УДК 517.9

В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Л. А. Крук (Ин-т механики НАН Украины, Киев)

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ОДНОЧАСТОТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ПОДВИЖНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

We demonstrate the application of the Bogolyubov–Mitropol'skii asymptotic method to the construction of one-frequency solutions of a system of nonlinear equations that describe multimode free, forced, and parametrically excited oscillations of cylindrical shells under interaction with flowing fluid.

Показано застосування асимптотичного методу Боголюбова – Митропольського до побудови одночастотних розв'язків системи нелінійних рівнянь, що описують багатомодові вільні, вимушені та параметрично збуджувані коливання циліндричних оболонок при взаємодії з рухомою рідиною.

Нелинейные задачи об устойчивости и колебаниях тонких цилиндрических оболочек, взаимодействующих с протекающей внутри их жидкостью, представляют существенный интерес для расчетов разнообразных трубопроводных систем на динамическую прочность и эксплуатационную надежность. Сложность решения такого рода задач обусловлена прежде всего тем, что для корректного описания динамических процессов, характеризующих поведение оболочечно-жидкостного объекта, необходимо рассматривать многомерные нелинейные расчетные модели [1 – 3], т. е. исследовать нелинейные колебательные системы со многими степенями свободы. Как известно [4, 5], такие модели подчас трудно (например, при наличии внутренних резонансов) поддаются последовательному анализу и не допускают ряда качественных и наглядных приемов, которые возможно применить для нелинейных систем с одной степенью свободы. Еще одна особенность обсуждаемых задач заключается в том, что действующие на оболочку со стороны подвижной жидкости силы гидродинамического давления представляют собой специфические неконсервативные, зависящие от скоростей деформирования этой оболочки силы, характеризуемые несимметричными матрицами коэффициентов. При определенных („критических") скоростях движения жидкости такие силы могут обусловить динамическую потерю устойчивости несущей оболочки [1], вследствие чего возникнут неосесимметричные колебания с прогрессирующими амплитудами.

В недавно опубликованных работах (см., например, [2, 3]) впервые были рассмотрены нелинейные задачи о колебаниях взаимодействующих с жидкостью цилиндрических оболочек, моделируемых системами со многими степенями свободы. При этом для построения решений исходных систем нелинейных уравнений колебаний применялись некоторые современные численные методы (в частности, программный пакет AUTO и др.). В данной работе для расчета многопараметрических (иначе, многомодовых) колебаний оболочек конечной длины, несущих подвижную жидкость, предлагается использовать разработанный Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским асимптотический метод, ориентированный на исследование одночастотных режимов в нелинейных системах со многими степенями свободы [4, 5]. Предполагается также, что кроме взаимодействия с потоком жидкости оболочка может подвергаться действию внешних периодических нагрузок — как поперечной, неравномерно распределенной по боковой поверхности, так и продольной, приложенной к торцевым сечениям. Скорость движения жидкости в оболочке может быть постоянной либо содержащей малые по амплитуде пульсационные слагаемые.

1. Исходную систему многомерных нелинейных уравнений, которые описывают динамику заполненных подвижной жидкостью круговых цилиндрических оболочек, подверженных действию внешних периодических нагрузок, в общем случае можно свести к виду (см., например, [1 – 3, 6, 7])

$$\ddot{f}_k + (\omega_k^2 - \alpha_k U^2 - \varepsilon\gamma_k \cos\nu t) f_k + h_k \dot{f}_k + U \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \dot{f}_j =$$

$$= \varepsilon F_k(\{f_p\}) + \varepsilon Q_k \cos\Omega t. \tag{1.1}$$

Здесь $\dot{f} = \dfrac{df_k}{dt}$; $\ddot{f} = \dfrac{d^2 f_k}{dt^2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$; f_k— неизвестные функции времени, имеющие смысл обобщенных координат оболочки; $\{\omega\} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ — частотный спектр оболочки с учетом влияния присоединенной массы жидкости; U — постоянная или переменная скорость движения жидкости, направленная вдоль оси оболочки; α_k, β_{jk} — постоянные коэффициенты, характеризующие действие гидродинамического давления, причем параметры β_{jk} можно представить так: $\beta_{jk} = \beta_{jk}^{(1)} + \beta_{jk}^{(2)}$, где $\beta_{jk}^{(1)} = \beta_{kj}^{(1)}$, $\beta_{jk}^{(2)} = -\beta_{kj}^{(2)}$; γ_k и Q_k — постоянные параметры, определяющие амплитудные уровни соответственно продольного с частотой ν и поперечного с частотой Ω периодических воздействий на оболочку; $F_k(\{f_p\})$ — нелинейные аналитические функции переменных $f_1, f_2, \ldots, f_n$ вида [2, 8]

$$F_k = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \delta_{pqr}^{(k)} f_p f_q f_r, \qquad \delta_{pqr}^{(k)} = \text{const}; \tag{1.2}$$

h_k — параметры демпфирования; ε — малый параметр $(0 < \varepsilon << 1)$.

Таким образом, малыми величинами в системе (1.1) предполагаются члены, обусловленные геометрической нелинейностью оболочки (обоснованность этого тезиса приведена в [8]), а также внешние воздействия, поскольку в дальнейшем предполагается рассматривать представляющие наибольший практический интерес резонансные колебания этой оболочки [4].

2. Для построения одночастотных асимптотических решений общей системы (1.1) необходимо, чтобы соответствующая ей невозмущенная система

$$\ddot{f}_k + (\omega_k^2 - \alpha_k U^2) f_k + h_k \dot{f}_k + U \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \dot{f}_j = 0, \tag{2.1}$$

полученная из (1.1) при $\varepsilon = 0$, удовлетворяла определенным требованиям [4, 5] (здесь и далее индекс k принимает целочисленное значение из интервала $1 \leq$ $\leq k \leq n$).

Предположим, что скорость движения жидкости в оболочке постоянна, т. е. $U = U_0 = \text{const}$. Рассмотрим прежде задачу о свободных колебаниях системы (1.1), положив $\gamma_k = 0$, $Q_k = 0$. Из общего вида невозмущенной системы (2.1) следует, что статические решения в ней, кроме тривиальных, невозможны (случай $\omega_k^2 - \alpha_k U^2 = 0$ соответствует, как известно [1], неколебательным формам деформирования оболочки типа дивергенция и поэтому из рассмотрения исключается). Вследствие учета демпфирования внутренние резонансы в (2.1) будут отсутствовать. В то же время незатухающие гармонические колебания, описываемые системой (2.1) и зависящие от двух произвольных постоянных, возможны лишь при определенных значениях скоростей U_0. Для их нахождения составим характеристическое уравнение для системы (2.1), положив $f_k = C_k e^{i\lambda t}$ ($C_k = \text{const}$, $i\lambda = s$ — характеристический показатель, $i = \sqrt{-1}$):

$$\left\| (-\lambda^2 + \omega_k^2 - \alpha_k U_0^2 + h_k i\lambda)\delta_{jk} + \beta_{jk} U_0 i\lambda \right\| = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Здесь δ_{jk} — символ Кронекера.

Если все показатели s находятся в левой полуплоскости комплексной переменной, невозмущенная форма несущей оболочки всегда будет устойчива и, таким образом, самовозбуждаемые колебания не будут возникать в рассматриваемой системе.

Наименьшее значение скорости U_0 (обозначим его U_0^*), при котором один из показателей s переходит на правую полуплоскость (оставаясь при этом комплексным), называется критической скоростью движения жидкости. Соответствующую этой скорости частоту возникающих колебаний обозначим λ_*. Ее определяем из уравнения (2.2), в котором полагаем $U_0 = U_0^*$.

С учетом изложенных выше замечаний и предположений можно переходить к построению одночастотных (с базовой частотой λ_*) периодических решений системы (1.1). Решение будем искать в окрестности критического значения скорости U_0^*, положив $U_0 = U_0^* + \varepsilon\Delta_1$, где $\varepsilon\Delta_1$ — малая „расстройка" скоростей. Ограничившись пока первым приближением, представим это решение в соответствии с [4, 5] в виде

$$f_k = a(\varphi_k e^{i\psi} + \overline{\varphi}_k e^{-i\psi}), \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{2.3}$$

где φ_k — нетривиальные решения системы однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} [(-\lambda_*^2 + \omega_k^2 - \alpha_k U_0^{*2} + h_k i\lambda_*)\delta_{jk} + \beta_{jk} U_0^* i\lambda_*]\varphi_j = 0; \tag{2.4}$$

$\overline{\varphi}_k$ — комплексно-сопряженные величины; a и ψ — неизвестные функции времени, определяемые из уравнений

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \qquad \frac{d\psi}{dt} = \lambda_* + \varepsilon B_1(a). \tag{2.5}$$

Неизвестные величины $A_1(a)$ и $B_1(a)$ находим по изложенной в [4] методике. С этой целью представим исходную нелинейную систему (1.1), с учетом принятых условий $\gamma_k = 0$, $Q_k = 0$, в виде

$$\ddot{f}_k + (\omega_k^2 - \alpha_k U_0^{*2}) f_k + h_k \dot{f}_k + U_0^* \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \dot{f}_j =$$

$$= \varepsilon \left[\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \delta_{pqr}^{(k)} f_p f_q f_r + 2\alpha_k U_0^* \Delta_1 f_k - U_0^* \Delta_1 \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \dot{f}_j \right] + \varepsilon^2(\dots) \tag{2.6}$$

и определим входящие в эту систему производные (с точностью до величин, пропорциональных ε в первой степени):

$$\begin{aligned} \dot{f}_k &= ai\lambda_*(\varphi_k e^{i\psi} + \overline{\varphi}_k e^{-i\psi}) + \varepsilon[A_1(\varphi_k e^{i\psi} + \overline{\varphi}_k e^{-i\psi}) + \\ &\quad + aiB_1(\varphi_k e^{i\psi} - \overline{\varphi}_k e^{-i\psi})] + \varepsilon^2(\dots), \\ \ddot{f}_k &= -a\lambda_*^2(\varphi_k e^{i\psi} + \overline{\varphi}_k e^{-i\psi}) + \varepsilon[2ai\lambda_* A_1(\varphi_k e^{i\psi} - \overline{\varphi}_k e^{-i\psi}) - \\ &\quad - 2ai\lambda_* B_1(\varphi_k e^{i\psi} + \overline{\varphi}_k e^{-i\psi})] + \varepsilon^2(\dots). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Нелинейные функции $F_k(\dots)$ (1.2) запишем в виде разложения по гармоникам $\pm \bar{k} i\psi$, $\bar{k} = 1, 3$:

$$F_k(\ldots) = M_{k1}a^3e^{i\psi} + N_{k1}a^3e^{-i\psi} + M_{k2}a^3e^{3i\psi} + N_{k2}a^3e^{-3i\psi}, \tag{2.8}$$

где

$$M_{k1} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\delta_{pqr}^{(k)}[(\varphi_p\overline{\varphi}_q + \overline{\varphi}_p\varphi_q)\varphi_r + \varphi_p\varphi_q\overline{\varphi}_r],$$

$$N_{k1} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\delta_{pqr}^{(k)}[(\varphi_p\overline{\varphi}_q + \overline{\varphi}_p\varphi_q)\overline{\varphi}_r + \overline{\varphi}_p\overline{\varphi}_q\varphi_r], \tag{2.9}$$

$$M_{k2} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\delta_{pqr}^{(k)}\varphi_p\varphi_q\varphi_r, \quad N_{k2} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\delta_{pqr}^{(k)}\overline{\varphi}_p\overline{\varphi}_q\overline{\varphi}_r.$$

Подставляя (2.3), (2.7), (2.8) в уравнения (2.6) и группируя члены при $e^{i\psi}$ и $e^{-i\psi}$, получаем соответственно такие системы уравнений:

$$\begin{gathered}(\omega_k^2 - \lambda_*^2 - \alpha_k U_0^{*2} + h_k i\lambda_*)a\varphi_k + i\lambda_* U_0^* a\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\varphi_j = \varepsilon G_{1k}(a),\\ (\omega_k^2 - \lambda_*^2 - \alpha_k U_0^{*2} - h_k i\lambda_*)a\overline{\varphi}_k - i\lambda_* U_0^* a\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\overline{\varphi}_j = \varepsilon G_{2k}(a).\end{gathered} \tag{2.10}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\varepsilon G_{1k}(a) = \varepsilon\left\{M_{k1}a^3 - (A_1 + iaB_1)\left[(2i\lambda_* + h_k)\varphi_k + U_0^*\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\varphi_j\right] + \right.\\ \left. + \Delta_1\left(2\alpha_k U_0^*\varphi_k - i\lambda_*\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\varphi_j\right)a\right\},\\ \varepsilon G_{2k}(a) = \varepsilon\left\{N_{k1}a^3 + (A_1 - iaB_1)\left[(2i\lambda_* - h_k)\overline{\varphi}_k - U_0^*\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\overline{\varphi}_j\right] + \right.\\ \left. + \Delta_1\left(2\alpha_k U_0^*\overline{\varphi}_k + i\lambda_*\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\overline{\varphi}_j\right)a\right\}.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Отметим, что определители „невозмущенных” систем (2.10) (когда $\varepsilon = 0$) равны нулю. В связи с этим для существования периодических решений f_k и однозначного определения неизвестных функций $A_1(a)$ и $B_1(a)$ в (2.5) необходимо и достаточно выполнение условий [4]

$$\sum_{k=1}^{n} G_{1k}(a)\chi_k = 0 \ \text{ для } \ s = +i\lambda_*, \quad \sum_{k=1}^{n} G_{2k}(a)\overline{\chi}_k = 0 \ \text{ для } \ s = -i\lambda_*, \tag{2.12}$$

где χ_k — нетривиальные, соответствующие характеристическому показателю $s = +i\lambda_*$ решения сопряженной по отношению к (2.4) системы однородных алгебраических уравнений, а именно,

$$\sum_{j=1}^{n}[(\omega_k^2 - \alpha_k U_0^{*2} - \lambda_*^2 - h_k i\lambda_*)\delta_{jk} - \beta_{kj}U_0^* i\lambda_*]\chi_j = 0, \tag{2.13}$$

$\overline{\chi}_k$ — комплексно-сопряженные величины, соответствующие другому показателю $s = -i\lambda_*$.

Введем обозначения

$$\sum_{k=1}^{n} M_{k1}\chi_k = k_1 + ik_2,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[(2i\lambda_* + h_k)\varphi_k + U_0^*\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\varphi_j\right]\chi_k = k_3 + ik_4, \tag{2.14}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(2\alpha_k U_0^*\varphi_k - i\lambda_*\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\varphi_j\right)\chi_k = k_5 + ik_6.$$

Здесь $k_1 \div k_6$ — действительные параметры. Тогда из первого уравнения (2.12) получим следующие выражения для искомых функций A_1 и B_1:

$$A_1(a) = \beta_0\Delta_1 a + \beta_1 a^3, \qquad B_1(a) = \beta_2\Delta_1 + \beta_3 a^2, \tag{2.15}$$

где

$$\beta_0 = \frac{1}{k_0^2}(k_3k_5 + k_4k_6), \qquad \beta_1 = \frac{1}{k_0^2}(k_1k_3 + k_2k_4),$$

$$\beta_2 = \frac{1}{k_0^2}(k_3k_6 - k_4k_5), \qquad \beta_3 = \frac{1}{k_0^2}(k_2k_3 - k_1k_4), \qquad k_0^2 = k_3^2 + k_4^2. \tag{2.16}$$

Аналогичные (2.15) соотношения можно получить и из второго уравнения (2.12).

Таким образом, выведены уравнения, с помощью которых можно определять в первом приближении амплитуды незатухающих колебаний, описываемых системой (1.1), вблизи границы динамической потери устойчивости, т. е. при $U_0 \approx U_0^*$. Установившиеся колебания здесь возможны при выполнении условий $\beta_0 > 0$, $\beta_1 < 0$, которые в случае $U_0 > U_0^*$ обычно выполняются для реальных оболочечно-жидкостных систем [9].

Стационарное значение амплитуды колебаний $a = a_0$ при принятых условиях определяется из соотношения

$$a_0 = \sqrt{-\frac{\beta_0\Delta_1}{\beta_1}}, \qquad \Delta_1 > 0. \tag{2.17}$$

3. Использовав изложенные выше результаты, рассмотрим одночастотные колебания в системе (1.1) при $Q_k \neq 0$, $\gamma_k = 0$, $k = 1 \div n$, т. е. при действии на боковую поверхность оболочки внешней гармонической силы. По-прежнему полагаем $U = U_0 \approx U_0^*$ и ограничимся рассмотрением резонансного случая, когда $\lambda_* \approx \Omega$. Приближенное решение уравнений (1.1) будем искать в виде

$$f_k = a(\varphi_k e^{i\psi} + \overline{\varphi}_k e^{-i\psi}), \tag{3.1}$$

где $\psi = \Omega t + \theta$, a и θ — медленно изменяющиеся функции времени, которые, в отличие от (2.5), определяются дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \theta), \qquad \frac{d\theta}{dt} = \lambda_* - \Omega + \varepsilon B_1(a, \theta). \tag{3.2}$$

Для нахождения неизвестных функций A_1 и B_1 используем изложенную ранее методику. Представим гармонические воздействия $Q_k \cos \Omega t$ в виде

$$Q_k \cos \Omega t = \frac{Q_k}{2}\left[(\cos\theta - i\sin\theta)e^{i\psi} + (\cos\theta + i\sin\theta)e^{-i\psi}\right]$$

и введем обозначения

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q_k \chi_k = q_1 + iq_2, \qquad \varepsilon\Delta_0 = \lambda_* - \Omega.$$

На основании уравнений (2.12) с учетом (2.16) получим равенства

$$A_1(a,\theta) = \beta_0\Delta_1 a + \beta_1 a^3 + R_1\cos\theta + S_1\sin\theta, \tag{3.3}$$

$$B_1(a,\theta) = \beta_2\Delta_1 + \beta_3 a^2 + \frac{1}{a}(S_1\cos\theta - R_1\sin\theta).$$

Здесь

$$R_1 = \frac{q_1k_3 + q_2k_4}{k_0^2}, \qquad S_1 = \frac{q_2k_3 - q_1k_4}{k_0^2},$$

а параметры $\beta_0 \div \beta_3$ определяются согласно (2.16).

Рассмотрим стационарные режимы одночастотных вынужденных колебаний рассматриваемой системы, положив $\frac{da}{dt} = 0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$. С учетом (3.3) получим амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) установившихся колебаний в исследуемой резонансной области:

$$\Delta_0 = -\beta_2\Delta_1 - \beta_3 a_0^2 \pm \sqrt{\frac{T^2}{a_0^2} - (\beta_0\Delta_1 + \beta_1 a_0^2)^2}, \tag{3.4}$$

где $T^2 = \dfrac{q_1^2 + q_2^2}{k_0^2}$.

Очевидно, что уравнение (3.4) может иметь несколько решений для установившихся амплитуд $a = a_0$. Для выяснения вопроса об устойчивости каждого из этих решений необходимо исследовать уравнения в вариациях, составленные для системы (3.2) с учетом (3.3). Условия устойчивости, которые в общем случае можно представить в виде [4]

$$\frac{\partial A_1}{\partial a} + \frac{\partial B_1}{\partial\theta} < 0, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial a}\frac{\partial B_1}{\partial\theta} - \frac{\partial A_1}{\partial\theta}\frac{\partial B_1}{\partial a} > 0,$$

с учетом (3.4) сводятся к неравенствам вида

$$\beta_1 a^2 < -\frac{\beta_0}{2}\Delta_1, \qquad (\beta_0\Delta_1 + 3\beta_1 a^2)(\beta_0\Delta_1 + \beta_1 a^2) + H^2(a) + 2\beta_3 H(a) a^2 > 0, \tag{3.5}$$

где

$$H(a) = \Delta_0 + \beta_2\Delta_1 + \beta_3 a^2.$$

С учетом условий $\beta_0 > 0$, $\beta_1 < 0$ первое из неравенств (3.5) эквивалентно следующему: $a^2 > a_0^2/2$, где a_0 — амплитуда устойчивых стационарных колебаний в автономной системе (1.1) (когда $\gamma_k = 0$, $Q_k = 0$), определяемая по формуле (2.17). Таким образом, при $U_0 > U_0^*$ устойчивые вынужденные колебания несущей оболочки с частотой Ω (режим принудительной „синхронизации” [10]) возможны лишь с амплитудами, превышающими величину $a_0/\sqrt{2}$, и реализуются в некоторой ограниченной частотной области $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$, ширина которой пропорциональна уровню внешнего гармонического воздействия. При $U_0 \to U_0^*$ указанная частотная область расширяется, поскольку в этом случае $a_0 \to 0$, и в пределе (при $U_0 = U_0^*$) устойчивые колебания реализуются во всей резонансной зоне.

Нарушение второго из критериев (3.5) происходит в тех точках амплитудно-частотной характеристики (3.4), в которой касательные к ним становятся вертикальными. Отметим, что такая ситуация возможна в случае, когда уравнение (3.4) имеет три действительных корня $a^2 = a^2(\Delta_0)$. В ином случае (при существовании лишь одного действительного корня для каждого из Δ_0) вертикальных касательных к АЧХ нет и, таким образом, определяющим критерием, регламентирующим устойчивость (неустойчивость) рассматриваемой системы, становится первый из критериев (3.5).

4. При параметрическом возбуждении системы (1.1) ($\gamma_k \neq 0$, $Q_k = 0$, $k = 1 \div n$) наибольший практический интерес представляет исследование одночастотных колебаний при главном демультипликационном резонансе [4], когда $\lambda_* \approx \nu/2$. В решении (3.1) и в системе (3.2) в данном случае следует заменить частоту Ω на $\nu/2$. Если учесть равенство

$$\gamma_k \cos\nu t = \frac{\gamma_k}{2}\left[(\cos 2\theta - \sin 2\theta)e^{2i\psi} + (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)e^{-2i\psi}\right]$$

и использовать обозначение

$$\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\overline{\varphi}_k\chi_k = p_1 + ip_2,$$

где p_1, p_2 — действительные величины, то система уравнений (3.2) для определения амплитуды и фазы параметрических колебаний примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \varepsilon\left[\beta_0\Delta_1 a + \beta_1 a^3 + (R_2\cos 2\theta + S_2\sin 2\theta)a\right],\\
\frac{d\theta}{dt} &= \lambda_* - \nu/2 + \varepsilon\left[\beta_2\Delta_1 + \beta_3 a^2 + (S_2\cos 2\theta - R_2\sin 2\theta)\right],
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$R_2 = \frac{p_1k_3 + p_2k_4}{k_0^2}, \qquad S_2 = \frac{p_2k_3 - p_1k_4}{k_0^2};$$

остальные параметры определяются из соотношений (2.16).

Особенностью рассматриваемой здесь задачи является то, что динамическая неустойчивость исследуемой системы может быть обусловлена одновременно двумя факторами: внешней параметрической нагрузкой и неконсервативными силами, вызванными жидкостным потоком. Поэтому целесообразно вначале исследовать устойчивость тривиального решения $a = 0$ на базе линейных частей уравнений (4.1). С этой целью введем новые переменные u и v согласно формулам

$$u = a\cos(\theta - \theta_0), \qquad v = a\sin(\theta - \theta_0),$$

где $\theta_0 = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{S_2}{R_2}$. В результате получим систему уравнений

$$\frac{du}{dt} = \varepsilon[(\beta_0\Delta_1 + M)u - (\Delta_0 + \beta_2\Delta_1)\nu],$$
$$\frac{d\nu}{dt} = \varepsilon[(\beta_0\Delta_1 - M)\nu + (\Delta_0 + \beta_2\Delta_1)u],$$

в которой

$$M = \sqrt{R_2^2 + S_2^2} = \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{k_0^2}}, \qquad \varepsilon\Delta_0 = \lambda_* - \frac{\nu}{2}.$$

Тривиальное решение этой системы $u = 0$, $\nu = 0$ будет устойчиво, если характеристическое уравнение

$$\bar{\lambda}^2 - (2\varepsilon\beta_0\Delta_1)\bar{\lambda} + \varepsilon^2\left[(\Delta_0 + \beta_2\Delta_1)^2 + (\beta_0^2\Delta_1^2 - M^2)\right] = 0$$

($\bar{\lambda}$ — характеристический показатель) имеет корни с отрицательными действительными частями. Поскольку

$$\bar{\lambda}_{1,2} = \varepsilon\beta_0\Delta_1 \pm \varepsilon\sqrt{M^2 - (\Delta_0 + \beta_2\Delta_1)^2},$$

очевидно, что условие $\mathrm{Re}\,\bar{\lambda} < 0$ будет выполняться в двух случаях:

$$\begin{gathered}\beta_0\Delta_1 < 0 \quad \text{при} \quad M^2 < (\Delta_0 + \beta_2\Delta_1)^2, \\ \beta_0\Delta_1 + \sqrt{M^2 - (\Delta_0 + \beta_2\Delta_1)^2} < 0 \quad \text{при} \quad M^2 > (\Delta_0 + \beta_2\Delta_1)^2.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Пусть $\beta_0 > 0$ (о возможности выполнения такого условия применительно к заполненным жидкостью оболочкам шла речь в п. 2). Из (4.2) следует, что при отсутствии параметрического возбуждения неустойчивость положения равновесия $u = 0$, $\nu = 0$ всегда имеет место при $U_0 > U_0^*$. Если $\Delta_1 = 0$, то область динамической неустойчивости (ОДН) определяется так:

$$\nu_1 < \nu < \nu_2, \tag{4.3}$$

где $\nu_{1,2} = 2(\lambda_* \mp M)$.

Если же $\Delta_1 < 0$ ($U_0 < U_0^*$), самовозбуждение одночастотных колебаний рассматриваемой системы произойдет в иной частотной области

$$\nu_3 < \nu < \nu_4. \tag{4.4}$$

Здесь $\nu_{3,4} = 2\left[\lambda_* + \beta_2\Delta_1 \mp \sqrt{M^2 - (\beta_0\Delta_1)^2}\right]$.

Из сравнения областей (4.3) и (4.4) можно заключить, что при $U_0 < U_0^*$ ОДН несколько сужается (по сравнению со случаем $U_0 = U_0^*$) и одновременно смещается в сторону бо́льших (при $\beta_2 < 0$) или меньших (при $\beta_2 > 0$) значений частоты параметрического возбуждения.

Вернемся к уравнениям (4.1) и определим на их основе АЧХ для установившегося одночастотного режима колебаний. Она будет иметь такой вид:

$$\Delta_0 = -\beta_2\Delta_1 - \beta_3 a_0^2 \pm \sqrt{M^2 - (\beta_0\Delta_1 + \beta_1 a_0^2)^2}. \tag{4.5}$$

Выполнение критериев

$$\begin{gathered}\beta_0\Delta_1 + 2\beta_1 a^2 < 0, \\ (\beta_1^2 + \beta_3^2)a^2 + (\beta_1\beta_0 + \beta_2\beta_3)\Delta_1 + \beta_3\Delta_0 > 0\end{gathered} \tag{4.6}$$

обеспечит устойчивость корней $a_0 = a_0(\Delta_0)$ уравнения (4.5) и позволит, таким образом, определить устойчивые и неустойчивые участки АЧХ.

5. Аналогичные в качественном отношении результаты расчета одночастотных колебаний рассматриваемой системы получаем при параметрическом возбуждении качественно другого типа, обусловленного, в частности, пульсациями скорости движения жидкости.

Пусть, например, скорость жидкости U в системе (1.1) изменяется по закону

$$U = U_0(1 + \varepsilon\mu_0 \cos\nu_1 t),$$

где $U_0 = \text{const}$, $\varepsilon\mu_0$ — малая амплитуда пульсаций скорости и, кроме того, выполняется условие $\lambda_* \approx \nu_1/2$. Полагаем, что оболочка не испытывает внешних воздействий ($\gamma_k = 0,\ Q_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$). Уравнения для определения амплитуды a и фазы θ колебаний

$$f_k = a(\varphi_k e^{i\psi_1} + \overline{\varphi}_k e^{-i\psi_1}), \qquad \psi_1 = \frac{\nu_1 t}{2} + \theta,$$

будут иметь вид (4.1) с учетом следующих замен:

$$R_2 = \frac{p_{11}k_3 + p_{12}k_4}{k_0^2}, \qquad S_2 = \frac{p_{12}k_3 - p_{11}k_4}{k_0^2},$$

где параметры p_{11}, p_{12} определяются из соотношения

$$\mu_0 U_0 \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k U_0 \overline{\varphi}_k + \frac{i\lambda_*}{2}\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\overline{\varphi}_j\right)\chi_k = p_{11} + ip_{12}.$$

Амплитудно-частотные характеристики и критерии устойчивости совпадут по форме с (4.5), (4.6). При этом следует принять $\varepsilon\Delta_0 = \lambda_* - \nu_1/2$, $M = \sqrt{\dfrac{p_{11}^2 + p_{12}^2}{k_0^2}}$. Как видно, в данном случае АЧХ в отличие от (4.5) более сложным образом зависит от величины критической скорости жидкости U_0^* из-за $M = M(U_0^*)$. По этой же причине параметр U_0^* окажет существенное влияние и на области динамической неустойчивости (4.3) и (4.4).

6. Все представленные ранее одночастотные решения системы (1.1) были построены в первом приближении, которым обычно и ограничиваются при практическом исследовании нелинейных колебаний оболочечно-жидкостных объектов [1, 8, 11]. Используя асимптотический метод, можно построить также уточненные одночастотные решения уравнений (1.1), соответствующие, в частности, улучшенному первому приближению либо более высоким приближениям (пропорциональным ε^2, ε^3 и т. д.). Для иллюстрации рассмотрим приведенную в п. 2 задачу о свободных колебаниях оболочки при взаимодействии с протекающей с постоянной скоростью $U = U_0$ жидкостью. Улучшенное первое приближение системы (1.1) (в которой полагаем $\gamma_k = 0,\ Q_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n$) будем искать в виде (2.3) с учетом малых, пропорциональных параметру ε вибрационных слагаемых [4]

$$f_k = a(\varphi_k e^{i\psi} + \overline{\varphi}_k e^{-i\psi}) + \varepsilon u_{k1}(a, \psi). \tag{6.1}$$

Здесь $\psi = \lambda_* t + \theta$ (λ_* — частота одночастного режима, реализуемого при $U = U_0^*$); амплитуда a и фаза θ, по-прежнему, определяются из уравнений (2.5).

Дифференцируя (6.1) дважды по времени и пренебрегая членами, пропорциональными ε в степени выше первой, находим

$$\frac{df_k}{dt} = \varepsilon A_1\left(\varphi_k e^{i\psi} + \overline{\varphi}_k e^{-i\psi} + \varepsilon\frac{\partial u_{k1}}{\partial a}\right) + \varepsilon\beta_1\left[(\varphi_k e^{i\psi} - \overline{\varphi}_k e^{-i\psi})ia + \varepsilon\frac{\partial u_{k1}}{\partial\theta}\right] +$$
$$+ ai\lambda_*(\varphi_k e^{i\psi} - \overline{\varphi}_k e^{-i\psi}) + \varepsilon\frac{\partial u_{k1}}{\partial t},$$
$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} = 2\varepsilon A_1\left[(\varphi_k e^{i\psi} - \overline{\varphi}_k e^{-i\psi})i\lambda_* + \varepsilon\frac{\partial^2 u_{k1}}{\partial a\partial t}\right] - \tag{6.2}$$
$$- 2\varepsilon B_1\left[(\varphi_k e^{i\psi} + \overline{\varphi}_k e^{-i\psi})a\lambda_* - \varepsilon\frac{\partial^2 u_{k1}}{\partial\theta\partial t}\right] - ai\lambda_*^2(\varphi_k e^{i\psi} + \overline{\varphi}_k e^{-i\psi}) + \varepsilon\frac{\partial^2 u_{k1}}{\partial t^2}.$$

Как и в п. 2, далее полагаем $U_0 \approx U_0^*$. После подстановки (6.1), (6.2) в уравнения (1.1) получим систему для определения искомых функций $u_{k1}(a, \psi)$:

$$\frac{\partial^2 u_{k1}}{\partial t^2} + (\omega_k^2 - \alpha_k U_0^{*2})u_{k1} + h_k\frac{\partial u_{k1}}{\partial t} + U_0^*\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\frac{\partial u_{j1}}{\partial t} =$$
$$= \Phi_k(a, \psi) - (A_1 + iaB_1)\left[(2i\lambda_* + h_k)\varphi_k e^{i\psi} + U_0^*\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\varphi_j\right] +$$
$$+ (A_1 - iaB_1)\left[(2i\lambda_* - h_k)\overline{\varphi}_k e^{-i\psi} - U_0^*\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\overline{\varphi}_j\right]. \tag{6.3}$$

Здесь

$$\Phi_k(a, \psi) = \sum_{m=-3}^{3}\Phi_{k,m}(a)e^{im\psi}, \tag{6.4}$$

причем функции амплитуды $\Phi_{k,m}(a)$ выражаются, с учетом обозначений (2.9), следующим образом:

$$\Phi_{k,1} = M_{k1}a^3 + \Delta_1\left(2\alpha_k U_0^*\varphi_k - i\lambda_*\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\varphi_j\right)a,$$
$$\Phi_{k,-1} = N_{k1}a^3 + \Delta_1\left(2\alpha_k U_0^*\overline{\varphi}_k - i\lambda_*\sum_{j=1}^{n}\beta_{jk}\overline{\varphi}_j\right)a, \tag{6.5}$$
$$\Phi_{k,3} = M_{k2}a^3, \quad \Phi_{k,-3} = N_{k2}a^3, \quad \Phi_{k,m} = 0 \quad \text{при} \quad m = 0, \pm 2.$$

Представим функции u_{k1} в виде разложения, аналогично (6.4):

$$u_{k1}(a, \psi) = \sum_{m=-3}^{3}u_{k1}^{(m)}(a)e^{im\psi}, \tag{6.6}$$

где $u_{k1}^{(m)}(a)$ — параметры, подлежащие определению. Подставляя (6.4), (6.6) в уравнения (6.3) и приравнивая коэффициенты в левой и правой частях при одних и тех же гармониках, получаем две системы: при $m = 1$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[(\omega_k^2 - \alpha_k U_0^{*2} - \lambda_*^2 + h_k i\lambda_*)\delta_{jk} + \beta_{jk}U_0^* i\lambda_*\right]u_{j1}^{(1)}(a) =$$

$$= \Phi_{k,1}(a) - (A_1 + iaB_1)\left[(2i\lambda_* + h_k)\varphi_k + U_0^* \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk}\varphi_j\right] \tag{6.7}$$

(аналогичную систему получим при $m = -1$) и при $m \neq \pm 1$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[(\omega_k^2 - \alpha_k U_0^{*2} - m^2\lambda_*^2 + h_k im\lambda_*)\delta_{jk} + \beta_{jk}U_0^* im\lambda_*\right]u_{j1}^{(m)}(a) = \Phi_{k,m}(a). \tag{6.8}$$

Поскольку определитель системы (6.7) равен нулю, для существования вещественных периодических решений $u_{k1}(a,\psi)$ необходимо и достаточно выполнение условий „ортогональности" (2.12). На основании этих условий определяются непосредственно функции $A_1(a)$ и $B_1(a)$, которые в данном случае будут иметь вид (2.15). Отметим, что условия (2.12) представляют по существу требование отсутствия в функциях $u_{k1}(a,\psi)$ первых гармоник аргумента ψ, вследствие чего в искомых решениях $u_{k1}(a,\psi)$ исключаются секулярные члены.

Решая систему (6.8) по методу Крамера, получаем соотношение

$$u_{k1}^{(m)}(a) = \sum_{j=1}^{n} Z_{kj}\Phi_{j,m}(a),$$

где $Z_{kj} = \dfrac{D_{kj}(im\lambda_*)}{D(im\lambda_*)}$, причем $D_{kj}(im\lambda_*)$ — соответствующие миноры определителя $D(im\lambda_*)$.

Таким образом, искомая функция $u_{k1}(a,\psi)$ будет иметь вид

$$u_{k1}(a,\psi) = \sum_{\substack{m=-3\\ m\neq\pm1}}^{3}\left\{\sum_{j=1}^{n} Z_{kj}\Phi_{j,m}(a)\right\}e^{im\psi}.$$

Аналогично можно построить решение и во втором приближении, а также в случае неавтономных систем (1.1), когда $Q_k \neq 0$ и $\gamma_k \neq 0$.

Таким образом, в работе проиллюстрировано применение асимптотического метода Боголюбова – Митропольского для расчета одночастотных нелинейных колебаний заполненных подвижной жидкостью цилиндрических оболочек, моделируемых системами со многими степенями свободы.

Одночастотные решения построены для трех различных случаев: свободных самовозбуждаемых колебаний, обусловленных воздействием специфических неконсервативных сил, вызванных потоком жидкости; вынужденных колебаний, обусловленных действием на систему оболочка – подвижная жидкость поперечного, неравномерно распределенного по боковой поверхности давления; параметрических колебаний, обусловленных одним из двух факторов — пульсирующим сжатием торцевых сечений несущей оболочки либо пульсациями скорости жидкостного потока. Построение решений проиллюстрировано как в первом, так и в улучшенном первом приближении.

В целом, полученные в статье результаты могут быть использованы при решении практически важных нелинейных задач динамической устойчивости оболочек, взаимодействующих с подвижной жидкостью, включая:

1) задачу определения критических скоростей движения жидкости в несущих оболочках;

2) построение и исследование амплитудно-частотных характеристик несущих оболочек при действии внешних поперечных либо продольных периодических нагрузок;

3) изучение особенностей динамической потери устойчивости и нестационарного деформирования оболочек при переменных скоростях движения жидкости.

1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 337 с.
2. *Amabili M., Pellicano F., Païdoussis M. P.* Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid. Pt I. Stability // J. Sound and Vibration. – 1999. – **225**, № 4. – P. 655 – 699.
3. *Amabili M., Pellicano F., Païdoussis M. P.* Non-linear dynamics and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid. Pt IV. Large-amplitude vibrations with flow // Ibid. – 2000. – **237**, № 4. – P. 641 – 666.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
5. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
6. *Гузь А. Н., Маркуш Ш., Пуст Л. и др.* Динамика тел, взаимодействующих со средой. – Киев: Наук. думка, 1991. – 392 с.
7. *Ковальчук П. С.* О расчете одночастотных колебаний цилиндрических оболочек при взаимодействии их с протекающей жидкостью // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 4. – С. 75 – 84.
8. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – Киев: Вища шк., 1989. – 280 с.
9. *Ковальчук П. С., Крук Л. А.* Вынужденные нелинейные колебания цилиндрических оболочек, взаимодействующих с протекающей жидкостью // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 4. – С. 91 – 99.
10. *Ланда П. С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. – М.: Наука, 1980. – 360 с.
11. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.

Получено 27.07.2006