УДК 517.929

А. М. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ),
Р. І. Петришин, І. М. Данилюк (Чернів. нац. ун-т)

УСЕРЕДНЕННЯ ПОЧАТКОВОЇ І БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧ ДЛЯ КОЛИВНИХ СИСТЕМ ІЗ ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ЧАСТОТАМИ І ВІДХИЛЕНИМ АРГУМЕНТОМ

New theorems on substantiation of the method of averaging over all fast variables on a segment and a semiaxis are proved for multifrequency systems with deviated argument in slow and fast variables. An algorithm for the solution of a multipoint problem with parameters is investigated and an estimate for the difference of solutions of the original and averaged problems is obtained.

Доказаны новые теоремы обоснования метода усреднения по всем быстрым переменным на отрезке и полуоси для многочастотных систем с отклоненным аргументом в медленных и быстрых переменных. Исследован алгоритм решения многоточечной задачи с параметрами и установлена оценка разности решений исходной и усредненной задач.

Метод усереднення виявився плідним при дослідженні диференціальних рівнянь у різних функціональних просторах. Для багатоточкових систем звичайних диференціальних рівнянь, яким властиве явище резонансу, і таких же систем з імпульсною дією цей метод і його застосування до розв'язання крайових задач досить повно обґрунтовано в монографії [1]. У випадку багаточастотних систем із запізненням різні схеми усереднення вивчались у працях [2 – 5], а усереднення крайових задач для рівнянь з перетвореним аргументом — у [6, 7]. Аналогічні питання досліджувались також у роботах [8, 9]. У даній статті одержано нові оцінки похибки методу усереднення за всіма швидкими змінними на відрізку та півосі в коливних системах з повільно змінними частотами і відхиленим аргументом та досліджено їх використання для побудови розв'язку однієї багатоточкової задачі з параметрами.

Розглянемо систему $n+m$ диференціальних рівнянь із відхиленим аргументом вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \tau), \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \tau), \tag{1}$$

де $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \le \varepsilon_0 << 1$ — малий додатний параметр, $x = x(\tau,\ \varepsilon) \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi = \varphi(\tau, \varepsilon) \in \mathbb{R}^m$, $x_\lambda = x(\lambda(\tau), \varepsilon)$, $\varphi_\lambda = \varphi(\lambda(\tau), \varepsilon)$, $\lambda = \lambda(\tau)$ — неперервно диференційовна на $[0, L]$ функція, яка задовольняє умови

$$\begin{gathered}\lambda(\tau) < \tau, \quad \lambda(0) = -\Delta < 0, \quad 0 < \sigma_1^{-1} < \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} < \sigma_1 = \text{const}, \\ \lambda(\tau_0) = 0, \quad \tau_0 \in (0, L),\end{gathered} \tag{2}$$

D — відкрита обмежена область, дійсні функції a і b задовольняють умову Ліпшиця по x, x_λ, φ, φ_λ в області $G = D^2 \times R^{2m} \times [0, L]$, обмежені сталою σ_1 і належать певним класам майже періодичних по φ, φ_λ функцій.

Задамо для (1) початкову умову

$$x(\tau, \varepsilon) = f(\tau, \varepsilon), \qquad \varphi(\tau, \varepsilon) = g(\tau, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \Omega(t)\,dt, \quad \tau \in [-\Delta, 0], \tag{3}$$

в якій функції f і g є неперервно диференційовними по τ і

$$\left\|\frac{df(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\right\| + \left\|\frac{dg(\tau,\varepsilon)}{d\tau}\right\| \le \sigma_1, \qquad \tau \in [-\Delta, 0], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{4}$$

Тут і далі під нормою вектора розуміємо евклідову норму, а норма матриці узгоджена з евклідовою нормою вектора.

Нехай

$$\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau)) \in C^{p-1}_{[0,L]},$$
$$\Omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau)) \in C^{p-1}_{[-\Delta,0]}, \quad \lambda(\tau) \in C^{p}_{[0,L]} \tag{5}$$

при деякому $p \geq 2m$ і позначимо через $\overline{A}(\tau)$, $\underline{A}(\tau)$ і $\underline{B}(\tau)$ $(p \times m)$-вимірні матриці

$$\overline{A}(\tau) = \left(\frac{d^{l-1}}{d\tau^{l-1}} \omega_\nu(\tau)\right)_{l,\nu=1}^{p,m}, \quad \tau \in [0, L],$$

$$\underline{A}(\tau) = \left(\frac{d^{l-1}}{d\tau^{l-1}}\left(\omega_\nu(\lambda(\tau))\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}\right)\right)_{l,\nu=1}^{p,m}, \quad \tau \in [\tau_0, L],$$

$$\underline{B}(\tau) = \left(\frac{d^{l-1}}{d\tau^{l-1}}\left(\Omega_\nu(\lambda(\tau))\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}\right)\right)_{l,\nu=1}^{p,m}, \quad \tau \in [0, \tau_0],$$

а через $A(\tau)$ і $B(\tau)$ матриці виміру $p \times 2m$:

$$A(\tau) = (\overline{A}(\tau)\ \underline{B}(\tau)), \quad \tau \in [0, \tau_0],$$
$$B(\tau) = (\overline{A}(\tau)\ \underline{A}(\tau)), \quad \tau \in [\tau_0, L].$$

Припустимо, що

$$\det(A^T(\tau)\ A(\tau)) > 0, \quad \tau \in [\tau_0, L],$$
$$\det(B^T(\tau)\ B(\tau)) > 0, \quad \tau \in [0, \tau_0]. \tag{6}$$

Розглянемо далі осциляційний інтеграл [1]

$$I_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon) = \int_{\bar{\tau}}^{\tau} F(t) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int_{\bar{t}}^{t}(k, \tilde{\omega}(l))\,dl\right\}dt,$$

в якому $\tau \in [0, L]$, $\bar{\tau} \in [0, L]$, $\bar{t} \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, k — ненульовий $2m$-вимірний вектор, $i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця, $\tilde{\omega}(\tau)$ — $2m$-вимірний вектор з координатами

$$\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau), \Omega_1(\lambda(\tau))\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}, \ldots, \Omega_m(\lambda(\tau))\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}$$

при $\tau \in [0, \tau_0]$ і

$$\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau), \omega_1(\lambda(\tau))\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}, \ldots, \omega_m(\lambda(\tau))\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}$$

при $\tau \in (\tau_0, L]$, $(k, \tilde{\omega})$ — скалярний добуток в R^{2m}, F — задана на $[0, L]$ вектор-функція.

Лема 1. *Якщо виконуються нерівності* (6) *і* $F(\tau)$ *має на* $[0, L]$ *кусково-неперервну похідну, то існують такі додатні сталі* ε_1 *і* σ_0, *не залежні від* τ, $\bar{\tau}$, $\bar{t}$, k, ε *і* F, *що*

$$\| I_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon)\| \leq \sigma_0 \varepsilon^{1/p}\left[\left(1 + \frac{1}{\|k\|}\right)\sup_{[0,L]}\|F(\tau)\| + \frac{1}{\|k\|}\sup_{[0,L]}\left\|\frac{dF(\tau)}{d\tau}\right\|\right] \tag{7}$$

для всіх $\tau \in [0, L]$, $\bar{\tau} \in [0, L]$, $\bar{t} \in [0, L]$, $k \neq 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$.

Якщо ж $F(\tau)$ *є кусково-гельдеровою на* $[0, L]$ *з показником* $\alpha \in (0, 1]$ *і сталою Гельдера* $\tilde{\sigma}_0$, *то*

$$\| I_k(\tau, \bar{\tau}, \bar{t}, \varepsilon) \| \le \sigma_0^1 \varepsilon^{1/p(\alpha+1)} \left[\left(\frac{1}{\|k\|} + \frac{1}{\sqrt[p]{\|k\|}} \right) \sup_{[0,L]} \| F(\tau) \| + \tilde{\sigma}_0 \right]. \tag{8}$$

Доведення. На підставі нерівностей (6) оцінку (7) одержано у монографії [1, с. 18]. Доведемо оцінку (8). Згідно з означенням кусково-гельдерової функції [10, с. 340] відрізок $[0, L]$ можна розбити на скінченне число відрізків точками $\bar{\tau}_0 = 0 < \bar{\tau}_1 < \ldots < \bar{\tau}_{n_0} = L$ і на кожному з відрізків $[\bar{\tau}_r, \bar{\tau}_{r+1}]$ функція F задовольняє нерівність

$$\| F(\tau') - F(\tau'') \| \le \tilde{\sigma}_0 |\tau' - \tau''|^\alpha, \qquad \tau', \tau'' \in [\bar{\tau}_r, \bar{\tau}_{r+1}], \quad r = \overline{0, n_0 - 1}.$$

При цьому під значеннями функції на кінцях відрізка розуміємо граничні значення $F(\bar{\tau}_r + 0)$ і $F(\bar{\tau}_{r+1} - 0)$. Нехай $[\bar{\tau}_r, \bar{\tau}_{r+1}] \subset [\bar{t}, \tau]$. Виберемо досить мале додатне число h, яке означимо нижче, і подамо $[\bar{\tau}_r, \bar{\tau}_{r+1}]$ у вигляді

$$[\bar{\tau}_r, \bar{\tau}_{r+1}] = \bigcup_{\nu=0}^{q} [\tilde{\alpha}_\nu, \tilde{\alpha}_{\nu+1}],$$

де $\tilde{\alpha}_0 = \bar{\tau}_r$, $\tilde{\alpha}_{\nu+1} - \tilde{\alpha}_\nu = h$ при $\nu < q$, $\tilde{\alpha}_{q+1} = \bar{\tau}_{r+1}$, q — ціла частина числа $(\bar{\tau}_{r+1} - \bar{\tau}_r) h^{-1}$, $q \le L h^{-1}$. Тоді

$$\int_{\bar{\tau}_r}^{\bar{\tau}_{r+1}} F(t) l_k(t, \bar{t}, \varepsilon) dt = \sum_{\nu=0}^{q} \left[F(\tilde{\alpha}_\nu) \int_{\tilde{\alpha}_\nu}^{\tilde{\alpha}_{\nu+1}} l_k(t, \bar{t}, \varepsilon) dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\tilde{\alpha}_\nu}^{\tilde{\alpha}_{\nu+1}} \big(F(t) - F(\tilde{\alpha}_\nu) \big) l_k(t, \bar{t}, \varepsilon) dt \right],$$

де

$$l_k(t, \bar{t}, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\bar{t}}^{t} (k, \tilde{\omega}(l)) dl \right\}. \tag{9}$$

Враховуючи оцінку осциляційного інтеграла [1, с. 81]

$$\left| \int_{\bar{\tau}}^{\tau} l_k(t, \bar{t}, \varepsilon) dt \right| \le \sigma_0 \varepsilon^{1/p} \left(\frac{1}{\|k\|} + \frac{1}{\sqrt[p]{\|k\|}} \right), \tag{10}$$

яка покращує оцінку (7) при $F(t) \equiv 1$ для випадку $\|k\| \to \infty$, одержуємо нерівність

$$\left\| \int_{\bar{\tau}_r}^{\bar{\tau}_{r+1}} F(t) l_k(t, \bar{t}, \varepsilon) dt \right\| \le 2L \left(\sigma_0 + \frac{1}{\alpha + 1} \right) \left[\varepsilon^{1/p} h^{-1} \left(\frac{1}{\|k\|} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{\sqrt[p]{\|k\|}} \right) \sup_{[0,L]} \| F(t) \| + \tilde{\sigma}_0 h^\alpha \right].$$

Найкращий порядок по ε останньої оцінки буде в тому випадку, коли $h^\alpha = \varepsilon^{1/p} h^{-1}$ або $h = \varepsilon^{1/p(\alpha+1)}$. Звідси випливає нерівність (8) зі сталою $\sigma_0^1 = 2Ln_0(\sigma_0 + (\alpha+1)^{-1})$.

Лему доведено.

Припустимо, що $(n+m)$-вимірна вектор-функція $c(y,\theta,\tau) = \big(a(y,\theta,\tau), b(y,\theta,\tau)\big)$, де $y = (x, x_\lambda)$, $\theta = (\theta,\theta_\lambda)$, належить класу майже періодичних по θ функцій, які розкладаються в рівномірно по θ збіжний ряд Фур'є

$$c(y,\theta,\tau) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s(y,\tau) e^{i(k_s,\theta)}, \tag{11}$$

в якому $k_0 = 0$, $k_s \neq 0$ при $s \geq 1$, (k_s,θ) — скалярний добуток в R^{2m}.

Розглянемо усереднену за всіма швидкими змінними φ, φ_λ систему

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = a_0(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\tau), \qquad \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b_0(\bar{x},\bar{x}_\lambda,\tau), \quad \tau \in [0, L], \tag{12}$$

де

$$\big(a_0(y,\tau), b_0(y,\tau)\big) = c_0(y,\tau) = \lim_{T\to\infty} T^{-2m} \int_0^T \ldots \int_0^T c(y,\theta,\tau)\, d\theta_1 \ldots d\theta_{2m},$$

і відповідну їй початкову умову

$$\bar{x}(\tau,\varepsilon) = f(\tau,\varepsilon), \qquad \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon) = g(\tau,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \Omega(t)\,dt, \quad \tau \in [-\Delta, 0]. \tag{13}$$

У наступній теоремі $x(\tau,\varepsilon)$, $\varphi(\tau,\varepsilon)$ і $\bar{x}(\tau,\varepsilon)$, $\bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)$ позначають розв'язки задач (1), (3) і (12), (13).

Теорема 1. *Нехай*: 1) *крива* $\bar{x} = \bar{x}(\tau,\varepsilon)$ *лежить у* D *разом із своїм* ρ-*околом при* $\tau \in [-\Delta, L]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$; 2) *виконуються умови* (2), (5) *і нерівності* (4), (6); 3) *функція* $c(y,\theta,\tau)$ *має обмежені в* G *сталою* σ_1 *частинні похідні першого порядку по* y, θ, τ, *розкладається в ряд* (11), *причому*

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\|k_s\|}\right)\sup_{G_1}\|c_s(y,\tau)\| + \frac{1}{\|k_s\|}\left(\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial c_s(y,\tau)}{\partial y}\right\| + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sup_{G_1}\left\|\frac{\partial c_s(y,\tau)}{\partial \tau}\right\|\right)\right] \leq \sigma_1, \qquad G_1 = D^2 \times [0, L].$$

Тоді при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ *для всіх* $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *справджується оцінка*

$$\|x(\tau,\varepsilon) - \bar{x}(\tau,\varepsilon)\| + \|\varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\| \leq \sigma_2 \varepsilon^{1/p} \tag{14}$$

зі сталою σ_2, *не залежною від* ε.

Доведення. Із вихідної та усередненої систем для функції $v(\tau,\varepsilon) = \big(x(\tau,\varepsilon) - \bar{x}(\tau,\varepsilon),\ \varphi(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)\big)$ дістаємо нерівність

$$\|v(\tau,\varepsilon)\| \leq \sigma_1 \int_0^\tau \big(\|v(t,\varepsilon)\| + \|v(\lambda(t),\varepsilon)\|\big)dt + \left\|\int_0^\tau \tilde{c}(\bar{y}(t,\varepsilon), \bar{\theta}(t,\varepsilon), t)\,dt\right\|, \tag{15}$$

в якій $\bar{y}(\tau,\varepsilon) = (\bar{x}(\tau,\varepsilon), \bar{x}(\lambda(\tau),\varepsilon))$, $\bar{\theta}(\tau,\varepsilon) = (\bar{\varphi}(\tau,\varepsilon), \bar{\varphi}(\lambda(\tau),\varepsilon))$, $\tilde{c}(y,\theta,\tau) = c(y,\theta,\tau) - c_0(y,\tau)$.

Оскільки $v(\lambda(\tau),\varepsilon) \equiv 0$ при $\tau \leq \tau_0$ і

$$\int_0^\tau \|v(\lambda(t),\varepsilon)\|dt \leq \sigma_1 \int_{-\Delta}^{\lambda(\tau)} \|v(t,\varepsilon)\|dt = \sigma_1 \int_0^{\lambda(\tau)} \|v(t,\varepsilon)\|dt \leq \sigma_1 \int_0^\tau \|v(t,\varepsilon)\|dt,$$

то з (15) одержуємо нерівність

$$\| v(\tau,\varepsilon)\| \;\le\; \sigma_1(1+\sigma_1)\int_0^{\tau}\| v(t,\varepsilon)\|dt \;+\; \sum_{s=1}^{\infty}\left\|\int_0^{\tau} c_s(\bar{y}(t,\varepsilon),t)e^{i(k_s,\psi(t,\varepsilon))}l_{k_s}(t,\tau_0,\varepsilon)dt\right\|, \tag{16}$$

де $\psi(\tau,\varepsilon) = (\tilde{\psi}(\tau,\varepsilon), \underset{\sim}{\psi}(\tau,\varepsilon))$ — $2m$-вимірний вектор,

$$\tilde{\psi}(\tau,\varepsilon) \;=\; g(0,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau_0}\omega(t)dt + \int_0^{\tau} b_0(\bar{x}(t,\varepsilon),\bar{x}(\lambda(t),\varepsilon),t)dt, \quad \tau \ge 0,$$

$$\underset{\sim}{\psi}(\tau,\varepsilon) \;=\; g(\lambda(\tau),\varepsilon), \quad \tau\in[0,\tau_0],$$

$$\underset{\sim}{\psi}(\tau,\varepsilon) \;=\; g(0,\varepsilon) + \int_0^{\lambda(\tau)} b_0(\bar{x}(t,\varepsilon),\bar{x}(\lambda(t),\varepsilon),t)dt, \quad \tau > \tau_0.$$

На підставі припущення 3 теореми 1 і оцінки (7) для

$$F(t) \;=\; c_s(\bar{y}(t,\varepsilon),t)e^{i(k_s,\psi(t,\varepsilon))}$$

із (16) отримуємо

$$\| v(\tau,\varepsilon)\| \;\le\; \sigma_1(1+\sigma_1)\int_0^{\tau}\| v(t,\varepsilon)\|dt \;+\; \sigma_0\sigma_1^2(2+\sigma_1)\varepsilon^{1/p}, \quad (\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0].$$

Звідси з урахуванням нерівності Гронуолла – Беллмана дістаємо оцінку (14) зі сталою $\sigma_2 = e^{\sigma_1(1+\sigma_1)L}\sigma_0\sigma_1^2(2+\sigma_1)$. Мализна числа ε_0 визначається лемою 1 і нерівністю $\sigma_2\varepsilon_0^p \le \rho/2$, яка разом з оцінкою (14) і умовою $\lambda(\tau) < \tau$ гарантує, що розв'язок $x(\tau,\varepsilon)$, $\varphi(\tau,\varepsilon)$ задачі (1), (3) визначено для всіх $\tau\in[-\Delta, L]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Теорему доведено.

Відмовимось тепер від припущення 3 теореми 1 і вважатимемо, що функція $c(y,\theta,\tau)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$\left\|c(y,\theta,\tau) - c(\tilde{y},\tilde{\theta},\tilde{\tau})\right\| \;\le\; \sigma_1\Big(\| y-\tilde{y}\| + \left\|\theta-\tilde{\theta}\right\| + \|\tau-\tilde{\tau}\|\Big), \tag{17}$$

$$(y,\theta,\tau)\in G, \qquad (\tilde{y},\tilde{\theta},\tilde{\tau})\in G,$$

а коефіцієнти $c_s(y,\tau)$ рівномірно збіжного по θ ряду (11) справджують нерівність

$$\sum_{s=1}^{\infty}\| c_s(y,\tau)\|\left(\frac{1}{\| k_s\|} + \frac{1}{\sqrt[\eta]{\| k_s\|}}\right) \;\le\; \sigma_1, \quad (y,\tau)\in G_1. \tag{18}$$

Як і при доведенні леми 1, розіб'ємо відрізок $[0,\tau]$ на складові за формулою

$$[0,\tau] \;=\; \bigcup_{\nu=0}^{q}[\tilde{\beta}_\nu,\tilde{\beta}_{\nu+1}],$$

де $\tilde{\beta}_0 = 0$, $\tilde{\beta}_{\nu+1}-\tilde{\beta}_\nu = h$ при $\nu < q$, $\tilde{\beta}_{q+1} = \tau$, q — ціла частина числа τh^{-1}. Тоді

$$\left\|\int_0^{\tau}\tilde{c}(\bar{y}(t,\varepsilon),\bar{\theta}(t,\varepsilon),t)dt\right\| \;\le\; \sum_{\nu=0}^{q}\left[\int_{\tilde{\beta}_\nu}^{\tilde{\beta}_{\nu+1}}\left\|\tilde{c}\left(\bar{y}(t,\varepsilon),\ \bar{\psi}(t,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_0}^{t}\tilde{\omega}(l)dl,\ t\right) -\right.\right.$$

$$\left.- \;\tilde{c}\left(\bar{y}(\tilde{\beta}_\nu,\varepsilon),\ \psi(\tilde{\beta}_\nu,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_0}^{t}\tilde{\omega}(l)dl,\ \tilde{\beta}_\nu\right)\right\|dt \;+$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\left\|c_s(\bar y(\tilde\beta_\nu,\varepsilon))\right\|\left|\int_{\tilde\beta_\nu}^{\tilde\beta_{\nu+1}} l_{k_s}(t,\tau_0,\varepsilon)\,dt\right|\Bigg].$$

Враховуючи нерівності (10), (17), (18) і

$$\left\|\bar y(t,\varepsilon)-\bar y(\tilde\beta_\nu,\varepsilon)\right\| \le \sigma_1(1+\sigma_1)h, \qquad \left\|\psi(t,\varepsilon)-\psi(\tilde\beta_\nu,\varepsilon)\right\| \le \sigma_1(1+\sigma_1)h,$$

$$t\in[\tilde\beta_\nu,\tilde\beta_{\nu+1}],$$

одержуємо

$$\left\|\int_0^\tau \tilde c(\bar y(t,\varepsilon),\bar\theta(t,\varepsilon),t)\,dt\right\| \le \sigma_3(h+\varepsilon^{1/p}h^{-1}),$$

де $\sigma_3 = L\sigma_1(\sigma_0+2\sigma_1(1+\sigma_1)+1)$.

Тепер з (15) отримуємо нерівність

$$\|v(\tau,\varepsilon)\| \le \sigma_1(1+\sigma_1)\int_0^\tau \|v(t,\varepsilon)\|dt + \sigma_3(h+\varepsilon^{1/p}h^{-1}),$$

яка приводить до оцінки

$$\|v(\tau,\varepsilon)\| \le \sigma_3 e^{\sigma_1(1+\sigma_1)L}(h+\varepsilon^{1/p}h^{-1}), \qquad \tau\in[0,L], \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0].$$

Її найкращий порядок по ε буде при $h = \varepsilon^{1/2p}$.

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* 1, 2 *теореми* 1 *і нерівності* (17), (18), *то існують такі сталі* $\sigma_4 > 0$ *і* $\varepsilon_2 > 0$, *що при* $\varepsilon_0 \le \varepsilon_2$

$$\|x(\tau,\varepsilon)-\bar x(\tau,\varepsilon)\| + \|\varphi(\tau,\varepsilon)-\bar\varphi(\tau,\varepsilon)\| \le \sigma_4\varepsilon^{1/2p}$$

для всіх $\tau\in[0,L]$ *і* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Нехай систему (1) задано при $\tau\in[0,\infty)=R_+$. Вивчимо далі метод усереднення на півосі. Розглянемо усереднену систему для повільних змінних

$$\frac{d\bar x}{d\tau} = a_0(\bar x,\bar x_\lambda,\tau), \quad \tau\in R_+, \tag{19}$$

і припустимо, що для деякої неперервно диференційовної на $[-\Delta,0]$ функції $f(\tau)$ розв'язок $\bar x = x^0(\tau)$ системи (19), який справджує умову $x^0(\tau) = f(\tau)$ при $\tau\in[-\Delta,0]$, визначено для всіх $\tau\in[-\Delta,\infty)$.

Вважатимемо, що нормальна фундаментальна матриця $Q(\tau,\ t)$ лінійної системи

$$\frac{dz}{d\tau} = H_1(\tau)z, \qquad H_1(\tau) = \frac{\partial a_0(x^0(\tau),x^0(\lambda(\tau)),\tau)}{\partial x},$$

задовольняє нерівність

$$\|Q(\tau,t)\| \le Ke^{-\gamma(\tau-t)}, \quad \tau\ge t\ge 0, \tag{20}$$

з деякими сталими $K\ge 1$ і $\gamma>0$, а число

$$\sigma^0 = \sup_{\tau\in R_+}\|H_2(\tau)\|, \qquad H_2(\tau) = \frac{\partial a_0(x^0(\tau),x^0(\lambda(\tau)),\tau)}{\partial x_\lambda},$$

настільки мале, що

$$\gamma - K\sigma^0 > 0. \tag{21}$$

Припустимо також, що функція $a(y, \theta, \tau)$ розкладається в $\tilde{G} = D^2 \times \times R^{2m} \times R_+$ у ряд Фур'є

$$a(y, \theta, \tau) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s(y, \tau) e^{i(k_s, \theta)},$$

коефіцієнти якого справджують нерівність

$$\sum_{s=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\|k_s\|}\right) \sup_{\tilde{G}_1} \|a_s(y, \tau)\| + \frac{1}{\|k_s\|} \left(\sup_{\tilde{G}_1} \left\| \frac{\partial a_s(y, \tau)}{\partial y} \right\| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sup_{\tilde{G}_1} \left\| \frac{\partial a_s(y, \tau)}{\partial \tau} \right\| \right) \right] \leq \sigma_1, \quad \tilde{G}_1 = D^2 \times R_+. \tag{22}$$

Теорема 3. *Нехай*:

1) *функції* $\frac{d^l}{d\tau^l} \Omega_\nu(\tau)$ *є неперервними на* $[-\Delta, 0]$, *а функції* $\frac{d^l}{d\tau^l}(\omega_\nu(\tau))$ *і* $\frac{d^l}{d\tau^l}\left(\omega_\nu(\lambda(\tau)) \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}\right)$ — *рівномірно неперервними на* R_+ *при* $l = \overline{0, p-1}$, $\nu = \overline{1, m}$ *і*

$$\left\| (A^T(\tau) A(\tau))^{-1} A^T(\tau) \right\| \leq \tilde{\sigma}_1 = \text{const}, \quad \tau \in [\tau_0, \infty),$$

$$\det(B^T(\tau) B(\tau)) > 0, \quad \tau \in [0, \tau_0];$$

2) *існує розв'язок* $\bar{x} = x^0(\tau)$ *усередненої системи* (19), $x^0(\tau) = f(\tau)$ *при* $\tau \in [-\Delta, 0]$, *який визначений для всіх* $\tau \in [-\Delta, \infty)$ *і лежить у* D *разом із своїм* ρ_1*-околом*;

3) *функція* $\frac{\partial a_0(y, \tau)}{\partial y}$ *рівномірно неперервна по* $(y, \tau) \in D^2 \times \mathbb{R}_+$, *а функція* $c(y, \theta, \tau)$ *та її частинні похідні першого порядку неперервні в* $\tilde{G}$ *і обмежені сталою* σ_1;

4) *виконуються умови* (2) *при* $\tau \in R_+$ *і нерівності* (20) – (22).

Тоді існують такі додатні сталі ε_2, σ_5 *і* $\rho_2 < \rho_1$, *що при* $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_2$:

а) *для довільної неперервно диференційовної по* $\tau \in [-\Delta, 0]$ *функції* $g(\tau, \varepsilon)$, *яка задовольняє нерівність*

$$\left\| \frac{dg(\tau, \varepsilon)}{d\tau} \right\| \leq \sigma_1, \quad \tau \in [-\Delta, 0], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

розв'язок $x(\tau, \varepsilon)$, $\varphi(\tau, \varepsilon)$ *системи* (1) *з початковою умовою*

$$x(\tau, \varepsilon) = f(\tau), \quad \varphi(\tau, \varepsilon) = g(\tau, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \Omega(t) dt, \quad \tau \in [-\Delta, 0], \tag{23}$$

є визначеним для всіх $\tau \in [-\Delta, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *і виконується нерівність*

$$\left\| x(\tau, \varepsilon) - x^0(\tau) \right\| \leq \sigma_5 \varepsilon^{1/p}, \quad \tau \in [0, \infty), \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{24}$$

б) *для довільних неперервно диференційовних по* $\tau \in [-\Delta, 0]$ *функцій* $h(\tau, \varepsilon)$ *і* $g(\tau, \varepsilon)$, *які задовольняють нерівності*

$$\|h(\tau,\varepsilon)-f(\tau)\| \le \rho_2, \quad \left\|\frac{\partial h(\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\right\| + \left\|\frac{\partial g(\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}\right\| \le \sigma_1, \quad \tau\in[-\Delta,0], \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0],$$

повільна компонента $x(\tau,\varepsilon)$ *розв'язку* $x(\tau,\varepsilon)$, $\varphi(\tau,\varepsilon)$ *системи* (1) *з початковою умовою*

$$x(\tau,\varepsilon) = h(\tau,\varepsilon), \quad \varphi(\tau,\varepsilon) = g(\tau,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \Omega(t)\,dt, \quad \tau\in[-\Delta,0], \tag{25}$$

рівномірно обмежена при $\tau\in[-\Delta,\infty)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Доведення. Нехай $[0,T_1)$, $T_1 = T_1(\varepsilon)$, — максимальний півінтервал, для якого компонента $x(\tau,\varepsilon)$ розв'язку $x(\tau,\varepsilon)$, $\varphi(\tau,\varepsilon)$ задачі (1), (25) задовольняє нерівність

$$\left\|x(\tau,\varepsilon)-x^0(\tau)\right\| < \rho_3, \quad \tau\in[0,T_1),$$

з додатною сталою ρ_3, яку буде означено нижче. Тоді для функції $z(\tau,\varepsilon) = x(\tau,\varepsilon)-x^0(\tau)$ маємо зображення

$$\begin{gathered} z(\tau,\varepsilon) = h(\tau,\varepsilon)-f(\tau), \quad \tau\in[-\Delta,0], \\ z(\tau,\varepsilon) = Q(\tau,0)[h(0,\varepsilon)-f(0)] + \int_0^\tau Q(\tau,t)\big[H_2(t)z(\lambda(t),\varepsilon) + \\ + F_1\big(z(t,\varepsilon), z(\lambda(t),\varepsilon), t\big)\big]dt + I(\tau,\varepsilon), \quad \tau>0, \end{gathered} \tag{26}$$

де

$$I(\tau,\varepsilon) = \int_0^\tau Q(\tau,t)\tilde a\big(y(t,\varepsilon),\theta(t,\varepsilon),t\big)dt,$$

$$y(t,\varepsilon) = (x(t,\varepsilon), x(\lambda(t),\varepsilon)), \qquad \theta(t,\varepsilon) = (\varphi(t,\varepsilon),\varphi(\lambda(t),\varepsilon)),$$

$$\tilde a(y,\theta,t) = a(y,\theta,t) - a_0(y,t),$$

$$F_1(z,z_\lambda,t) = a_0(z+x^0(t),\ z_\lambda + x^0(\lambda(t)),\ t) -$$

$$- a_0(x^0(t),\ x^0(\lambda(t)),t) - H_1(t)z - H_2(t)z_\lambda.$$

Згідно з наведеними вище припущеннями і нерівністю

$$\sup_{[\tau_0,T_1)}\|z(\lambda(\tau),\varepsilon)\| \le \sup_{[0,T_1)}\|z(\tau,\varepsilon)\|,$$

отримуємо

$$\left\|\int_0^\tau Q(\tau,t)H_2(t)z(\lambda(t),\varepsilon)\,dt\right\| \le K\sigma^0\int_0^{\tau_0} e^{-\gamma(\tau-t)}\|h(\lambda(t),\varepsilon)-f(\lambda(t))\|dt \le \sigma^0\sigma_6\rho_2$$

при $\tau\in[0,\tau_0]$ і

$$\left\|\int_0^\tau Q(\tau,t)H_2(t)z(\lambda(t),\varepsilon)\,dt\right\| \le \sigma^0\left(\sigma_6\rho_2 + K\int_{\tau_0}^\tau e^{-\gamma(\tau-t)}\sup_{[0,T_1)}\|z(\tau,\varepsilon)\|dt\right) \le$$

$$\le \sigma^0\sigma_6\rho_2 + \frac{\sigma^0K}{\gamma}\sup_{[0,T_1)}\|z(\tau,\varepsilon)\|$$

при $\tau>\tau_0$. Тут $\sigma_6 = K\gamma^{-1}(e^{\gamma\tau_0}-1)$.

Оскільки

$$F_1(\tilde{z},t) = \int_0^1 \left(\frac{\partial a_0(\tilde{y}^0 + l\tilde{z},t)}{\partial y} - \frac{\partial a_0(\tilde{y}^0,t)}{\partial y} \right) dl\,\tilde{z},$$

де $\tilde{z} = (z(t,\varepsilon), z(\lambda(t),\varepsilon))$, $\tilde{y}^0 = (x^0(t), x^0(\lambda(t)))$, а функція $\dfrac{\partial a_0(y,t)}{\partial y}$ рівномірно неперервна по $(y,t) \in D^2 \times \mathbb{R}_+$, тобто для довільного числа $\tilde{\mu}_1 > 0$ існує таке додатне $\tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_2(\tilde{\mu}_1)$, не залежне від $\tilde{y}^0$ і t, що

$$\left\| \frac{\partial a_0(\tilde{y}^0 + l\tilde{z},t)}{\partial y} - \frac{\partial a_0(\tilde{y}^0,t)}{\partial y} \right\| < \tilde{\mu}_1, \quad t \in R_+,$$

при

$$\| \tilde{z} \| \le \| z(t,\varepsilon) \| + \| z(\lambda(t),\varepsilon) \| < \tilde{\mu}_2,$$

то

$$\| F_1(\tilde{z},t) \| \le \tilde{\mu}_1 (\| z(t,\varepsilon) \| + \| z(\lambda(t),\varepsilon) \|).$$

Число $\tilde{\mu}_1$ означимо нижче.

У зв'язку з цим

$$\left\| \int_0^\tau Q(\tau,t) F_1(z(t,\varepsilon), z(\lambda(t),\varepsilon),t)\,dt \right\| \le \sigma_6 \rho_2 \tilde{\mu}_1 + \sigma_7 \tilde{\mu}_1 \sup_{[0,T_1)} \| z(\tau,\varepsilon) \|,$$

де $\sigma_7 = 2K\gamma^{-1}$.

Тоді з (26) знаходимо

$$\sup_{[0,T_1)} \| z(\tau,\varepsilon) \| \le \frac{\sigma_8}{1 - K\sigma^0\gamma^{-1} - \sigma_7\tilde{\mu}_1} \rho_2 + \frac{1}{1 - K\sigma^0\gamma^{-1} - \sigma_7\tilde{\mu}_1} \sup_{[0,T_1)} \| I(\tau,\varepsilon) \|. \tag{27}$$

Тут $\sigma_8 = K + \sigma^0\sigma_6 + \tilde{\mu}_1\sigma_6$. Згідно з припущенням (21) число $\tilde{\sigma}^0 = 1 - K\sigma^0\gamma^{-1}$ є додатним, тому покладемо $\tilde{\mu}_1 = \dfrac{\tilde{\sigma}^0}{2\sigma_7}$.

Подамо далі $I(\tau,\varepsilon)$ у вигляді

$$I(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{q-1} \int_{\nu\tau_0}^{(\nu+1)\tau_0} r_s(\tau,t,\varepsilon)\,dt + \int_{q\tau_0}^{\tau} r_s(\tau,t,\varepsilon)\,dt \right), \tag{28}$$

де

$$r_s(\tau,t,\varepsilon) = Q(\tau,t) a_s(y(t,\varepsilon),t) e^{i(k_s,\Psi(t,\varepsilon))} l_{k_s}(t,\tau_0,\varepsilon),$$

$$y(t,\varepsilon) = (x(t,\varepsilon), x(\lambda(t),\varepsilon)), \qquad \theta(t,\varepsilon) = (\varphi(t,\varepsilon), \varphi(\lambda(t),\varepsilon)),$$

q — ціла частина числа $\tau\tau_0^{-1}$, функція $l_{k_s}(t,\tau_0,\varepsilon)$ означена формулою (9), а $2m$-вимірний вектор $\Psi(t,\varepsilon) = (\tilde{\Psi}(t,\varepsilon), \underset{\sim}{\Psi}(t,\varepsilon))$,

$$\tilde{\Psi}(t,\varepsilon) = g(0,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau_0} \omega(\tau)\,d\tau + \int_0^t b(y(\tau,\varepsilon), \theta(\tau,\varepsilon), \tau)\,d\tau, \qquad t \ge 0,$$

$$\underset{\sim}{\Psi}(t,\varepsilon) = g(\lambda(t),\varepsilon), \quad t \in [0,\tau_0],$$

$$\underset{\sim}{\Psi}(t,\varepsilon) = g(0,\varepsilon) + \int_0^{\lambda(t)} b(y(\tau,\varepsilon), \theta(\tau,\varepsilon), \tau)\,d\tau, \quad t \ge \tau_0.$$

На підставі припущення 1 теореми 3 оцінка (7) осциляційного інтеграла є справедливою і в тому випадку, коли замість відрізка $[0, L]$ взяти довільний відрізок $[\xi, \xi + \tau_0]$, $\xi \in R_+$, довжини τ_0 [1, c. 18]. При цьому стала σ_0 залежить від τ_0, але не залежить від ξ. Тому, враховуючи, що

$$\frac{dQ(\tau,t)}{dt} = -Q(\tau,t)H_1(t), \qquad \left\|\frac{dQ(\tau,t)}{dt}\right\| \le K\sigma_1 e^{-\gamma(\tau-t)}, \quad \tau \ge t > 0,$$

$$\left\|\frac{d}{dt}\Psi(t,\varepsilon)\right\| \le \sigma_1(1+\sigma_1), \qquad t \in R_+, \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0],$$

маємо нерівність

$$\left\|\int\limits_{\nu\tau_0}^{(\nu+1)\tau_0} r_s(\tau,t,\varepsilon)\,dt\right\| \le \varepsilon^{1/p}\sigma_9 e^{-\gamma(\tau-\nu\tau_0)}\left[\left(1+\frac{1}{\|k_s\|}\right)\sup_{\tilde G_1}\|a_s(y,\tau)\| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\|k_s\|}\left(\sup_{\tilde G_1}\left\|\frac{\partial a_s(y,\tau)}{\partial y}\right\| + \sup_{\tilde G_1}\left\|\frac{\partial a_s(y,\tau)}{\partial \tau}\right\|\right)\right]$$

зі сталою $\sigma_9 = K\sigma_0 e^{\gamma\tau_0}(1+\sigma_1+\sigma_1^2)$. Таку ж нерівність задовольняє інтеграл від функції $r_s(\tau,t,\varepsilon)$ по відрізку $[q\tau_0, \tau]$.

Отже, враховуючи нерівність (22), із (28) отримуємо оцінку

$$\|I(\tau,\varepsilon)\| \le \sigma_{10}\varepsilon^{1/p}, \qquad \tau \in [0, T_1), \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \tag{29}$$

в якій $\sigma_{10} = \sigma_1\sigma_9 \dfrac{e^{\gamma\tau_0}}{e^{\gamma\tau_0}-1}$.

Повернемось до нерівності (27) і покладемо в ній

$$\rho_2 = \frac{\tilde\sigma^0\rho_3}{6\sigma_8}, \qquad \rho_3 = \min\left\{\frac{1}{2}\rho_1, \frac{1}{4}\tilde\mu_2(\tilde\mu_1)\right\},$$

а додатне ε_0 виберемо настільки малим, що

$$\frac{2\sigma_{10}}{\tilde\sigma_0}\varepsilon^{1/p} \le \frac{1}{3}\rho_3.$$

Тоді з (27) і (29) одержуємо нерівність

$$\sup_{[0,T_1)}\left\|x(\tau,\varepsilon) - x^0(\tau)\right\| \le \frac{2}{3}\rho_3.$$

Якщо припустити, що при деякому $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ число $T_1 = T_1(\varepsilon)$ є скінченним, то на підставі останньої нерівності і нерівності

$$\min_{\tau\in[0,T_1+1]}(\tau - \lambda(\tau)) \equiv \Delta_1(\varepsilon) > 0$$

розв'язок $x(\tau,\varepsilon)$, $\varphi(\tau,\varepsilon)$ задачі (1), (25) методом кроків з довжиною кроку $\Delta_1(\varepsilon)$ можна продовжити на деякий проміжок $[0, T_1 + \tilde\Delta_1]$, де $\tilde\Delta_1 = \tilde\Delta_1(\varepsilon) > 0$, причому

$$\sup_{[0,\,T_1+\tilde\Delta_1]}\left\|x(\tau,\varepsilon) - x^0(\tau)\right\| \le \frac{3}{4}\rho_3.$$

А це суперечить означенню числа T_1. Отже, $T_1 = \infty$ для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ і

$$\|x(\tau,\varepsilon)\| < \rho_3 + \sup_{R_+}\left\|x^0(\tau)\right\|, \qquad \tau \in [0,\infty), \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0].$$

Оцінка (24) зі сталою $\sigma_5 = 2\sigma_{10}(\tilde{\sigma}^0)^{-1}$ випливає з нерівностей (27) при $\rho_2 = 0$ і (29).

Теорему доведено.

Використаємо одержані вище результати та розроблену в [1] методику для дослідження розв'язності багатоточкової задачі з параметрами вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \xi, \tau), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \xi, \tau), \quad \tau \in [0, L], \tag{30}$$

$$\begin{gathered} x(\tau, \varepsilon) = f(x(\tau_1, \varepsilon), \ldots, x(\tau_r, \varepsilon), \xi, \tau), \\ \varphi(\tau, \varepsilon) = g(x(\tau_1, \varepsilon), \ldots, x(\tau_r, \varepsilon), \xi, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \Omega(t)\,dt + \sum_{k=1}^r A_k \varphi(\tau_k, \varepsilon), \\ \tau \in [-\Delta, 0], \end{gathered} \tag{31}$$

$$\int_0^L \eta(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \xi, \tau)\,d\tau = 0, \tag{32}$$

в якій $-\Delta \le \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_r \le L$, $r \ge 1$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_l) \in \tilde{D} \subset R^l$ — невідомий вектор параметрів, $\tilde{D}$ — обмежена відкрита область, η — l-вимірна вектор-функція, A_k, $k = \overline{1, r}$, — сталі $(m \times m)$-матриці.

Припустимо, що $(n + m + l)$-вимірна вектор-функція $d(y, \theta, \xi, \tau) = (a(y, \theta, \xi, \tau), b(y, \theta, \xi, \tau), \eta(y, \theta, \xi, \tau))$ має неперервні обмежені сталою σ_1 частинні похідні по всіх змінних до другого порядку включно на множині $D^2 \times R^{2m} \times \tilde{D} \times [0, L]$ і розкладається в ряд Фур'є

$$d(y, \theta, \xi, \tau) = \sum_{s=0}^{\infty} d_s(y, \xi, \tau) e^{i(k_s, \theta)},$$

де, як і вище, $k_0 = 0$ і $k_s \ne 0$ при $s \ge 1$, коефіцієнти $d_s(M)$, $M = (y, \xi, \tau) \in D^2 \times \tilde{D} \times [0, L] = B_1$, якого задовольняють нерівність

$$\begin{gathered} \sum_{s \ge 1} \Bigg[\left(\| k_s \| + \frac{1}{\| k_s \|} \right) \sup_{B_1} \| d_s(M) \| + \left(1 + \frac{1}{\| k_s \|} \right) \sup_{B_1} \left\| \frac{\partial d_s(M)}{\partial M} \right\| + \\ + \frac{1}{\| k_s \|} \left(\sup_{B_1} \left\| \frac{\partial^2 d_s(M)}{\partial y \partial \tau} \right\| + \sup_{B_1} \left\| \frac{\partial^2 d_s(M)}{\partial \xi \partial \tau} \right\| + \sum_{j=1}^{2n} \left(\sup_{B_1} \left\| \frac{\partial^2 d_s(M)}{\partial y \partial y_j} \right\| + \right. \right. \\ \left. \left. + \sup_{B_1} \left\| \frac{\partial^2 d_s(M)}{\partial \xi \partial y_j} \right\| \right) \right) \Bigg] \le \sigma_1. \end{gathered} \tag{33}$$

Вважатимемо також, що при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функції $f(\mu, \xi, \tau)$ і $g(\mu, \xi, \tau, \varepsilon)$, де $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \in D^r$, $\mu_k \in D$, $k = \overline{1, r}$, мають неперервні частинні похідні по μ, ξ, τ також до другого порядку включно і

$$\begin{gathered} \| f(\tilde{M}) \| + \left\| \frac{\partial f(\tilde{M})}{\partial \tilde{M}} \right\| + \left\| \frac{\partial g(\tilde{M}, \varepsilon)}{\partial \tilde{M}} \right\| + \left\| \frac{\partial^2 f(\tilde{M})}{\partial \mu \partial \tau} \right\| + \\ + \left\| \frac{\partial^2 f(\tilde{M})}{\partial \xi \partial \tau} \right\| + \left\| \frac{\partial^2 g(\tilde{M}, \varepsilon)}{\partial \mu \partial \tau} \right\| + \left\| \frac{\partial^2 g(\tilde{M}, \varepsilon)}{\partial \xi \partial \tau} \right\| \le \sigma_1, \end{gathered} \tag{34}$$

$$\tilde{M} = (\mu, \xi, \tau) \in D^r \times \tilde{D} \times [-\Delta, 0], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Запишемо усереднену по φ, φ_λ задачу

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = a_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \xi, \tau), \quad \tau \in [0, L], \tag{35_1}$$

$$\bar{x}(\tau) = f(\bar{x}(\tau_1), \ldots, \bar{x}(\tau_r), \xi, \tau), \quad \tau \in [-\Delta, 0], \tag{35_2}$$

$$\int_0^L \eta_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \xi, \tau)\,d\tau = 0, \tag{35_3}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \xi, \tau), \quad \tau \in [0, L], \tag{35_4}$$

$$\bar{\varphi}(\tau, \varepsilon) = g(\bar{x}(\tau_1), \ldots, \bar{x}(\tau_r), \xi, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \Omega(t)\,dt + \sum_{k=1}^r A_k \bar{\varphi}(\tau_k, \varepsilon), \quad \tau \in [-\Delta, 0], \tag{35_5}$$

в якій $(a_0, b_0, \eta_0) = d_0$. Очевидно, що задача (35_1) – (35_5) значно простіша, ніж задача (30) – (32), насамперед тому, що перша з них розпадається на дві задачі. Задачу (35_1) – (35_3) можна розв'язувати незалежно від задач (35_4), (35_5), після чого розв'язок задачі (35_4), (35_5) будується алгебраїчним методом.

Якщо розглянути початкову задачу

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = a_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \xi, \tau), \quad \tau \in [0, L],$$

$$\bar{x}(\tau) = f(\mu, \xi, \tau), \quad \tau \in [-\Delta, 0],$$

і припустити, що її розв'язок $\bar{x}(\tau) \equiv \bar{x}(\tau, \mu, \xi)$ є визначеним для всіх $\tau \in [-\Delta, L]$, $\xi \in \tilde{D}$, $\mu \in D_0^r$ (D_0 — деяка відкрита підобласть області D), то пара $\bar{x}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi})$, $\bar{\xi}$ буде розв'язком задачі (35_1) – (35_3) при умові, що система рівнянь

$$\begin{gathered} \mu_1 = \bar{x}(\tau_1, \mu, \xi), \ldots, \mu_r = \bar{x}(\tau_r, \mu, \xi), \\ \int_0^L \eta_0(\bar{x}(\tau, \mu, \xi), \bar{x}(\lambda(\tau), \mu, \xi), \xi, \tau)\,d\tau = 0 \end{gathered} \tag{36}$$

має розв'язок $\mu = \bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \ldots, \bar{\mu}_r) \in D_0^r$, $\xi = \bar{\xi} \in \tilde{D}$.

Нехай далі $\bar{\varphi}(\tau, \varepsilon) \equiv \bar{\varphi}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi}, \nu, \varepsilon)$ — розв'язок початкової задачі

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b_0(\bar{x}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi}), \bar{x}(\lambda(\tau), \bar{\mu}, \bar{\xi}), \bar{\xi}, \tau), \qquad \tau \in [0, L],$$

$$\bar{\varphi}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi}, \nu, \varepsilon) = g(\bar{\mu}, \bar{\xi}, \tau, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \Omega(t)\,dt + \sum_{k=1}^r A_k \nu_k, \qquad \tau \in [-\Delta, 0],$$

де $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_r) \in R^{mr}$. Для того щоб функція $\bar{\varphi}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi}, \bar{\nu}, \varepsilon)$ була розв'язком крайової задачі (35_4), (35_5), досить, щоб система рівнянь

$$\nu_1 = \bar{\varphi}(\tau_1, \bar{\mu}, \bar{\xi}, \nu, \varepsilon), \ldots, \nu_r = \bar{\varphi}(\tau_r, \bar{\mu}, \bar{\xi}, \nu, \varepsilon),$$

або, що те саме, лінійна алгебраїчна система

$$\begin{aligned} (A_1 - E)\nu_1 + A_2\nu_2 + \ldots + A_r\nu_r &= -\alpha_1, \\ A_1\nu_1 + (A_2 - E)\nu_2 + \ldots + A_r\nu_r &= -\alpha_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1\nu_1 + A_2\nu_2 + \ldots + (A_r - E)\nu_r &= -\alpha_r, \end{aligned} \tag{37}$$

в якій E — одинична матриця,

$$\bar\varphi(\tau,\mu,\xi,\nu,\varepsilon) = g(\mu,\xi,0,\varepsilon) + \sum_{k=1}^{r} A_k \nu_k + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^\tau b_0(\bar x(t,\mu,\xi), \bar x(\lambda(t),\mu,\xi),\xi,t)\,dt, \quad \tau\in[0,L],$$

$$\alpha_s = \bar\varphi(\tau_s,\bar\mu,\bar\xi,\nu,\varepsilon) - \sum_{k=1}^{r} A_k\nu_k, \quad s=\overline{1,r},$$

мала розв'язок $\nu = \bar\nu = (\bar\nu_1,\ldots,\bar\nu_r)$. Для існування єдиного розв'язку системи (37) досить припустити, що

$$\det\left(E - \sum_{k=1}^{r} A_k\right) \neq 0. \tag{38}$$

Тоді

$$\bar\nu_s = \alpha_s + \left(E - \sum_{k=1}^{r} A_k\right)^{-1} \sum_{k=1}^{r} A_k\alpha_k, \quad s=\overline{1,r}.$$

Отже, справедливою є наступна лема, в якій $\bar x(\tau) \equiv \bar x(\tau,\bar\mu,\bar\xi)$, $\bar\varphi(\tau,\varepsilon) \equiv \equiv \bar\varphi(\tau,\bar\mu,\bar\xi,\bar\nu,\varepsilon)$.

Лема 2. *Якщо система рівнянь* (36) *має розв'язок* $\bar\mu$, $\bar\xi$, *для якого крива* $x = \bar x(\tau)$ *лежить у* D *для всіх* $\tau\in[-\Delta,L]$, *і виконується нерівність* (38), *то усереднена задача* (35_1) – (35_5) *має розв'язок* $\bar x(\tau)$, $\bar\varphi(\tau,\varepsilon)$, $\bar\xi$.

Позначимо через P $(rn+l)$-вимірну квадратну матрицю

$$\begin{pmatrix} \underset{P_1}{\dfrac{\partial X(\bar\mu,\bar\xi)}{\partial\bar\mu} - E} & \underset{P_2}{\dfrac{\partial X(\bar\mu,\bar\xi)}{\partial\bar\xi}} \end{pmatrix},$$

де

$$X(\bar\mu,\bar\xi) = (\bar x(\tau_1,\bar\mu,\bar\xi),\ldots,\bar x(\tau_r,\bar\mu,\bar\xi)),$$

$$P_1 = \int_0^L \left(\frac{\partial\eta_0(\bar x,\bar x_\lambda,\bar\xi,\tau)}{\partial\bar x}\frac{\partial\bar x}{\partial\bar\mu} + \frac{\partial\eta_0(\bar x,\bar x_\lambda,\bar\xi,\tau)}{\partial\bar x_\lambda}\frac{\partial\bar x_\lambda}{\partial\bar\mu}\right)d\tau,$$

$$P_2 = \int_0^L \left(\frac{\partial\eta_0(\bar x,\bar x_\lambda,\bar\xi,\tau)}{\partial\bar x}\frac{\partial\bar x}{\partial\bar\xi} + \frac{\partial\eta_0(\bar x,\bar x_\lambda,\bar\xi,\tau)}{\partial\bar x_\lambda}\frac{\partial\bar x_\lambda}{\partial\bar\xi} + \frac{\partial\eta_0(\bar x,\bar x_\lambda,\bar\xi,\tau)}{\partial\bar\xi}\right)d\tau,$$

$$\bar x = \bar x(\tau,\bar\mu,\bar\xi), \qquad \bar x_\lambda = \bar x(\lambda(\tau),\bar\mu,\bar\xi).$$

Нехай $x(\tau,\mu,\xi,\nu,\varepsilon)$, $\varphi(\tau,\mu,\xi,\nu,\varepsilon)$ — той розв'язок системи (30), який при $\tau\in[-\Delta,0]$ збігається з функцією

$$f(\mu,\xi,\tau), \quad g(\mu,\xi,\tau,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \Omega(t)\,dt + \sum_{k=1}^{r} A_k\nu_k.$$

Для побудови розв'язку крайової задачі (30) – (32) потрібно оцінити функцію

$$\upsilon = (x(\tau,\mu,\xi,\nu,\varepsilon) - \bar x(\tau,\mu,\varepsilon),\ \varphi(\tau,\mu,\xi,\nu,\varepsilon) - \bar\varphi(\tau,\mu,\xi,\nu,\varepsilon))$$

та її частинні похідні першого порядку по μ, ξ, ν. Очевидно, що $\upsilon\equiv 0$ при $\tau\in[-\Delta,0]$. Для $\tau>0$ маємо рівності

$$\bar{x}(\tau, \mu, \xi) = f(\mu, \xi, 0) + \int_0^\tau a_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \xi, t)\,dt,$$

$$x(\tau, \mu, \xi, \nu, \varepsilon) = f(\mu, \xi, 0) + \int_0^\tau a(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \xi, t)\,dt,$$

$$\bar{\varphi}(\tau, \mu, \xi, \nu, \varepsilon) = g(\mu, \xi, 0, \varepsilon) + \sum_{k=1}^r A_k \nu_k + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega(t)\,dt + \int_0^\tau b_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \xi, t)\,dt,$$

$$\varphi(\tau, \mu, \xi, \nu, \varepsilon) = g(\mu, \xi, 0, \varepsilon) + \sum_{k=1}^r A_k \nu_k + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega(t)\,dt + \int_0^\tau b(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \xi, t)\,dt,$$

в яких $\bar{x} = \bar{x}(t, \mu, \xi)$, $\bar{x}_\lambda = \bar{x}(\lambda(t), \mu, \xi)$, $x = x(t, \mu, \xi, \nu, \varepsilon)$, $x_\lambda = x(\lambda(t), \mu, \xi, \nu, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi(t, \mu, \xi, \nu, \varepsilon)$, $\varphi_\lambda = \varphi(\lambda(t), \mu, \xi, \nu, \varepsilon)$.

Використовуючи ці рівності, оцінку (7) осциляційного інтеграла, обмеження (33) на коефіцієнти Фур'є та метод доведення теореми 1, за аналогією з [1, с. 30] встановлюємо наступне твердження.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови* (2), (5), *нерівності* (6), (33), (34) *і крива* $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \mu, \xi)$ *лежить у* D *разом із своїм* ρ*-околом при* $\tau \in [-\Delta, L]$, $\mu \in D_0^r$, $\xi \in \tilde{D}$, *то при досить малому* $\varepsilon_0 > 0$ *справджується оцінка*

$$\|v\| + \left\|\frac{\partial v}{\partial \mu}\right\| + \left\|\frac{\partial v}{\partial \xi}\right\| + \left\|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right\| \le \sigma_{11}\varepsilon^{1/p} \tag{39}$$

для всіх $(\tau, \mu, \xi, \nu, \varepsilon) \in [0, L] \times D_0^r \times \tilde{D} \times R^{mr} \times (0, \varepsilon_0]$ *з деякою сталою* σ_{11}, *не залежною від* ε.

Згідно з лемою 2 $\bar{x}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi}) \in D$ при $\tau \in [-\Delta, L]$. Оскільки D — відкрита область, то існує таке додатне число ρ, що крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi})$ лежить у D разом із своїм 2ρ-околом. Виберемо далі $\rho_1 > 0$ настільки малим, щоб для всіх $\tau \in [-\Delta, L]$ і $\mu \in D^r$, $\xi \in \tilde{D}$, які задовольняють нерівність

$$\|\mu - \bar{\mu}\| + \|\xi - \bar{\xi}\| < \rho_1,$$

крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \mu, \xi)$ містилася в D разом із своїм ρ-околом.

Перейдемо до розв'язання задачі (30) – (32). Позначимо її розв'язок $x(\tau, \mu, \xi, \nu, \varepsilon)$, $\varphi(\tau, \mu, \xi, \nu, \varepsilon)$, ξ, а невідомі параметри μ і ξ підберемо так, щоб

$$\mu_k = x(\tau_k, \mu, \xi, \nu, \varepsilon), \quad k = \overline{1, r}, \qquad \int_0^L \eta(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \xi, \tau)\,d\tau = 0$$

або

$$h_k = \bar{x}(\tau_k, \mu, \xi) - \bar{\mu}_k + (x - \bar{x})\big|_{\tau = \tau_k}, \quad k = \overline{1, r}, \tag{40}$$

$$P_1 h + P_2 z = -\int_0^L \tilde{\eta}(x, x_\lambda, \varphi, \varphi_\lambda, \xi, \tau)\,d\tau - \int_0^L \left[\eta_0(x, x_\lambda, \xi, \tau) - \eta_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \xi, \tau)\right]d\tau -$$

$$- \int_0^L \left[\eta_0(\bar{x}, \bar{x}_\lambda, \xi, \tau) - \frac{1}{L}(P_1 h + P_2 z)\right]d\tau, \tag{41}$$

де $x = x(\tau, \mu, \xi, \nu, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi(\tau, \mu, \xi, \nu, \varepsilon)$, $\bar{x} = \bar{x}(\tau, \mu, \xi)$, $\tilde{\eta} = \eta - \eta_0$, $\mu_k = \bar{\mu}_k + h_k$, $(h_1, \ldots, h_r) = h$, $\xi = \bar{\xi} + z$.

Оскільки a_0 і f мають неперервні обмежені частинні похідні до другого порядку включно, то справджуються рівності

$$\bar{x}(\tau, \mu, \xi) = \bar{x}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi}) + \frac{\partial \bar{x}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi})}{\partial \mu} h + \frac{\partial \bar{x}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi})}{\partial \xi} z + R_1(\tau, u),$$

$$\frac{\partial \bar{x}(\tau, \mu, \xi)}{\partial \mu} = \frac{\partial \bar{x}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi})}{\partial \mu} + R_2(\tau, u), \qquad \frac{\partial \bar{x}(\tau, \mu, \xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial \bar{x}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi})}{\partial \xi} + R_3(\tau, u), \tag{42}$$

в яких $u = (h, z)$, $\tau \in [-\Delta, L]$, $\|u\| < \rho_1$, $\|R_1(\tau, u)\| \leq \sigma_{12}\|u\|^2$, $\|R_2(\tau, u)\| + \|R_3(\tau, u)\| \leq \sigma_{12}\|u\|$, а σ_{12} — стала, не залежна від τ, u.

З рівностей (41) одержуємо

$$\left(\frac{\partial X(\bar{\mu}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\mu}} - E\right) h + \frac{\partial X(\bar{\mu}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} z = R_4(u, \nu, \varepsilon), \tag{43}$$

де

$$R_4(u, \nu, \varepsilon) = -\left(R_1(\tau_1, u) + (x - \bar{x})\big|_{\tau=\tau_1}, \ldots, R_1(\tau_r, u) + (x - \bar{x})\big|_{\tau=\tau_r}\right).$$

Об'єднуючи (41) і (43) та припускаючи, що матриця P є невиродженою, маємо рівняння

$$u = F_2(u, \nu, \varepsilon), \tag{44}$$

в якому

$$F_2(u, \nu, \varepsilon) = P^{-1}(R_4(u, \nu, \varepsilon), R_5(u, \nu, \varepsilon)),$$

а $R_5(u, \nu, \varepsilon)$ позначає праву частину рівності (41).

На підставі розкладу

$$\eta_0(\bar{N} + N, \tau) = \eta_0(\bar{N}, \tau) + \frac{\partial \eta_0(\bar{N}, \tau)}{\partial N} N + R_6(\tau, N),$$

де

$$\bar{N}(\bar{x}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi}), \bar{x}(\lambda(\tau), \bar{\mu}, \bar{\xi}), \bar{\xi}), \qquad N = (N_\tau, N_{\lambda(\tau)}, z),$$

$$N_\tau = \frac{\partial \bar{x}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\mu}} h + \frac{\partial \bar{x}(\tau, \bar{\mu}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}} z + R_1(\tau, u),$$

$$R_6(\tau, N) = \int_0^1 \left[\frac{\partial \eta_0(\bar{N} + Nt, \tau)}{\partial N} - \frac{\partial \eta_0(\bar{N}, \tau)}{\partial N}\right] dt\, N,$$

$$\|R_6(\tau, N)\| \leq \tilde{\sigma}_{12}\|u\|^2,$$

оцінки (39) і нерівності

$$\left\| \int_0^L \tilde{\eta}(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \xi, \tau)\, d\tau \right\| \leq \underset{\sim}{\sigma_{12}} \varepsilon^{1/p},$$

яка випливає з оцінки (7) осциляційного інтеграла, отримуємо нерівність

$$\|F_2(u, \nu, \varepsilon)\| \leq \sigma_{13}(\|u\|^2 + \varepsilon^{1/p}), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \quad \nu \in R^{mr}, \quad \|u\| < \rho_1, \tag{45}$$

зі сталою σ_{13}, не залежною від u, ν, ε. Звідси робимо висновок, що при кожних фіксованих $\nu \in R^{mr}$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $F_2(u, \nu, \varepsilon)$ відображає множину $K_1 = \{u \mid u \in R^{nr+l}, \|u\| \leq 2\sigma_{13}\varepsilon^{1/p}\}$ в себе, де

$$\varepsilon_0 < \min\left\{\left(\frac{\rho_1}{2\sigma_{13}}\right)^p;\ (2\sigma_{13})^{-2p}\right\}.$$

Дослідимо далі відображення $F_2 : K_1 \to K_1$ на стиск. Маємо рівності

$$\frac{\partial}{\partial u}R_4(u,\nu,\varepsilon) = \left(\frac{\partial X(\bar\mu,\bar\xi)}{\partial\bar\mu}\frac{\partial X(\bar\mu,\bar\xi)}{\partial\bar\xi}\right) - \left(\frac{\partial X(\bar\mu+h,\bar\xi+z)}{\partial\bar\mu}\frac{\partial X(\bar\mu+h,\bar\xi+z)}{\partial\bar\xi}\right) -$$

$$- \frac{\partial}{\partial u}\Big((x-\bar x)|_{\tau=\tau_1},\dots,(x-\bar x)|_{\tau=\tau_r}\Big),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}R_5(u,\nu,\varepsilon) = -\int_0^L\left[\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial(y-\bar y)}{\partial u} + \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\frac{\partial(\theta-\bar\theta)}{\partial u} + \frac{\partial\tilde\eta}{\partial y}\frac{\partial\bar y}{\partial u} + \frac{\partial\tilde\eta}{\partial\theta}\frac{\partial\bar\theta}{\partial u}\right. +$$

$$\left. + \frac{\partial\tilde\eta}{\partial u} + \left(\frac{\partial\eta_0(y,\xi,\tau)}{\partial y} - \frac{\partial\eta_0(\bar y,\xi,\tau)}{\partial y}\right)\frac{\partial\bar y}{\partial u} + \frac{\partial\eta_0(y,\xi,\tau)}{\partial u} - \frac{\partial\eta_0(\bar y,\xi,\tau)}{\partial u}\right]d\tau + (\tilde P_1\tilde P_2),$$

в яких $y = (x, x_\lambda)$, $\bar y = (\bar x, \bar x_\lambda)$, $\theta = (\varphi, \varphi_\lambda)$, $\bar\theta = (\bar\varphi, \bar\varphi_\lambda)$, $\eta = \eta(y,\theta,\xi,\tau)$, $\tilde\eta = \tilde\eta(y,\theta,\xi,\tau)$,

$$\tilde P_1 = P_1 - \int_0^L\left(\frac{\partial\eta_0(\bar x,\bar x_\lambda,\xi,\tau)}{\partial\bar x}\frac{\partial\bar x}{\partial\mu} + \frac{\partial\eta_0(\bar x,\bar x_\lambda,\xi,\tau)}{\partial\bar x_\lambda}\frac{\partial\bar x_\lambda}{\partial\mu}\right)d\tau,$$

$$\tilde P_2 = P_2 - \int_0^L\left(\frac{\partial\eta_0(\bar x,\bar x_\lambda,\xi,\tau)}{\partial\bar x}\frac{\partial\bar x}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta_0(\bar x,\bar x_\lambda,\xi,\tau)}{\partial\bar x_\lambda}\frac{\partial\bar x_\lambda}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta_0(\bar x,\bar x_\lambda,\xi,\tau)}{\partial\xi}\right)d\tau.$$

Застосовуючи оцінку вигляду (7) до інтеграла

$$\int_0^L\left(\frac{\partial\tilde\eta}{\partial y}\frac{\partial\bar y}{\partial u} + \frac{\partial\tilde\eta}{\partial\theta}\frac{\partial\bar\theta}{\partial u} + \frac{\partial\tilde\eta}{\partial u}\right)d\tau$$

та враховуючи оцінку (39), дістаємо нерівність

$$\left\|\frac{\partial}{\partial u}R_4(u,\nu,\varepsilon)\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial u}R_5(u,\nu,\varepsilon)\right\| \le \sigma_{14}\left(\|u\| + \varepsilon^{1/p}\right) \tag{46}$$

для всіх $\|u\| < \rho_1$, $\nu \in R^{mr}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ з деякою сталою σ_{14}, не залежною від ε, ν, u. Тоді

$$\left\|\frac{\partial}{\partial u}F_2(u,\nu,\varepsilon)\right\| \le \frac{1}{2}, \quad u \in K_1, \quad \nu \in R^{mr}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{47}$$

при умові, що

$$\varepsilon_0 < \left(2\sigma_{14}\|P^{-1}\|(1+2\sigma_{13})\right)^{-p}.$$

Таким чином, рівняння (44) має єдиний розв'язок $u = u(\nu,\varepsilon) = (h(\nu,\varepsilon), z(\nu, \varepsilon)) \in K_1$, який можна визначити методом послідовних наближень за допомогою формул

$$u_0(\nu,\varepsilon) \equiv 0, \qquad u_{k+1}(\nu,\varepsilon) = F_2(u_k(\nu,\varepsilon),\nu,\varepsilon), \qquad k \ge 0,$$
$$u(\nu,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty} u_k(\nu,\varepsilon). \tag{48}$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial\nu}R_5(u,\nu,\varepsilon) = -\int\limits_0^L\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial(y-\bar{y})}{\partial\nu} + \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\frac{\partial(\theta-\bar{\theta})}{\partial\nu} + \frac{\partial\eta}{\partial\varphi}A_0 + \frac{\partial\eta}{\partial\varphi_\lambda}A_0\right)d\tau,$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}R_4(u,\nu,\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial\nu}\Big((x-\bar{x})|_{\tau=\tau_1},\ldots,(x-\bar{x})|_{\tau=\tau_r}\Big), \quad A_0 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_r \end{pmatrix},$$

то

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\nu}F_2(u,\nu,\varepsilon)\right\| \le \sigma_{15}\varepsilon^{1/p}, \quad u\in K_1, \quad \nu\in R^{mr}, \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]. \tag{49}$$

З (48) одержуємо рівність

$$\frac{\partial u_{k+1}(\nu,\varepsilon)}{\partial\nu} = \frac{\partial F_2(u_k(\nu,\varepsilon),\nu,\varepsilon)}{\partial u}\frac{\partial u_k(\nu,\varepsilon)}{\partial\nu} + \frac{\partial F_2(u_k(\nu,\varepsilon),\nu,\varepsilon)}{\partial\nu},$$

яка згідно з (47) і (49) приводить до нерівності

$$\left\|\frac{\partial u_{k+1}(\nu,\varepsilon)}{\partial\nu}\right\| \le \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_k(\nu,\varepsilon)}{\partial\nu}\right\| + \sigma_{15}\varepsilon^{1/p}$$

або

$$\left\|\frac{\partial u_k(\nu,\varepsilon)}{\partial\nu}\right\| \le 2\sigma_{15}\varepsilon^{1/p}, \quad \nu\in R^{mr}, \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0], \quad k\ge 0.$$

Цього досить [11], щоб гранична функція $u(\nu,\varepsilon)$ задовольняла умову Ліпшиця

$$\|u(\nu,\varepsilon) - u(\tilde{\nu},\varepsilon)\| \le 2\sigma_{15}\varepsilon^{1/p}\|\nu-\tilde{\nu}\| \tag{50}$$

для всіх $\nu\in R^{mr}$, $\tilde{\nu}\in R^{mr}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Нарешті підберемо $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_r)\in R^{mr}$ так, щоб

$$\varphi(\tau_k,\mu,\xi,\nu,\varepsilon) = \nu_k, \quad k = \overline{1,r}, \tag{51}$$

де $\mu = \bar{\mu} + h(\nu,\varepsilon)$, $\xi = \bar{\xi} + z(\nu,\varepsilon)$. Покладемо $\nu = \bar{\nu} + \tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1,\ldots,\tilde{\gamma}_r)$.

Враховуючи рівність

$$\bar{\varphi}(\tau,\mu,\xi,\nu,\varepsilon) = \bar{\varphi}(\tau,\mu,\xi,\bar{\nu},\varepsilon) + \sum_{s=1}^{r}A_s\tilde{\gamma}_s,$$

переписуємо (49) у вигляді

$$\sum_{s=1}^{r}A_s\tilde{\gamma}_s - \tilde{\gamma}_k = -\beta_k(\tilde{\gamma},\varepsilon), \quad k = \overline{1,r}, \tag{52}$$

де

$$\beta_k(\tilde{\gamma},\varepsilon) = \varphi(\tau_k,\mu,\xi,\nu,\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau_k,\mu,\xi,\nu,\varepsilon) + \bar{\varphi}(\tau_k,\mu,\xi,\bar{\nu},\varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau_k,\bar{\mu},\bar{\xi},\bar{\nu},\varepsilon).$$

При виконанні припущення (38) з системи рівнянь (52) отримуємо рівняння

$$\tilde{\gamma} = \delta(\tilde{\gamma},\varepsilon), \tag{53}$$

в якому

$$\delta(\tilde{\gamma},\varepsilon) = \delta_1(\tilde{\gamma},\varepsilon),\ldots,\delta_r(\tilde{\gamma},\varepsilon),$$

$$\delta_k(\tilde{\gamma}, \varepsilon) = \beta_k(\tilde{\gamma}, \varepsilon) + \left(E - \sum_{s=1}^{r} A_s \right)^{-1} \sum_{s=1}^{r} A_s \beta_s(\tilde{\gamma}, \varepsilon).$$

На підставі нерівностей (39), (50) і

$$\| \mu - \overline{\mu} \| + \left\| \xi - \overline{\xi} \right\| \leq 2\sigma_{13} \varepsilon^{1/p} \tag{54}$$

робимо висновок про існування такої сталої σ_{16}, що

$$\| \delta(\tilde{\gamma}, \varepsilon) \| \leq \sigma_{16} \varepsilon^{1/p}, \qquad \| \delta(\tilde{\gamma}, \varepsilon) - \delta(\overline{\gamma}, \varepsilon) \| \leq \sigma_{16} \varepsilon^{1/p} \| \tilde{\gamma} - \overline{\gamma} \|$$

для всіх $\tilde{\gamma} \in R^{mr}$, $\overline{\gamma} \in R^{mr}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Тому при $\varepsilon_0 \leq (2\sigma_{16})^{-p}$ рівняння (53) має в R^{mr} єдиний розв'язок $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\varepsilon)$, причому $\| \tilde{\gamma}(\varepsilon) \| \leq \sigma_{16} \varepsilon^{1/p}$.

Отже, побудовано розв'язок $x(\tau, \varepsilon)$, $\varphi(\tau, \varepsilon)$, $\xi(\varepsilon)$ задачі (30) – (32), де

$$x(\tau, \varepsilon) \equiv x(\tau, \mu(\varepsilon), \xi(\varepsilon), \nu(\varepsilon), \varepsilon), \qquad \varphi(\tau, \varepsilon) = x(\tau, \mu(\varepsilon), \xi(\varepsilon), \nu(\varepsilon), \varepsilon),$$

$$\mu(\varepsilon) = \overline{\mu} + h(\nu(\varepsilon), \varepsilon), \qquad \xi(\varepsilon) = \overline{\xi} + z(\nu(\varepsilon), \varepsilon), \qquad \nu(\varepsilon) = \overline{\nu} + \tilde{\gamma}(\varepsilon).$$

Зазначимо, що з нерівностей (39), (52) і $\| \nu(\varepsilon) - \overline{\nu} \| \leq \sigma_{16} \varepsilon^{1/p}$ випливають нерівності

$$\| x(\tau, \varepsilon) - \overline{x}(\tau) \| \leq \| x(\tau, \varepsilon) - \overline{x}(\tau, \mu(\varepsilon), \xi(\varepsilon)) \| +$$

$$+ \left\| \overline{x}(\tau, \mu(\varepsilon), \xi(\varepsilon)) - \overline{x}(\tau, \overline{\mu}, \overline{\xi}) \right\| \leq \sigma_{17} \varepsilon^{1/p},$$

$$\| \varphi(\tau, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, \varepsilon) \| \leq \tilde{\sigma}_{17} \varepsilon^{1/p}$$

для всіх $\tau \in [-\Delta, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, в яких

$$\sigma_{17} = \sigma_{11} + 2\sigma_{13} \left(\sup \left\| \frac{\partial \overline{x}(\tau, \mu, \xi)}{\partial \mu} \right\| + \sup \left\| \frac{\partial \overline{x}(\tau, \mu, \xi)}{\partial \xi} \right\| \right),$$

$$\tilde{\sigma}_{17} = \sigma_{11} + (2\sigma_{13} + \sigma_{16}) \times$$

$$\times \left(\sup \left\| \frac{\partial \overline{\varphi}(\tau, \mu, \xi, \nu, \varepsilon)}{\partial \mu} \right\| + \sup \left\| \frac{\partial \overline{\varphi}(\tau, \mu, \xi, \nu, \varepsilon)}{\partial \xi} \right\| + \sum_{k=1}^{r} \| A_k \| \right),$$

а супремум береться по τ, μ, ξ, ε із множини

$$\tau \in [-\Delta, L], \qquad \| \mu - \overline{\mu} \| + \left\| \xi - \overline{\xi} \right\| < \rho_1, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

Нарешті, якщо вважати додатні числа ρ_1 і ε_0 настільки малими, що

$$\rho_1 \leq \min \left\{ \frac{1}{2\sigma_{13}}; \frac{1}{4 \left\| P^{-1} \right\| \sigma_{14}} \right\}, \qquad \varepsilon_0 \leq \min \left\{ \rho_0^{2p}; \left(\frac{1}{4 \left\| P^{-1} \right\| \sigma_{14}} \right)^{-p} \right\},$$

то на підставі нерівностей (45) і (46) знайдене вище значення $u = u(\nu, \varepsilon)$ є єдиним розв'язком рівняння (44) в кулі $\| u \| < \rho_1$. Звідси робимо висновок, що коли задача (30) – (32) має також розв'язок $\tilde{x}(\tau, \varepsilon)$, $\tilde{\varphi}(\tau, \varepsilon)$, $\tilde{\xi}(\varepsilon)$, який не збігається з розв'язком $x(\tau, \varepsilon)$, $\varphi(\tau, \varepsilon)$, $\xi(\varepsilon)$, то при кожному $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ хоч в одній точці $\tau \in [-\Delta, L]$ виконується нерівність

$$\| \tilde{x}(\tau, \varepsilon) - x(\tau, \varepsilon) \| + \left\| \tilde{\xi}(\varepsilon) - \xi(\varepsilon) \right\| \geq \frac{\rho_1}{2r}.$$

Таким чином, має місце така теорема.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови* (2), (5), *припущення леми* 2, *нерівності* (6), (33), (34) *і матриця* P *є невиродженою. Тоді існують такі додатні* *сталі* $\underline{\varepsilon}_0$ *і* σ_{18}, *що при кожному* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \leq \underline{\varepsilon}_0$, *в малому околі розв'язку* $\bar{x}(\tau)$, $\bar{\varphi}(\tau, \varepsilon)$, $\bar{\xi}$ *усередненої задачі* $(35_1) - (35_5)$ *існує єдиний розв'язок* $x(\tau, \varepsilon)$, $\varphi(\tau, \varepsilon)$, $\xi(\varepsilon)$ *задачі* (30) – (32), *причому*

$$\| x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau) \| + \| \varphi(\tau, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon) \| + \left\| \xi(\varepsilon) - \bar{\xi} \right\| \leq \sigma_{18} \varepsilon^{1/p}$$

для всіх $\tau \in [-\Delta, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

1. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наук. думка, 2004. – 474 с.
2. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. – Киев: Вища шк., 1979. – 247 с.
3. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука, 1986. – 192 с.
4. *Самойленко А. М., Бигун Я. И.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 1. – С. 8 – 14.
5. *Шпакович В. П.* Метод усреднения для многочастотных систем с запаздыванием // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 4. – С. 535 – 539.
6. *Філіпчук М. П.* Метод усереднення в крайових задачах для диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом: Дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1999. – 142 с.
7. *Бігун Я. Й.* Усереднення в багаточастотних системах з лінійно перетвореним аргументом та інтегральними крайовими умовами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2005. – Вип. 269. – С. 5-10.
8. *Байнов Д. Д., Милушева С. Д.* О некоторых применениях метода усреднения для решения начальных и краевых задач для обыкновенных дифференциальных, интегро-дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений // Proc. VIII Int. Conf. Nonlinear Oscillations. – Prague, 1978. – P. 771 – 789.
9. *Константинов М. М., Байнов Д. Д.* О применении метода усреднения к некоторым многоточечным краевым задачам // Bull. Soc. Math. R. S. Roumanie. – 1974. – **18** (66), № 1-2. – P. 307 – 310.
10. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. – М.: Наука, 1973. – Ч. 2. – 448 с.
11. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

Одержано 28.03.2006