УДК 519.21

Б. В. Бондарєв, Т. В. Жмихова (Донецк. нац. ун-т)

ЗНАХОДЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА ДЛЯ ОДНІЄЇ МОДЕЛІ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

A problem of calculating the probability of ruin of an insurance company in infinite number of steps is considered in the case where this company is able to invest its capital to a bank deposit at every time. As a distribution describing claim amounts to the insurance company, the gamma distribution with parameters n and α is chosen.

Рассмотрена задача нахождения вероятности разорения страховой компании за бесконечное число шагов, имеющей возможность в каждый момент времени размещать свой капитал на банковском депозите. В качестве распределения, описывающего размеры исков к страховой компании, было выбрано гамма-распределение с параметрами n и α.

1. Вступ. Традиційною характеристикою платоспроможності страхової компанії є ймовірність банкрутства, найбільш точна оцінка якої дозволила б значною мірою полегшити керування страховою компанією й уберегти її від можливого банкрутства.

Відомо, що добробут страхової компанії залежить не тільки від її основної діяльності, але і від інвестиційної політики, яку проводить дана компанія (від можливості й ефективності інвестування свого капіталу на фінансовому (B, S)-ринку). Це стало причиною особливої зацікавленості цією проблемою, якій присвячено велику кількість статей і монографій (див., наприклад, [1, 2]), і саме тому в даній роботі ми розглядаємо задачу знаходження ймовірності банкрутства страхової компанії, що має можливість у кожен момент часу розміщати свій капітал на банківському депозиті, за нескінченне число кроків.

2. Постановка задачі. Нехай на фінансовому ринку існує один безризиковий актив (банківський рахунок) B. Будемо вважати, що відсотки на банківський рахунок нараховуються з постійною ставкою $r(t) \equiv r > 0$, так що ціна безризикового активу еволюціонує відповідно до різницевого рівняння

$$\Delta B_n = rB_{n-1}, \qquad B_0 > 0, \tag{1}$$

де B_0 — сума, що знаходиться на банківському рахунку в початковий момент часу.

Нехай страхова компанія, маючи в момент часу $n = 0$ капітал u_0, розміщує його на банківському депозиті. Тоді в момент часу $n = 1$ з урахуванням того, що компанія одержує страхові внески c і робить виплати по позовах Z_1, капітал буде дорівнювати

$$u_1 = u_0(1+r) + c - Z_1.$$

Знову розміщуючи вже свій новий капітал u_1 на банківському рахунку, у момент часу $n = 2$ компанія буде мати капітал

$$u_2 = u_1(1+r) + c - Z_2.$$

Продовжуючи так далі, в момент часу $n+1$ компанія матиме капітал

$$u_{n+1} = u_n(1+r) + c - Z_{n+1}. \tag{2}$$

Тут і далі будемо припускати, що величини позову клієнтів до компанії $\{Z_i\}_{i=1,2,\ldots}$ — незалежні однаково розподілені $(Z_i \sim Z)$ невід'ємні випадкові величини, що не залежать від еволюції активів фінансового ринку. Покладемо $F_{Z_i}(x) = F_Z(x)$, де $F_Z(x)$ — функція розподілу величини позовів Z_i.

Якщо в k-й момент часу сума до виплати по позовах перевищила накопичений до цього часу капітал, то на k-му кроці фіксується банкрутство і компанія припиняє свою діяльність. Нехай $\varphi_k(u_0)$ — ймовірність банкрутства на кінцевому інтервалі $[0, k]$, тобто

$$\varphi_k(u_0) = P_n\{\omega: u_n < 0 \text{ при деякому } n \le k\},$$

яка монотонно зростає по k і u_0. Тоді ймовірність банкрутства страхової компанії, динаміка капіталу якої описується рівнянням (2) за нескінченне число кроків, можна знайти з рівняння

$$\varphi(u_0) = 1 - F_Z(u_0(1+r)+c) + \int_0^{u_0(1+r)+c} \varphi(u_0(1+r)+c-y)\,dF_z(y), \tag{3}$$

що виводиться з рекурентного співвідношення [1]

$$\varphi_{k+1}(u_0) = 1 - F_Z(u_0(1+r)+c) + \int_0^{u_0(1+r)+c} \varphi_k(u_0(1+r)+c-y)\,dF_z(y), \tag{4}$$

де $\varphi_1(u_0) = 1 - F_Z(u_0(1+r)+c)$. Дійсно, $\varphi_k(u)$ при фіксованому u монотонно зростає по k, є невід'ємною та обмеженою. Таким чином, послідовність $\varphi_k(u)$ має границю та граничний перехід при $k \to \infty$ в (4) також є можливим.

Задача полягає в знаходженні ймовірності банкрутства страхової компанії за нескінченне число кроків відповідно до рівняння (3) за умови, що розміри позовів мають гамма-розподіл з параметрами (n, α).

3. Виведення рівняння і знаходження розв'язків.

Теорема 1. *Нехай розміри позову описує гамма-розподіл з параметрами* (n, α). *Тоді ймовірність банкрутства страхової компанії, що розміщує свій капітал на банківському депозиті, ціна якого еволюціонує відповідно до різницевого рівняння* (1), *описується рівнянням*

$$\varphi^{(n)}(u) = (\alpha(1+r))^n[\varphi(u(1+r)+c) - \varphi(u)] - C_n^1\alpha(1+r)\varphi^{(n-1)}(u) -$$
$$- C_n^2(\alpha(1+r))^2\varphi^{(n-2)}(u) - C_n^3(\alpha(1+r))^3\varphi^{(n-3)}(u) - \ldots - C_n^{n-1}(\alpha(1+r))^{n-1}\varphi'(u). \tag{5}$$

Доведення. Оскільки розміри позовів мають гамма-розподіл з параметрами (n, α), тобто щільність розподілу величин позовів клієнтів до компанії є такою:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^n x^{n-1} e^{-\alpha x}}{(n-1)!}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

то ймовірність банкрутства будемо знаходити з рівняння

$$\varphi(u) = 1 - \int_0^{u(1+r)+c} \frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!}dy + \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(u(1+r)+c-y)\frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!}dy. \tag{6}$$

У подальшому нам доведеться диференціювати рівність (6). Покажемо, що операція взяття похідної буде закономірною до порядку $n+1$.

Виконаємо заміну змінних у другому інтегралі правої частини (6). Для цього покладемо $u(1+r)+c-y = x$, тоді права частина рівняння, очевидно, буде дорівнювати

$$1 - \int_0^{u(1+r)+c} \frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!}dy + \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(u(1+r)+c-y)\frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!}dy =$$

$$= 1 - \int_0^{u(1+r)+c} \frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!} dy + \frac{\alpha^n}{(n-1)!} e^{-\alpha(u(1+r)+c)} \times$$

$$\times \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(x)(u(1+r)+c-x)^{n-1} e^{\alpha x} dx = 1 - \int_0^{u(1+r)+c} \frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!} dy +$$

$$+ \frac{\alpha^n}{(n-1)!} e^{-\alpha(u(1+r)+c)} \sum_{k=0}^{n-1} (u(1+r)+c)^k (-1)^k \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(x) x^{n-k-1} e^{\alpha x} dx.$$

Звідси видно, що права частина отриманого виразу, а отже і права частина (6), є диференційовною по u, тобто функція має першу похідну. Диференціюючи рівняння (6) по u, отримуємо інтегро-диференціальне рівняння

$$\varphi'(u) = -\frac{\alpha^n (u(1+r)+c)^{n-1} e^{-\alpha(u(1+r)+c)}}{(n-1)!}(1+r) +$$

$$+ \varphi(0) \frac{\alpha^n (u(1+r)+c)^{n-1} e^{-\alpha(u(1+r)+c)}}{(n-1)!}(1+r) +$$

$$+ \int_0^{u(1+r)+c} \varphi'_u(u(1+r)+c-y) \frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!}(1+r) dy. \tag{7}$$

Інтегруючи частинами інтеграл з (7), маємо

$$\int_0^{u(1+r)+c} \varphi'_u(u(1+r)+c-y) \frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!}(1+r) dy =$$

$$= \int_0^{u(1+r)+c} \frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!}(1+r) d\varphi(u(1+r)+c-y) =$$

$$= -\varphi(0) \frac{\alpha^n (u(1+r)+c)^{n-1} e^{-\alpha(u(1+r)+c)}}{(n-1)!}(1+r) +$$

$$+ \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(u(1+r)+c-y) \frac{\alpha^n (1+r)}{(n-2)!} y^{n-2} e^{-\alpha y} dy -$$

$$- \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(u(1+r)+c-y) \frac{\alpha^{n+1}(1+r)}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\alpha y} dy. \tag{8}$$

Підставляючи (8) у (7) і виконуючи елементарні математичні перетворення, одержуємо

$$\varphi'(u) = -\frac{\alpha^n (u(1+r)+c)^{n-1} e^{-\alpha(u(1+r)+c)}}{(n-1)!}(1+r) + \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(u(1+r)+c-y) \times$$

$$\times \frac{\alpha^n (1+r)}{(n-2)!} y^{n-2} e^{-\alpha y} dy - \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(u(1+r)+c-y) \frac{\alpha^{n+1}(1+r)}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\alpha y} dy.$$

Далі, записуючи значення другого інтеграла з (6) та підставляючи цей вираз в щойно отримане рівняння, знаходимо

$$\varphi'(u) = \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(u(1+r)+c-y)\frac{\alpha^n(1+r)}{(n-2)!}y^{n-2}e^{-\alpha y}\,dy -$$

$$- \int_0^{u(1+r)+c} \frac{\alpha^{n+1}(1+r)}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-\alpha y}\,dy -$$

$$- \frac{\alpha^n(1+r)}{(n-1)!}(u(1+r)+c)^{n-1}e^{-\alpha(u(1+r)+c)} - \alpha(1+r)\varphi(u) + \alpha(1+r). \qquad (9)$$

Знову виконуючи заміну в першому інтегралі $u(1+r)+c-y = x$, шляхом елементарних перетворень приходимо до висновку, що права частина (9) є диференційовною по u. Далі існування похідних третього і т. д. порядків не будемо обґрунтовувати.

Диференціюючи (9) по u, маємо

$$\varphi''(u) = -\frac{\alpha^n(1+r)^2}{(n-2)!}(u(1+r)+c)^{n-2}e^{-\alpha(u(1+r)+c)} +$$

$$+ \varphi(0)\frac{\alpha^n(1+r)^2}{(n-2)!}(u(1+r)+c)^{n-2}e^{-\alpha(u(1+r)+c)} - \alpha(1+r)\varphi'(u) +$$

$$+ \int_0^{u(1+r)+c} \varphi'_u(u(1+r)+c-y)\frac{\alpha^n y^{n-2}e^{-\alpha y}}{(n-2)!}(1+r)^2\,dy. \qquad (10)$$

Інтегруючи частинами інтеграл з (10), отримуємо

$$\int_0^{u(1+r)+c} \varphi'_u(u(1+r)+c-y)\frac{\alpha^n(1+r)^2}{(n-2)!}y^{n-2}e^{-\alpha y}\,dy =$$

$$= \frac{\alpha^n(1+r)^2}{(n-2)!}(u(1+r)+c)^{n-2}e^{-\alpha(u(1+r)+c)}\varphi(0) +$$

$$+ \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(u(1+r)+c-y)\frac{\alpha^n(1+r)^2}{(n-3)!}y^{n-3}e^{-\alpha y}\,dy -$$

$$- \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(u(1+r)+c-y)\frac{\alpha^{n+1}(1+r)^2}{(n-2)!}y^{n-2}e^{-\alpha y}\,dy. \qquad (11)$$

Знову виконуючи ті самі дії, що і раніше, знаходимо

$$\varphi''(u) = \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(u(1+r)+c-y)\frac{\alpha^n(1+r)^2}{(n-3)!}y^{n-3}e^{-\alpha y}\,dy -$$

$$- \int_0^{u(1+r)+c} \frac{\alpha^n(1+r)^2}{(n-3)!}y^{n-3}e^{-\alpha y}\,dy -$$

$$- 2\alpha(1+r)\varphi'(u) - (\alpha(1+r))^2\varphi(u) + (\alpha(1+r))^2 \qquad (12)$$

і

$$\varphi'''(u) = \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(u(1+r)+c-y)\frac{\alpha^n(1+r)^3}{(n-4)!}y^{n-4}e^{-\alpha y}\,dy -$$

$$- \int_0^{u(1+r)+c} \frac{\alpha^n(1+r)^3}{(n-4)!}y^{n-4}e^{-\alpha y}\,dy -$$

$$- 3\alpha(1+r)\varphi''(u) - 3(\alpha(1+r))^2\varphi'(u) - (\alpha(1+r))^3\varphi(u) + (\alpha(1+r))^3. \qquad (13)$$

Диференціюючи рівняння (13), потім беручи частинами інтеграл і виконуючи елементарні перетворення, одержуємо

$$\varphi^{(\mathrm{IV})}(u) = \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(u(1+r)+c-y)\frac{\alpha^n(1+r)^4}{(n-5)!}y^{n-5}e^{-\alpha y}\,dy -$$

$$- \int_0^{u(1+r)+c} \frac{\alpha^n(1+r)^4}{(n-5)!}y^{n-5}e^{-\alpha y}\,dy -$$

$$- 4\alpha(1+r)\varphi'''(u) - 6(\alpha(1+r))^2\varphi''(u) - 4(\alpha(1+r))^3\varphi'(u) -$$

$$- (\alpha(1+r))^4\varphi(u) + (\alpha(1+r))^4. \qquad (14)$$

Продовжуючи цю процедуру, помічаємо, що коефіцієнти при похідних — це коефіцієнти з трикутника Паскаля. Таким чином, диференціюючи $n-1$ раз, маємо

$$\varphi^{(n-1)}(u) = \int_0^{u(1+r)+c} \varphi(u(1+r)+c-y)\alpha^n(1+r)^{n-1}e^{-\alpha y}\,dy -$$

$$- \int_0^{u(1+r)+c} \frac{\alpha^n(1+r)^{n-1}}{(n-8)!}e^{-\alpha y}\,dy -$$

$$- C_{n-1}^1\alpha(1+r)\varphi^{(n-2)}(u) - C_{n-1}^2(\alpha(1+r))^2\varphi^{(n-3)}(u) - \ldots$$

$$\ldots - C_{n-1}^{n-2}(\alpha(1+r))^{n-2}\varphi'(u) - C_{n-1}^{n-1}(\alpha(1+r))^{n-1}\varphi(u) + (\alpha(1+r))^{n-1}. \qquad (15)$$

Отже, знову диференціюючи (15), отримуємо

$$\varphi^{(n)}(u) = \int_0^{u(1+r)+c} \varphi'_u(u(1+r)+c-y)\alpha^n(1+r)^n e^{-\alpha y}\,dy +$$

$$+ \varphi(0)\alpha^n(1+r)^n e^{-\alpha(u(1+r)+c)} - C_{n-1}^1\alpha(1+r)\varphi^{(n-1)}(u) - C_{n-1}^2(\alpha(1+r))^2\varphi^{(n-2)}(u) - \ldots$$

$$\ldots - C_{n-1}^{n-2}(\alpha(1+r))^{n-2}\varphi''(u) - C_{n-1}^{n-1}(\alpha(1+r))^{n-1}\varphi'(u). \qquad (16)$$

Зінтегрувавши частинами інтеграл в (16), а потім підставивши його значення в (16) та виконавши елементарні математичні перетворення, остаточно будемо мати

$$\varphi^{(n)}(u) = \alpha^n(1+r)^n\varphi(u(1+r)+c) - C_n^1\alpha(1+r)\varphi^{(n-1)}(u) -$$

$$- C_n^2(\alpha(1+r))^2\varphi^{(n-2)}(u) - \ldots - C_n^{n-1}(\alpha(1+r))^{n-1}\varphi'(u) - (\alpha(1+r))^n\varphi(u).$$

Таким чином, ми отримали диференціальне рівняння з аргументом, що відхиляється, або таке диференціальне рівняння, до якого невідома функція та її похідні входять при різних значеннях аргументу.

Записавши це рівняння інакше, остаточно матимемо

$$\varphi^{(n)}(u) = \alpha^n(1+r)^n[\varphi(u(1+r)+c)-\varphi(u)] - C_n^1\alpha(1+r)\varphi^{(n-1)}(u) -$$

$$- C_n^2(\alpha(1+r))^2\varphi^{(n-2)}(u) - C_n^3(\alpha(1+r))^3\varphi^{(n-3)}(u) - \ldots - C_n^{n-1}(\alpha(1+r))^{n-1}\varphi'(u),$$

що і потрібно було довести.

Теорема 2. *В умовах теореми* 1 *розв'язок рівняння* (5) *має вигляд*

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\alpha(1+r)(A^k u)}, \tag{17}$$

де

$$A^k u = (1+r)^k u + c\frac{(1+r)^k - 1}{r}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$d_k = \frac{d_0}{(1-b)^n(1-b^2)^n(1-b^3)^n \ldots (1-b^k)^n}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$b = 1 + r, \quad d_0 = (1-D(c,\alpha,n))\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1-e^{-\alpha(1+r)^k c}(1-D(c,\alpha(1-(1+r)^{k+1}),n))\right)}{(1-b)^n(1-b^2)^n\ldots(1-b^k)^n}\right)^{-1},$$

$$D(c,\alpha,n) = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)}\int_0^c y^{n-1}e^{-\alpha y}dy = 1 - e^{-\alpha c}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(\alpha c)^p}{p!}.$$

Доведення. Розв'язок рівняння (5) будемо шукати у вигляді (17) методом невизначених коефіцієнтів. Для цього знайдемо спочатку $\varphi'(u)$, $\varphi''(u), \ldots$ $\ldots, \varphi^{(n)}(u)$, $\varphi(bu+c)$. Тут і далі для простоти покладемо $b = 1 + r$, а $\beta = \alpha(1+r)$, отже,

$$\varphi'(u) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\beta(A^k u)}(A^k u)'(-\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\beta(A^k u)}(-\beta b^k),$$

$$\varphi''(u) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\beta(A^k u)}(A^k u)'\beta^2 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\beta(A^k u)}\beta^2 b^{2k},$$

$$\varphi'''(u) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\beta(A^k u)}(-\beta^3 b^{3k}),$$

$$\varphi^{(\mathrm{IV})}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\beta(A^k u)}\beta^4 b^{4k},$$

. . . .

$$\varphi^{(n-1)}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\beta(A^k u)}\beta^{n-1} b^{(n-1)k},$$

$$\varphi^{(n)}(u) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\beta(A^k u)}(-\beta^n) b^{nk},$$

$$\varphi(bu+c) = \varphi(Au) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\beta(A^{k+1}u)} = \sum_{i=1}^{\infty} d_{i-1} e^{-\beta(A^i u)},$$

де

$$A^0 u = u, \qquad A^1 u = bu + c, \qquad A^2 u = b(bu+c) + c = b^2 u + cb + c,$$

$$A^3 u = b^3 u + cb^2 + cb + c, \ \ldots, \ A^k u = (1+r)^k u + c\frac{(1+r)^k - 1}{r}, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Підставляючи знайдені значення в рівняння (5), отримуємо рівняння

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\beta(A^k u)}(-\beta^n) b^{nk} = \beta^n \left(\sum_{i=1}^{\infty} d_{i-1} e^{-\beta(A^i u)} - \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\beta(A^k u)} \right) -$$

$$- C_n^1 \beta \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\beta(A^k u)} \beta^{n-1} b^{(n-1)k} - C_n^2 \beta^2 \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\beta(A^k u)} (-\beta^{n-2}) b^{(n-2)k} - \ldots$$

$$\ldots - C_n^{n-1} \beta^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\beta(A^k u)} (-\beta) b^k. \tag{18}$$

Далі будемо послідовно задавати значення k в рівнянні (18), щоб знайти невідомі коефіцієнти d_k.

Нехай спочатку $k = 0$. Тоді

$$d_0(-\beta^n) e^{-\beta u} = -\beta^n d_0 e^{-\beta u} - C_n^1 \beta^n d_0 e^{-\beta u} + C_n^2 \beta^n d_0 e^{-\beta u} - \ldots + C_n^{n-1} \beta^n d_0 e^{-\beta u},$$

$$0 = 0.$$

Тут ми скористались формулою $C_n^m = C_n^{m-n}$. Далі, нехай $k = 1$:

$$d_1(-\beta^n b^n) e^{-\beta(bu+c)} = \beta^n \big(d_0 e^{-\beta(bu+c)} - d_1 e^{-\beta(bu+c)}\big) - C_n^1 \beta^n b^{n-1} e^{-\beta(bu+c)} d_1 +$$

$$+ C_n^2 \beta^n b^{n-2} e^{-\beta(bu+c)} d_1 - C_n^3 \beta^n b^{n-3} e^{-\beta(bu+c)} d_1 + \ldots + C_n^{n-1} \beta^n b e^{-\beta(bu+c)} d_1,$$

$$d_1\big(1 - C_n^0 b^n + C_n^1 b^{n-1} - C_n^2 b^{n-2} + C_n^3 b^{n-3} - \ldots - C_n^{n-1} b\big) = d_0.$$

Оскільки вираз у дужках є формулою бінома Ньютона, то, використавши її, матимемо

$$d_1(1-b)^n = d_0,$$

$$d_1 = \frac{d_0}{(1-b)^n}.$$

Нехай $k = 2$. Тоді

$$d_2(-\beta^n b^{2n}) e^{-\beta(b^2 u + bc + c)} = \beta^n \big(d_1 e^{-\beta(b^2 u + bc + c)} - d_2 e^{-\beta(b^2 u + bc + c)}\big) -$$

$$- C_n^1 \beta^n b^{2(n-1)} e^{-\beta(b^2 u + bc + c)} d_2 + C_n^2 \beta^n b^{2(n-2)} e^{-\beta(b^2 u + bc + c)} d_2 -$$

$$- C_n^3 \beta^n b^{2(n-3)} e^{-\beta(b^2 u + bc + c)} d_2 + \ldots + C_n^{n-1} \beta^n b^2 e^{-\beta(b^2 u + bc + c)} d_2,$$

$$d_2(1 - C_n^0 b^{2n} + C_n^1 b^{2(n-1)} - C_n^2 b^{2(n-2)} + C_n^3 b^{2(n-3)} - \ldots - C_n^{n-1} b^2) = d_1,$$

$$d_2(1 - b^2)^n = d_1.$$

Отже,

$$d_2 = \frac{d_1}{(1 - b^2)^n} = \frac{d_0}{(1 - b)^n (1 - b^2)^n}.$$

При $k = 3$ матимемо

$$d_3 = \frac{d_2}{(1 - b^3)^n} = \frac{d_0}{(1 - b)^n (1 - b^2)^n (1 - b^3)^n}.$$

Продовжуючи таким способом задавати значення k, приходимо до того, що

$$d_k = \frac{d_0}{(1 - b)^n (1 - b^2)^n (1 - b^3)^n \ldots (1 - b^k)^n}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Отже, розв'язок рівняння (5) буде мати вигляд

$$\varphi(u) = d_0 \left(e^{-\alpha b u} + \frac{e^{-\alpha b (Au)}}{(1-b)^n} + \frac{e^{-\alpha b (A^2 u)}}{(1-b)^n (1-b^2)^n} + \frac{e^{-\alpha b (A^3 u)}}{(1-b)^n (1-b^2)^n (1-b^3)^n} + \ldots \right), \tag{19}$$

де d_0 знаходиться з умови

$$\varphi(0) = 1 - \int_0^c \frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!} dy + \int_0^c \varphi(c - y) \frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!} dy,$$

що і потрібно було довести.

4. Доведення єдиності розв'язку. Зазначимо, що в роботі [3] було вивчено аналітичні розв'язки рівняння типу

$$y(x) + a_1 y'(x) + \ldots + a_p y^p(x) = \lambda y(qx + h) \tag{20}$$

з постійними коефіцієнтами і лінійними відхиленнями аргументу, що має такий вигляд, як і отримане нами рівняння (5). Тут було доведено, що при $q > 1$ (у розглядуваному випадку $q = 1 + r$, де r — відсоткова ставка) можуть бути знайдені розв'язки, що існують тільки для дійсних x при спеціальних значеннях λ, і розв'язки зникають разом з їх похідними для нескінченної послідовності значень x.

У роботі [3] доведено, що характер розв'язків залежить від властивостей функції

$$\theta(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)},$$

область збіжності ряду при $|q| < 1$ визначається нерівністю $\lambda < 1$, а при $|q| >$ > 1 він збігається на всій площині. Також було розглянуто різні випадки параметрів, однак випадок, який ми розглядаємо у цій статті, не був досліджений.

Неважко переконатися, що $\varphi(u) \equiv 1$ також є розв'язком рівняння (5). Разом з тим даний розв'язок не становить інтересу, оскільки зрозуміло, що при $u \to \infty$ $\varphi(u)$ повинно прямувати до 0, причому $\varphi(u)$ монотонно спадає зі зростанням u.

Природно довести єдиність розв'язку в класі функцій, що прямують до нуля, при прямуванні аргументу до нескінченності для рівняння (6). Внаслідок тотожності перетворень з єдиності розв'язку рівняння (6) буде випливати єдиність розв'язку рівняння (5) для класу функцій, що мають похідні необхідного порядку, та такі, що прямують до нуля при $u \to \infty$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Розв'язок рівняння* (5) *має вигляд* (17), *причому він є єдиним.*

Доведення. Припустимо, що існують два різних рівняння для знаходження ймовірності банкрутства страхової компанії, розміри пред'явлених позовів до якої мають гамма-розподіл з параметрами (n, α), тобто

$$\varphi_1(u) = 1 - \int_0^{u(1+r)+c} \frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!} dy + \int_0^{u(1+r)+c} \varphi_1(u(1+r)+c-y) \frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!} dy, \quad (21)$$

$$\varphi_2(u) = 1 - \int_0^{u(1+r)+c} \frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!} dy + \int_0^{u(1+r)+c} \varphi_2(u(1+r)+c-y) \frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!} dy. \quad (22)$$

Віднімаючи (22) від (21), отримуємо

$$\varphi_1(u) - \varphi_2(u) = \int_0^{u(1+r)+c} \frac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!} (\varphi_1(u(1+r)+c-y) - \varphi_2(u(1+r)+c-y)) dy. \quad (23)$$

Далі, нехай $l_n = \max\limits_{0 \le y < \infty} z(y)$, де $z(y) = \dfrac{\alpha^n y^{n-1} e^{-\alpha y}}{(n-1)!}$, причому $\max\limits_{0 \le y < \infty} z(y)$, як неважко перевірити, досягається в точці $y = \dfrac{\alpha}{n-1}$. Отже, скориставшись цим та виконавши у (23) заміну $u(1+r)+c-y = u_1$, будемо мати оцінку

$$|\varphi_1(u) - \varphi_2(u)| \le \int_0^{u(1+r)+c} l_n |\varphi_1(u_1) - \varphi_2(u_1)| du_1. \quad (24)$$

Зафіксуємо довільне додатне мале ε. Однозначність розв'язку буде доведено, якщо ми покажемо, що для наперед заданого малого ε виконується нерівність

$$\sup_{u \in [0;\infty]} |\varphi_1(u) - \varphi_2(u)| \le \varepsilon. \quad (25)$$

Оскільки $\lim\limits_{u \to \infty} \varphi_1(u) = \lim\limits_{u \to \infty} \varphi_2(u) = 0$ (це природна умова для ймовірності банкрутства страхової компанії), то для додатного числа $\varepsilon / 2$ знайдеться N таке, що

$$\sup_{u \in [N;\infty]} |\varphi_1(u) - \varphi_2(u)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді

$$\sup_{u \in [0;\infty]} |\varphi_1(u) - \varphi_2(u)| \le \sup_{u \in [0;N]} |\varphi_1(u) - \varphi_2(u)| + \sup_{u \in [N;\infty]} |\varphi_1(u) - \varphi_2(u)| \le$$

$$\le \sup_{u \in [0;N]} |\varphi_1(u) - \varphi_2(u)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далі, використовуючи (24), маємо

$$|\varphi_1(u)-\varphi_2(u)| \le \int_0^{u(1+r)+c} l_n|\varphi_1(u_1)-\varphi_2(u_1)|du_1 \le$$

$$\le l_n^2 \int_0^{u(1+r)+c}\int_0^{u_1(1+r)+c} |\varphi_1(u_2)-\varphi_2(u_2)|du_1du_2 \le \ldots$$

$$\ldots \le l_n^m \int_0^{u(1+r)+c}\int_0^{u_1(1+r)+c}\int_0^{u_2(1+r)+c}\ldots\int_0^{u_{m-1}(1+r)+c} |\varphi_1(u_m)-\varphi_2(u_m)|du_1\ldots du_m .$$

З огляду на те, що $|\varphi_1(u_m)-\varphi_2(u_m)| \le 1$, отримуємо

$$l_n^m \int_0^{u(1+r)+c}\int_0^{u_1(1+r)+c}\int_0^{u_2(1+r)+c}\ldots\int_0^{u_{m-1}(1+r)+c} |\varphi_1(u_m)-\varphi_2(u_m)|du_1\ldots du_m \le$$

$$\le l_n^m \int_0^{u(1+r)+c}\int_0^{u_1(1+r)+c}\int_0^{u_2(1+r)+c}\ldots\int_0^{u_{m-1}(1+r)+c} du_1\ldots du_m \le$$

$$\le l_n^m \int_0^{u(1+r)+c}\int_0^{u_1(1+r)+c}\int_0^{u_2(1+r)+c}\ldots\int_0^{u_{m-2}(1+r)+c} (u_{m-1}(1+r)+c)du_1\ldots du_{m-1} \le$$

$$\le \frac{l_n^m}{2!(1+r)} \int_0^{u(1+r)+c}\int_0^{u_1(1+r)+c}\int_0^{u_2(1+r)+c}\ldots\int_0^{u_{m-3}(1+r)+c} (u_{m-2}(1+r)^2+c(1+r)+c)^2du_1\ldots du_{m-2} \le$$

$$\le \frac{l_n^m}{3!(1+r)^3} \int_0^{u(1+r)+c}\int_0^{u_1(1+r)+c}\int_0^{u_2(1+r)+c}\ldots$$

$$\ldots\int_0^{u_{m-4}(1+r)+c} (u_{m-3}(1+r)^3+c(1+r)^2+c(1+r)+c)^3du_1\ldots du_{m-3} \le \ldots$$

$$\ldots \le \frac{l_n^m\left(N(1+r)^m + c\dfrac{(1+r)^m-1}{r}\right)^m}{m!(1+r)^m}.$$

Отже, остаточно

$$|\varphi_1(u)-\varphi_2(u)| \le \frac{l_n^m\left(N(1+r)^m + c\dfrac{(1+r)^m-1}{r}\right)^m}{m!(1+r)^m},$$

або з використанням позначень, що були введені в (17),

$$|\varphi_1(u)-\varphi_2(u)| \le \frac{l_n^m(A^mN)^m}{m!(1+r)^m}. \tag{26}$$

Далі, з урахуванням формули Стерлінга, а саме $m! \geq \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}$, (26) набере вигляду

$$|\varphi_1(u) - \varphi_2(u)| \leq \frac{(el_n(A^m N))^m}{(m(1+r))^m \sqrt{2\pi m}},$$

тобто при великих m

$$\sup_{u \in [0;N]} |\varphi_1(u) - \varphi_2(u)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким чином, нерівність (25) виконується.

Теорему доведено.

5. Висновки. Знайдено в явному вигляді ймовірність банкрутства страхової компанії за нескінченне число кроків як функцію від початкового капіталу за умови, що страхова компанія має можливість у кожен момент часу $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ розміщати свій капітал на банківському депозиті, а розміри позовів до страхової компанії описуються гамма-розподілом з параметрами (n, α).

Автори глибоко вдячні професору В. В. Волчкову за плідне обговорення питань, що розглядаються в цій статті.

1. *Мельников А. В.* Риск – менеджмент: стохастический анализ рисков в экономике финансов и страхования. – М.: Анкил, 2001.
2. *Мельников А. В., Волков С. Н., Нечаев М. Л.* Математика финансовых обязательств. – М.: ГУ ВШЭ, 2001.
3. *Fjelstad J. E.* On certain linear functional differential equations with constant coefficients // Arch. Math. Naturvid. – 1949. – **50.** – P. 1 – 64.

Одержано 23.06.2006