходит.

Пусть срыв имеет место при $t = t_1$. За время от t_0 до t_1 значение $x_0(t)$ не только достигло границы $x = 1$, но и стало больше единицы. При дальнейшем увеличении t в силу периодичности $x_0(t)$ снова возвращается на отрезок $[0, 1]$, и когда происходит срыв в точке t_1, значение $x_0(t_1)$ находится слева от $x = 1$. В такой ситуации при $t = t_1$ возникает быстрое движение — пробег. Это тоже своего рода ступенька, но она уже движется в сторону $x = 0$ с большой скоростью (порядка $1/\varepsilon$).

Имеется дифференциальное уравнение первого порядка, в котором независимой переменной является t, а параметр ε — множителем при производной по t. Из этого уравнения определяется фронт r быстрой ступеньки, т. е. точка, где решение $u(x, t, \varepsilon)$ пересекает ось $u = 0$. Фронт движется в соответствии с теоремой Тихонова для уравнения первого порядка с малым параметром при производной. Движущаяся точка r быстро догоняет $x_0(t)$ и дальше движется по закону $x_0(t)$.

Некоторые принципы определения быстрых ступенек и их фронтов указаны в [5, 6]. В данной статье в п. 6 будет рассмотрен специальный класс уравнений, где за только что изложенным будет сравнительно легко проследить.

Итак, при разборе изменений $u(x, t, \varepsilon)$ наблюдается несколько стадий. Сначала происходит движение ступеньки по закону $x_0(t)$ до точки t_0, где $x_0(t_0) = 1$, далее наступает стадия погранслойного решения (эту стадию принято называть halt). Она длится до момента срыва, после которого наступает быстрая стадия — пробег (эту стадию принято называть run) со скоростью порядка $1/\varepsilon$. После пробега имеет место ступенька, движущаяся, как $x_0(t)$, и т. д.

Хотя здесь описана довольно простая ситуация, ее описание нельзя считать законченным в аналитическом плане. Существуют обширные численные результаты, являющиеся поддержкой гипотез. Имеется ряд статей, где приведены численно-аналитические результаты [2, 5]. В [5] впервые поставлен вопрос о КСПТ, а в обзоре [2] представлены более сложные и разнообразные случаи. Имеются и некоторые новые аналитические результаты. В статье [7] описан весь периодический цикл для уравнения, содержащего в правой части u_x без малого множителя. В работе [6] изучалось движение ступеньки с выходом на периодическое решение в окрестность φ_{-1} или φ_1. Имеются продвижения в аналитическом описании явлений вблизи границы. Наконец, обнаружен класс магнитогидродинамических моделей для описания явлений в галактиках, в которых также встречаются переменные структуры (см., например, [9]).

6. Специальный случай. Рассмотрим специальный случай уравнения (1), по возможности самый простой, с целью наглядно продемонстрировать то, о чем говорилось выше. В последнее время в этом направлении появилось несколько работ (см., например, [8]).

Пусть уравнение имеет вид

$$\varepsilon^2(u_{xx} - u_t) = (u^2 - 1)(u - \Phi(t)). \tag{28}$$

Здесь $\varphi_{-1} = -1$, $\varphi_0 = \Phi$, $\varphi_1 = 1$ и правая часть не зависит от x. Поэтому ступенька, движущаяся по закону $x_0(t)$, не возникает, но появляются решения погранслойного типа. Уравнение (28) рассмотрим с теми же условиями (2), (3). Сохраним обозначения, введенные в п. 1, например $u_{(-1)}$, $u_{(1)}$.

Теоремы 1, 2 из п. 1 остаются в силе. Однако теперь мы будем рассматривать решения, форма которых может резко меняться, о чем упоминалось в конце п. 1, т. е. будем рассматривать ПРПТ.

Специфика уравнения (28) облегчает исследование. Это прежде всего связано с тем, что в уравнении (6), а также (1) можно понизить порядок и получить

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau_0} &= -\sqrt{2}(u-1)\left(\frac{1}{4}(u+1)^2 - \frac{\Phi(t)}{3}(u+2)\right)^{1/2}, \\ \frac{du}{d\tau_0} &= -\sqrt{2}(u+1)\left(\frac{1}{4}(u-1)^2 - \frac{\Phi(t)}{3}(u-2)\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau_1} &= \sqrt{2}(u-1)\left(\frac{1}{4}(u+1)^2 - \frac{\Phi(t)}{3}(u+2)\right)^{1/2}, \\ \frac{du}{d\tau_1} &= \sqrt{2}(u+1)\left(\frac{1}{4}(u-1)^2 - \frac{\Phi(t)}{3}(u-2)\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{30}$$

Задачи (7) и (11) принимают соответственно вид

$$1)\ \tilde{u}(0,t) = u^0, \quad \tilde{u}(+\infty,t) = 1, \qquad -1)\ \tilde{u}(0,t) = u^0, \quad \tilde{u}(+\infty,t) = -1, \tag{31}$$

$$1)\ \hat{u}(0,t) = u^1, \quad \hat{u}(-\infty,t) = 1, \qquad -1)\ \hat{u}(0,t) = u^1, \quad \hat{u}(-\infty,t) = -1. \tag{32}$$

Уравнения первого порядка позволяют определить сепаратрисы, о которых упоминалось в п. 1, в квадратурной форме. Кроме того, из (29) и (30) можно получить явные выражения для наибольшего значения Φ, при котором существует пограничный слой $\Pi^{(1)}$ для решения $u_{(1)}$, и для наименьшего значения Φ, при котором существует пограничный слой $\Pi^{(-1)}$ для решения $u_{(-1)}$, а также аналогичные выражения для пограничных слоев R (см. замечание 1). Соответствующие формулы имеют вид

$$\Phi_{0,1} = \frac{3(u^0+1)^2}{4(u^0+2)}, \qquad \Phi_{1,1} = \frac{3(u^1+1)^2}{4(u^1+2)},$$
$$\Phi_{0,-1} = \frac{3(u^0-1)^2}{4(u^0-2)}, \qquad \Phi_{1,-1} = \frac{3(u^1-1)^2}{4(u^1-2)}. \tag{33}$$

Величины $\Phi_{i,k}$ имеют два индекса, первый из которых указывает на левую границу $x = 0$ или правую $x = 1$, а правый 1 или -1; это индекс того решения, для которого строится пограничный слой. Для получения формулы для $\Phi_{0,1}$ достаточно в (29) положить $\dfrac{du}{d\tau_0} = 0$, $u = u^0$. Точно так же получаем и остальные формулы.

Теперь теорему 1 можно переформулировать так.

Теорема 1′. *Решение задачи* (31), 1) *существует, если* u^0 *удовлетворяет неравенству* $\Phi < \Phi_{0,1}$, *а решение задачи* (32), 1) *существует, если* u^1 *удовлетворяет неравенству* $\Phi < \Phi_{1,1}$.

Решение задачи (31), -1) *существует, если* u^0 *удовлетворяет неравенству* $\Phi > \Phi_{0,-1}$, *а решение задачи* (32), -1) *существует, если* u^1 *удовлетворяет неравенству* $\Phi > \Phi_{1,-1}$.

Формулировка теоремы 2 полностью сохраняется. К изложенному надо добавить, что для уравнений типа (28) справедлива еще одна теорема, а именно, теорема 3.

Запишем сингулярно возмущенное уравнение для величины, которую мы назвали в п. 4 фронтом r:

$$\varepsilon\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2}\,\Phi(t). \tag{34}$$

Теорема 3. *Выражение*

$$u(x,t,\varepsilon) = \frac{1 - \exp\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(x-r)}{1 + \exp\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}(x-r)} \tag{35}$$

является точным решением уравнения (28). *При этом, если* $\varepsilon \to 0$,

$$u(x,t,\varepsilon) \to -1 \ \text{ при } \ x - r > 0, \qquad u(x,t,\varepsilon) = 0 \ \text{ при } \ x = r \ \text{ и}$$
$$u(x,t,\varepsilon) \to +1 \ \text{ при } \ x - r < 0. \tag{36}$$

Формула (34) позволяет вычислить величину пробега, а формула (35), хотя и не претендует на точное описание пробега, дает ориентацию, например позволяет построить барьеры.

Замечания. **2.** Теорема 3 остается справедливой, если в (34) и (35) знак при $\sqrt{2}$ заменить на противоположный, а в (36) заменить -1 на $+1$.

3. Из (34) видно, что скорость фронта имеет порядок $1/\varepsilon$.

Рассмотрим несколько примеров.

***Пример* 1.** Положим в уравнении (28) $\Phi(t) = 0{,}8\sin t$, а в качестве краевых условий возьмем $u^0 = u^1 = 0$. Из формул (33) видно, что $\Phi_{0,1} = \Phi_{1,1} = 3/8$ и $\Phi_{0,-1} = \Phi_{1,-1} = -3/8$. Очевидно, при $t = 0$ решение существует, так как $\Phi(0) = 0 < 3/8$. Разрушение происходит при $t = t_0$, т. е. $0{,}8\sin t_0 = = 3/8$; отсюда получим $t_0 = 0{,}49$. После этого формулы, которыми мы пользовались, отбросив u_t и считая t параметром, не годятся. Надо переходить к параболическому уравнению.

Поскольку скорость фронта имеет порядок $1/\varepsilon$, будем считать, что стадия run протекает мгновенно и возникновение чисто погранслойного решения при u_1 происходит при том же t_0.

Итак, при $t = 0{,}49$ наступает стадия $\mathrm{halt}(-1)$ чисто погранслойного решения возле корня -1. Она разрушается при $\pi + 0{,}49$ и, следовательно, начинается пробег в обратную сторону, и при том же $t = \pi + 0{,}49$ решение выходит на стадию $\mathrm{halt}(1)$, где и заканчивается. Конец имеет условный характер, так как рассмотрение началось при $t = 0$ и закончилось при $t = 2\pi$. Мы считаем, что период равен 2π, хотя это не является твердо установленным фактом. Мы видим, что $\mathrm{halt}(-1)$ имеет продолжительность от $0{,}49$ до $t = 0{,}49 + \pi$, т. е. равную π, а $\mathrm{halt}(1)$ — от 0 до $0{,}49$ и от $\pi + 0{,}49$ до 2π, тоже равную π. В силу симметрии совпадение следовало ожидать.

В приведенном рассуждении мы пользовались только малостью ε и считали пробег мгновенным, но по формуле (34) можно точно рассчитать длину пробега и получить поправки порядка ε к моменту возникновения $\mathrm{halt}(1)$ или $\mathrm{halt}(-1)$.

Воспользуемся формулой (34) в другом аспекте. Построим по формуле (35) с „$-\sqrt{2}$" кривую от $x = 1$ до $x = 0{,}5$, вычислив r по формуле (34) с „$+\sqrt{2}$" при начальном условии $r(0{,}49) = 0$. Точно так же построим по формуле (35) с „$+\sqrt{2}$" кривую от $x = 1$ до $x = 0{,}5$, взяв r из (34) с „$-\sqrt{2}$" при начальном условии $r(0{,}49) = 1$. С увеличением аргумента обе кривые (идущие справа и слева), меняя форму, сближаются, и от 0 до 1 возникает составная кривая с негладким выбросом вверх в окрестности $x = 0{,}5$. С увеличением времени область, где наблюдается выброс вверх, сужается и происходит, как принято говорить, схлопывание. Тем самым возникает близость к решению $u_{(-1)}$. Построенная негладкая кривая, если к ней присоединить вблизи $x = 0$ и $x = 1$ функции $\tilde{u}$ и $\hat{u}$ (в точке присоединения тоже возникает негладкость), может служить верхним барьером для $u_{(-1)}$. В качестве нижнего барьера используется $u = -1$. Для решения $u_{(1)}$ барьеры строятся так же.

Еще раз обратим внимание на то, что все рассуждения из этого пункта являются не строгими, но имеют смысл ориентировочных.

***Пример* 2.** Не меняя исходного уравнения, изменим краевые условия в примере 1, положив $u^0 = 0{,}5$, $u^1 = 0$. Здесь $u^0 > u^1$ и характер движения будет отличаться от того, который имел место в примере 1. Разрушение справа происходит, как и раньше, при $t = 0{,}49$, а разрушение слева — позднее, так как

$$\Phi_{0,1} = \frac{3(0{,}5+1)^2}{4(0{,}5+2)} \simeq 0{,}675.$$

Это число фактически не играет роли, так как пробег, приведший к границе $x = 0$, при $t = 0{,}49$ завершился. Срыв с -1 происходит при

$$\Phi_{0,-1} = \frac{3(0{,}5-1)^2}{4(0{,}5-2)} \simeq -0{,}125,$$

т. е. $t = \pi + 0{,}157$. Длина $\mathrm{halt}(-1)$ равна $\pi + 0{,}157 - 0{,}49$, а длина $\mathrm{halt}(1)$ — $0{,}49 + 2\pi - (\pi + 0{,}157) = \pi + 0{,}49 - 0{,}157$ (сумма этих длин равна 2π, а их разность — $2(0{,}49 - 0{,}157) \neq 0$).

Из примеров следует важный вывод. Меняя краевые условия u^0 и u^1, можно изменять продолжительности состояний $\mathrm{halt}(1)$ и $\mathrm{halt}(-1)$ в желаемом отношении или даже удалить одно из состояний. Появляется возможность таким образом влиять на переменный процесс, т. е. управлять решениями типа КСПТ.

***Пример* 3.** Рассмотрим случай, когда краевые значения находятся вне отрезка $[0, 1]$, т. е. вне корней вырожденного уравнения. Пусть $u^0 = u^1 = 1{,}5$. Нетрудно видеть, что $u_{(1)}$ не разрушается, хотя при $\Phi = 0$ разрушается $u_{(-1)}$, т. е. когда возникает ячейка, исчезает $u_{(-1)}$ и остается только решение $u_{(1)}$.

Этот пример свидетельствует о том, что посредством управления можно избавиться от того решения, которое по ряду причин часто считается нежелательным. Это может представлять интерес в прикладных задачах, например в задачах биологической кинетики.

В книге [9, с. 417] приведено более сложное уравнение, чем рассмотренное в примере 3, но имеющее аналогичные свойства

$$\varepsilon^2(u_{xx} - u_t) = -u[(r - su) - p(u)], \qquad p(u) = \frac{u}{1+u^2}.$$

Краевые условия заданы в виде $u^0 = u^1 = \delta > 0$. Вырожденное уравнение имеет корни $0 < u_1 < u_2 < u_3$.

Как оказывается, управляя параметром s, можно добиться исчезновения одного из решений, в данном случае наибольшего. Это происходит, как и в примере 3, при наличии ячейки, существование которой нетрудно получить, вычислив несколько несложных квадратур.

В заключение еще раз отметим, что данная статья не претендует на исчерпывающий анализ всех случаев периодических решений сингулярно возмущенных задач типа (1) – (3). Главное внимание направлено на явления, обусловленные так называемыми КСПТ, т. е. решениями, которые резко меняют форму в окрестности определенных моментов времени. КСПТ еще мало изучены, и в основном приходится проводить численно-аналитические исследования, которые базируются на „опорных” теоремах (некоторые из этих теорем приведены выше).

Усилия по изучению контрастных структур переменного типа помимо чисто теоретического интереса помогают при исследованиях ряда прикладных задач, важных для практики. В частности, для задач, являющихся задачами КСПТ, разработаны методы управления формой возникающих периодических процессов.

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундам. и прикл. математика. – 1998. – **4**, № 3. – С. 799 – 851.
2. *Васильева А. Б.* Контрастные структуры переменного типа // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил. – 2002. – **109**.
3. *Нефедов Н. Н.* Асимптотический метод дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур: существования, асимптотики и устойчивости // Дифференц. уравнения. – 2000. – **36**, № 7. – С. 932 – 943.
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* Асимптотическая теория контрастных структур // Науч. конф. „Ломоносовские чтения”. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2002. – С. 33 – 45.
5. *Васильева А. Б., Петров А. П., Плотников А. А.* Теория контрастных структур переменного типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1998. – **38**, № 9. – С. 1471 – 1480.
6. *Nefedov N. N., Radziunas M., Schneider K. R., Vasilieva A. B.* Change of the type of contrast structures in parabolic Neumann problems // Там же. – 2005. – **45**, № 1. – С. 41 – 45.
7. *Васильева А. Б., Омельченко О. Е.* Контрастные структуры переменного типа в квазилинейных параболических уравнениях // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 10. – С. 1358 – 1373.
8. *Vasil’eva A. B., Kalachev L. V.* Singularly perturbed parabolic equations with alternating boundary layer // Abstrs and Appl. Anal. – 2000. – **2006**. – P. 1 – 21.
9. *Murray J. D.* Mathematical biology. Biomathematics. – New York: Springer, 1993. – **19**.

Получено 13.11.2006