УДК 517.938

В. Л. Кулик (Сілез. техн. ун-т, Глівіце, Польща),
Н. В. Степаненко (Нац. техн. ун-т України „КПІ”, Київ)

ЗНАКОЗМІННІ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА В ТЕОРІЇ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

A number of problems are considered that arise in applying the quadratic-form Lyapunov functions to the study of regularity properties of linear extensions of dynamical systems on a torus.

Рассмотрен ряд проблем, возникающих при применении функций Ляпунова в виде квадратичных форм к исследованию свойств регулярности линейных расширений динамических систем на торе.

У теорії лінійних багаточастотних коливань виникає ряд питань, пов'язаних з дослідженням інваріантних торів автономних систем диференціальних рівнянь. Одними з важливих питань є збереження інваріантних торів при малих збуреннях, а також поведінка розв'язків систем на самих торах і в їх околі. Поряд з глибокими дослідженнями в даному напрямку [1 – 9] існує ряд проблем, які і сьогодні не вдається повністю вирішити. Цю статтю присвячено дослідженню деяких задач, які виникають при застосуванні функцій Ляпунова в теорії лінійних розширень динамічних систем на торі.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ і $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — відповідно m- і n-вимірний вектори, вектор-функція $a(\varphi)$ визначена, неперервна при всіх $\varphi \in R^m$ і періодична за кожною змінною φ_j, $j = \overline{1, m}$, з періодом 2π. Прийнято говорити, що функція $a(\varphi)$ визначена на m-вимірному торі T_m, тобто належить простору неперервних функцій $C(T_m)$. Далі будемо припускати, що задача Коші $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$, $\varphi\big|_{t=0} = \varphi$ має єдиний розв'язок $\varphi_t(\varphi)$ для кожного фіксованого значення $\varphi \in$ $\in T_m$. Цей розв'язок завжди буде визначений при всіх $t \in R$, $R = (-\infty, +\infty)$, і неперервно залежатиме від початкових даних φ. В системі (1) $A(\varphi)$ — квадратна матриця, елементами якої є неперервні і 2π-періодичні функції, тобто $A(\varphi) \in C(T_m)$. Систему (1) прийнято називати лінійним однорідним розширенням динамічної системи на торі. Поряд з системою (1) будемо розглядати відповідну неоднорідну систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{2}$$

де вектор-функція $f(\varphi) \in C(T_m)$.

Нагадаємо означення простору $C'(T_m; a)$, інваріантного тора системи (2) і функції Гріна задачі про інваріантні тори $G_0(\tau, \varphi)$ системи (1) [1, 2].

Означення 1. $C'(T_m; a)$ *є підпростором* $C(T_m)$ *неперервних функцій* $F(\varphi)$ *таких, що суперпозиція* $F(\varphi_t(\varphi))$ *є неперервно диференційовною функцією за змінною* t, $t \in R$. *При цьому*

$$\left.\frac{dF(\varphi_t(\varphi))}{dt}\right|_{t=0} \overset{\text{df}}{=} \dot{F}(\varphi) \in C(T_m).$$

© В. Л. КУЛИК, Н. В. СТЕПАНЕНКО, 2007

Означення 2. *Говорять, що система* (2) *має інваріантний тор, визначений рівністю*

$$x = u(\varphi), \tag{3}$$

якщо $u(\varphi) \in C'(T_m; a)$ *і виконується тотожність* $\dot{u}(\varphi) \equiv A(\varphi)u(\varphi) + f(\varphi)$ $\forall\, \varphi \in T_m$.

Позначаючи через $\Omega^t_\tau(\varphi)$ $(\Omega^t_\tau(\varphi) = \Omega^t_\tau(\varphi; A))$ фундаментальну матрицю розв'язків лінійної системи $\dfrac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x$, нормовану в точці $t = \tau$, тобто $\Omega^t_\tau(\varphi)\big|_{t=\tau} = I_n$ (I_n — n-вимірна одинична матриця), нагадаємо означення функції Гріна [2].

Означення 3. *Якщо існує* n*-вимірна квадратна матриця* $C(\varphi) \in C(T_m)$ *така, що для функції*

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0, \\ \Omega^0_\tau(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases} \tag{4}$$

виконується оцінка

$$\|G_0(\tau, \varphi)\| \le K\exp\{-\gamma|\tau|\}, \quad K, \lambda = \text{const} > 0, \quad \forall \tau \in R, \quad \forall \varphi \in T_m, \tag{5}$$

то функцію (4) *називають функцією Гріна задачі про інваріантні тори системи* (1).

Системи (1), які мають єдину функцію Гріна (4) з оцінкою (5), прийнято називати регулярними, а системи, що мають хоча б одну функцію Гріна, — слабкорегулярними.

Розглянемо приклад системи (1)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \qquad \frac{dx}{dt} = \lambda(\cos\varphi)x, \qquad \lambda = \text{const} > 0. \tag{6}$$

Покажемо, що ця система має безліч різних функцій Гріна (4), і запишемо деякі з них. Записуючи розв'язки першого рівняння

$$\varphi_t(\varphi) = \begin{cases} \pi m, & \varphi = \pi m, & m \in Z, \\ 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}e^t\right) + 2\pi n, & (2n-1)\pi < \varphi < (2n-1)\pi, & n \in Z, \end{cases}$$

і підставляючи їх в друге, отримуємо

$$\Omega^t_\tau(\varphi) = \exp\left\{\int_\tau^t \lambda\cos\varphi_\sigma(\varphi)\,d\sigma\right\} =$$

$$= \left(e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda}\left(e^{-t}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{t}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{-\lambda}.$$

Для знаходження скалярної функції $C(\varphi)$, яка входить до структури функції Гріна (4), запишемо відповідні оцінки

$$\begin{gathered} \left(e^{-t}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{t}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{-\lambda}|C(\varphi)| \le Ke^{-\gamma t}, \qquad t \ge 0, \\ \left(e^{-t}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{t}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{-\lambda}|C(\varphi) - 1| \le Ke^{\gamma t}, \qquad t \le 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Вибираючи $\gamma = \lambda$, маємо

$$|C(\varphi)| \le K\left(e^{-2t}\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda}, \quad t \ge 0,$$

$$|C(\varphi) - 1| \le K\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{2t}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda}, \quad t \le 0.$$

Переходячи до границі відповідно при $t \to +\infty$ і $t \to -\infty$, одержуємо систему двох нерівностей

$$|C(\varphi)| \le K\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda}, \qquad |C(\varphi) - 1| \le K\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda}. \tag{8}$$

Довільна неперервна скалярна функція $C(\varphi)$, яка задовольняє нерівності (8), буде також задовольняти оцінки (7) при $\gamma = \lambda$. Звідси випливає виконання оцінки (5) для відповідної функції Гріна. Якщо буде знайдено яку-небудь функцію $C(\varphi) = \tilde{C}(\varphi)$, що задовольняє оцінки (8), то і кожна з наступних функцій $C_n(\varphi) = \tilde{C}^n(\varphi)$, $n = 2, 3, \ldots$, також буде задовольняти оцінки (8), тільки, можливо, уже з іншою сталою K. Якщо параметр λ задовольняє нерівності $0 < \lambda \le 1$, то однією з функцій $C = \tilde{C}(\varphi)$, що задовольняє оцінки (8), є $\tilde{C}(\varphi) = \sin^2\frac{\varphi}{2}$, а у випадку $\lambda > 1$ функцію $C = \tilde{C}(\varphi)$ можна вибрати у вигляді

$$\tilde{C}(\varphi) = \int\limits_{\cos^2\frac{\varphi}{2}}^{1} (1-\sigma)^k \sigma^k d\sigma \left(\int\limits_0^1 (1-\sigma)^k \sigma^k d\sigma\right)^{-1} \equiv$$

$$\equiv \int\limits_0^{\sin^2\frac{\varphi}{2}} (1-\sigma)^k \sigma^k d\sigma \left(\int\limits_0^1 (1-\sigma)^k \sigma^k d\sigma\right)^{-1},$$

де $k = \lambda - 1$, коли λ — ціле число, і $k = [\lambda]$ при $k < \lambda < k+1$, $[\lambda]$ — ціла частина числа $\lambda > 1$.

Таким чином, система (6) має функції Гріна вигляду

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \left(e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda-1} e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi}{2}, & \tau \le 0, \\ -\left(e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda-1} e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi}{2}, & \tau > 0, \end{cases}$$

при $0 < \lambda \le 1$ і

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \left(e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda} \Theta\left(\dfrac{e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi}{2}}{e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right), & \tau \le 0, \\ -\left(e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\lambda} \Theta\left(\dfrac{e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi}{2}}{e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right), & \tau > 0, \end{cases}$$

при $\lambda > 1$, де

$$\Theta(x) = \int\limits_0^x (1-\sigma)^k \sigma^k d\sigma \left(\int\limits_0^1 (1-\sigma)^k \sigma^k d\sigma\right)^{-1}.$$

Для систем вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a\cos\varphi + b\sin\varphi, \qquad \frac{dx}{dt} = \left(a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j\cos j\varphi + b_j\sin j\varphi)\right)x \qquad (6')$$

з деякими дійсними коефіцієнтами a, b, a_j, b_j, $j = \overline{0, n}$, $i = \overline{1, n}$, досліджено питання існування функції Гріна. Відмітимо, що якщо в системі $(6')$ $a = b = 0$, то вона може мати лише єдину функцію Гріна при умові

$$a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j\cos j\varphi + b_j\sin j\varphi) \neq 0 \qquad \forall\varphi\in R.$$

Припустимо, що $a^2 + b^2 \neq 0$, і позначимо

$$M_1 = a_1\cos\theta - b_1\sin\theta + a_3\cos 3\theta - b_3\sin 3\theta + \ldots$$
$$\ldots + a_{2l-1}\cos(2l-1)\theta - b_{2l-1}\sin(2l-1)\theta,$$

$$M_2 = a_0 + a_2\cos 2\theta - b_2\sin 2\theta + a_4\cos 4\theta - b_4\sin 4\theta + \ldots$$
$$\ldots + a_{2m}\cos 2m\theta - b_{2m}\sin 2m\theta,$$

де

$$\max\{2l-1, 2m\} = n, \qquad \sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Теорема 1 [6]. *При виконанні нерівності* $|M_1| < |M_2|$ *система* $(6')$ *має єдину функцію Гріна, а якщо виконується нерівність* $|M_1| > |M_2|$, *то система* $(6')$ *має безліч різних функцій Гріна. У випадках* $|M_1| = |M_2|$, $|M_1| < -|M_2|$ *система* $(6')$ *функції Гріна* (4) *не має.*

При існуванні функції Гріна (4) система (2) буде мати інваріантний тор (3) при кожній функції $f(\varphi)\in C(T_m)$, і цей тор записується у вигляді $x = u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}G_0(\tau,\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau$. Зауважимо, що зустрічаються випадки, коли система (2) має інваріантний тор (3) при кожній функції $f(\varphi)\in C(T_m)$, а функції Гріна (4) не існує.

Відомо, що якщо існує квадратична форма

$$V = \langle S(\varphi)x, x\rangle \qquad (9)$$

з симетричною матрицею коефіцієнтів $S(\varphi)$, $S(\varphi)\in C'(T_m; a)$, похідна якої в силу системи (1) є додатно визначеною, тобто

$$\left\langle[\dot S(\varphi) + S(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)S(\varphi)]x, x\right\rangle \geq \beta\|x\|^2, \qquad \beta = \text{const} > 0, \qquad (10)$$

і при цьому матриця $S(\varphi)$ є невиродженою

$$\det S(\varphi) \neq 0 \qquad \forall\varphi\in T_m, \qquad (11)$$

то система (1) є регулярною. В цьому випадку (і лише в цьому випадку) матриця $C(\varphi)$, що входить до структури функції Гріна (4), задовольняє тотожності

$$C^2(\varphi) \equiv C(\varphi), \quad C(\varphi_\tau(\varphi)) \equiv \Omega_0^\tau(\varphi)C(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi) \qquad \forall\varphi\in T_m, \quad \forall\tau\in R. \quad (12)$$

Якщо функцію Гріна (4) знайдено і вона є єдиною, то матриці $S(\varphi)$, що задовольняють нерівності (10), можна записати у вигляді

$$S(\varphi) = \int_{-\infty}^{0}\left\{\Omega_0^t(\varphi)[C(\varphi) - I_n]\right\}^T H(\varphi_t(\varphi))\left\{\Omega_0^t(\varphi)[C(\varphi) - I_n]\right\}dt \; -$$

$$- \int_0^{\infty} \left\{\Omega_0^t C(\varphi)\right\}^T H(\varphi_t(\varphi)) \left\{\Omega_0^t C(\varphi)\right\} dt, \tag{13}$$

де $H(\varphi)$ — довільна симетрична, додатно визначена матриця, $H(\varphi) \in C(T_m)$. При цьому кожна з матриць (13) буде невиродженою. Можна було б в доданках правої частини (13) записати дві різні додатно визначені матриці $H_1(\varphi)$, $H_2(\varphi) \in C(T_m)$, але тоді множина матриць (13) не розшириться, оскільки завжди можна вибрати спільну додатно визначену матрицю $H(\varphi)$ вигляду

$$H(\varphi) = [C(\varphi) - I_n]^T H_1(\varphi)[C(\varphi) - I_n] + C^T(\varphi) H_2(\varphi) C(\varphi).$$

Виникає питання: чи кожну невироджену симетричну матрицю $S(\varphi) \in C(T_m)$, що задовольняє умову (10), можна записати у вигляді (13), підбираючи відповідним чином додатно визначену матрицю $H(\varphi)$? З метою дослідження цього питання розглянемо систему (1) з блочно-діагональною матрицею $A(\varphi) = \operatorname{diag}\{A_1(\varphi), -A_2(\varphi)\}$ з додатно визначеними блоками $A_1(\varphi)$, $A_2(\varphi)$ відповідно n_1- і n_2-вимірними. В цьому випадку функція Гріна (4) має блочно-діагональний вигляд і при цьому матриця $C(\varphi) = \operatorname{diag}\{0, I_{n_2}\}$ є сталою. Записуючи праву частину рівності (13), маємо

$$\int_0^{+\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega_0^t(\varphi; -A_2) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} H_{11}(\varphi_t(\varphi)) & H_{12}(\varphi_t(\varphi)) \\ H_{21}(\varphi_t(\varphi)) & H_{22}(\varphi_t(\varphi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega_0^t(\varphi; -A_2) \end{pmatrix} dt \; -$$

$$- \int_{-\infty}^{0} \begin{pmatrix} \Omega_0^t(\varphi; A_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} H_{11}(\varphi_t(\varphi)) & H_{12}(\varphi_t(\varphi)) \\ H_{21}(\varphi_t(\varphi)) & H_{22}(\varphi_t(\varphi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_0^t(\varphi; A_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \begin{pmatrix} S_1(\varphi) & 0 \\ 0 & S_2(\varphi) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

де

$$S_1(\varphi) = - \int_{-\infty}^{0} [\Omega_0^t(\varphi; A_1)]^T H_{11}(\varphi_t(\varphi)) \Omega_0^t(\varphi; A_1)\, dt,$$

$$S_2(\varphi) = \int_0^{+\infty} [\Omega_0^t(\varphi; -A_2)]^T H_{22}(\varphi_t(\varphi)) \Omega_0^t(\varphi; -A_2)\, dt.$$

Звідси випливає, що в розглядуваному випадку формула (13) надає можливість записувати матриці $S(\varphi)$ лише в блочно-діагональному вигляді (14), а з умови (10) видно, що матриці $S(\varphi)$ не обов'язково мають блочно-діагональний вигляд, оскільки малі збурення $S(\varphi) + \varepsilon \overline{S}(\varphi)$ також будуть задовольняти нерівність (10). Таким чином, приходимо до наступного висновку.

Висновок. Якщо існує єдина функція Гріна (4) і її вже знайдено, то рівністю (13) визначаються не всі симетричні матриці $S(\varphi) \in C'(T_m; a)$, які задовольняють рівність (10).

***Зауваження* 1.** Рівність (13) визначає розв'язок $X = S(\varphi) \in C'(T_m; a)$ матричного рівняння

$$\dot{X} + XA(\varphi) + A^T(\varphi)X = F(\varphi), \tag{15}$$

де матриця $F(\varphi)$ має вигляд

$$F(\varphi) = [I_n - C(\varphi)]^T H(\varphi)[I_n - C(\varphi)] + C^T(\varphi) H(\varphi) C(\varphi). \tag{16}$$

Таким чином, при існуванні єдиної функції Гріна (4) рівняння (15) матиме розв'язки, якщо права частина $F(\varphi)$ записується у вигляді (16). Звернемо увагу на те, що відповідне до (15) однорідне рівняння

$$\dot{X} + XA(\varphi) + A^T(\varphi)X = 0 \tag{17}$$

може мати нетривіальні розв'язки у вигляді невироджених сталих матриць. Наприклад, якщо змінна матриця $A(\varphi)$ буде мати вигляд

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} P(\varphi) & B_2(\varphi) \\ B_1(\varphi) & -P^T(\varphi) \end{pmatrix},$$

де $B_i(\varphi)$ — симетричні матриці, то рівняння (17) має сталий розв'язок

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо ж матриця $A(\varphi)$ записується у вигляді

$$A(\varphi) = M(\varphi)L, \tag{18}$$

де $M(\varphi)$ — кососиметрична матриця: $M^T(\varphi) \equiv -M(\varphi)$, а L — невироджена, стала, симетрична матриця, то рівняння (17) матиме сталий розв'язок $X = L$.

Зауважимо, що системи (1) з матрицею $A(\varphi)$ вигляду (18) можуть мати функцію Гріна (4), причому вона обов'язково буде єдиною. Наприклад, покладаючи

$$M(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -P^T(\varphi) \\ P(\varphi) & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_1} \\ I_{n_1} & 0 \end{pmatrix}$$

і припускаючи, що система

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = M(\varphi)Lx \tag{19}$$

має хоча б одну функцію Гріна, ми тим самим припускаємо, що обидві взаємно спряжені системи

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \dfrac{dx_1}{dt} = -P^T(\varphi)x_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\ \dfrac{dx_1}{dt} = P(\varphi)x_1 \end{cases}$$

мають функції Гріна $\overline{G}_0(\tau, \varphi)$, $\tilde{G}_0(\tau, \varphi)$. Звідси випливає, що ці функції Гріна будуть єдиними і система (19) теж буде мати єдину функцію Гріна $G_0(\tau, \varphi) = \operatorname{diag}\left\{\overline{G}_0(\tau, \varphi), \tilde{G}_0(\tau, \varphi)\right\}$.

Припустивши, що система (1) має хоча б одну функцію Гріна (4), розглянемо симетричну матрицю

$$\overline{S}(\varphi) = \overline{S}(\varphi; H_1, H_2) = \int_{-\infty}^{0} \left\{\Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi))\right\} H_1(\varphi_t(\varphi)) \left\{\Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi))\right\}^T d\tau -$$

$$- \int_{0}^{+\infty} \left\{\Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n]\right\} H_2(\varphi_t(\varphi)) \left\{\Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n]\right\}^T d\tau, \tag{20}$$

де $H_1(\varphi)$, $H_2(\varphi) \in C(T_m)$ — деякі додатно визначені симетричні матриці. Легко переконатись, що для матриці (20) виконується нерівність

$$\left\langle [\dot{\bar{S}}(\varphi) - \bar{S}(\varphi)A^T(\varphi) - A(\varphi)\bar{S}(\varphi)]x, x \right\rangle \ \geq \ \beta\|x\|^2, \qquad \beta = \mathrm{const} > 0. \tag{21}$$

Нерівність (21) означає, що похідна квадратичної форми

$$W = \left\langle \bar{S}(\varphi)y, y \right\rangle \tag{22}$$

в силу системи, спряженої до системи (1),

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dy}{dt} = -A^T(\varphi)y$$

є додатно визначеною. У випадку існування не єдиної функції Гріна (4) для матриць $C(\varphi)$ вже не будуть виконуватись тотожності (12), і при цьому в рівності (20) спільну матрицю $H(\varphi)$ не завжди можна вибрати. Дослідимо це питання у скалярному випадку $n = 1$.

Теорема 2. *Нехай система* (1) *у випадку* $n = 1$ *має функцію Гріна* (4) *і вона не є єдиною* (*скалярна функція* $C(\varphi)$ *не задовольняє жодну з тотожностей* (12)). *Тоді для того щоб для двох додатних функцій* $H_1(\varphi)$, $H_2(\varphi) \in C(T_m)$ *в рівності* (20) *існувала одна функція* $H(\varphi) \in C(T_m)$, *при якій виконується тотожність*

$$\bar{S}(\varphi; H_1, H_2) \equiv \bar{S}(\varphi; H, H), \tag{23}$$

необхідно і достатньо виконання умови

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[H_2(\varphi_\tau(\varphi)) - H_1(\varphi_\tau(\varphi))]\,[C(\varphi_\tau(\varphi)) - 1]^2 C^2(\varphi_\tau(\varphi))}{C^2(\varphi_\tau(\varphi)) + [C(\varphi_\tau(\varphi)) - 1]^2} \exp\left\{2\int_\tau^0 A(\varphi_\sigma(\varphi))\,d\sigma\right\} d\tau \equiv 0. \tag{24}$$

При цьому функція $H(\varphi)$ *визначається рівністю*

$$H(\varphi) = \frac{C^2(\varphi)H_1(\varphi) + [C(\varphi) - 1]^2 H_2(\varphi)}{C^2(\varphi) + [C(\varphi) - 1]^2}. \tag{25}$$

Доведення. В даному випадку $\Omega_\tau^t(\varphi) = \exp\left\{\int_\tau^t A(\varphi_\sigma(\varphi))\,d\sigma\right\}$ є скалярною функцією. З урахуванням (20) запишемо тотожність (23) у вигляді

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{0} H_1(\varphi_\tau(\varphi))C^2(\varphi_\tau(\varphi)) \exp\left\{2\int_\tau^0 A(\varphi_\sigma(\varphi))\,d\sigma\right\} d\tau \ - \\ &- \int_0^{+\infty} H_2(\varphi_\tau(\varphi))[C(\varphi_\tau(\varphi)) - 1]^2 \exp\left\{2\int_\tau^0 A(\varphi_\sigma(\varphi))\,d\sigma\right\} d\tau \ \equiv \\ &\equiv \int_{-\infty}^{0} H(\varphi_\tau(\varphi))C^2(\varphi_\tau(\varphi)) \exp\left\{2\int_\tau^0 A(\varphi_\sigma(\varphi))\,d\sigma\right\} d\tau \ - \\ &- \int_0^{+\infty} H(\varphi_\tau(\varphi))[C(\varphi_\tau(\varphi)) - 1]^2 \exp\left\{2\int_\tau^0 A(\varphi_\sigma(\varphi))\,d\sigma\right\} d\tau. \end{aligned} \tag{26}$$

У тотожність (26) підставимо $\varphi \to \varphi_t(\varphi)$, потім скоротимо всі доданки на спільний множник $\exp\left\{2\int_0^t A(\varphi_\sigma(\varphi))\,d\sigma\right\}$, здиференціюємо по змінній t обидві частини і підставимо $t = 0$. В результаті отримаємо

$$C^2(\varphi)H_1(\varphi) + [C(\varphi) - 1]^2 H_2(\varphi) \equiv C^2(\varphi)H(\varphi) + [C(\varphi) - 1]^2 H(\varphi). \tag{27}$$

Звідси випливає необхідність рівності (25). Підставляючи рівність (25) у праву частину тотожності (26), розглядаємо окремо два доданки:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{C^2(\varphi_\tau(\varphi))H_1(\varphi_\tau(\varphi)) + [C(\varphi_\tau(\varphi))-1]^2 H_2(\varphi_\tau(\varphi))}{C^2(\varphi_\tau(\varphi)) + [C(\varphi_\tau(\varphi))-1]^2} C^2(\varphi_\tau(\varphi)) \times$$

$$\times \exp\left\{2\int_{\tau}^{0} A(\varphi_\sigma(\varphi))d\sigma\right\}d\tau = \int_{-\infty}^{0} H_1(\varphi_\tau(\varphi))C^2(\varphi_\tau(\varphi)) \exp\left\{2\int_{\tau}^{0} A(\varphi_\sigma(\varphi))d\sigma\right\}d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \frac{[H_2(\varphi_\tau(\varphi)) - H_1(\varphi_\tau(\varphi))]\,[C(\varphi_\tau(\varphi))-1]^2 C^2(\varphi_\tau(\varphi))}{C^2(\varphi_\tau(\varphi)) + [C(\varphi_\tau(\varphi))-1]^2} \exp\left\{2\int_{\tau}^{0} A(\varphi_\sigma(\varphi))d\sigma\right\}d\tau,$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{C^2(\varphi_\tau(\varphi))H_1(\varphi_\tau(\varphi)) + [C(\varphi_\tau(\varphi))-1]^2 H_2(\varphi_\tau(\varphi))}{C^2(\varphi_\tau(\varphi)) + [C(\varphi_\tau(\varphi))-1]^2} [C(\varphi_\tau(\varphi))-1]^2 \times$$

$$\times \exp\left\{2\int_{\tau}^{0} A(\varphi_\sigma(\varphi))d\sigma\right\}d\tau = \int_{0}^{+\infty} H_2(\varphi_\tau(\varphi))[C(\varphi_\tau(\varphi))-1]^2 \exp\left\{2\int_{\tau}^{0} A(\varphi_\sigma(\varphi))d\sigma\right\}d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{+\infty} \frac{[H_1(\varphi_\tau(\varphi)) - H_2(\varphi_\tau(\varphi))]\,[C(\varphi_\tau(\varphi))-1]^2 C^2(\varphi_\tau(\varphi))}{C^2(\varphi_\tau(\varphi)) + [C(\varphi_\tau(\varphi))-1]^2} \exp\left\{2\int_{\tau}^{0} A(\varphi_\sigma(\varphi))d\sigma\right\}d\tau.$$

Далі, підставляючи отримані рівності в тотожність (26), одержуємо тотожність (24), що й потрібно було довести.

***Зауваження* 2.** Розглядаючи випадок $n \geq 2$, можна отримати тотожність, аналогічну (27):

$$C(\varphi)H_1(\varphi)C^T(\varphi) + [C(\varphi) - I_n]H_2(\varphi)[C(\varphi) - I_n]^T \equiv$$
$$\equiv C(\varphi)H(\varphi)C^T(\varphi) + [C(\varphi) - I_n]H(\varphi)[C(\varphi) - I_n]^T.$$

При цьому записати в явному вигляді (аналогічному (25)) матрицю $H(\varphi)$ і підставити її в матричну тотожність (23) не завжди вдається.

При дослідженні питання існування функції Гріна (4) системи з додатним параметром λ

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x$$

виявилось, що при деяких значеннях параметра λ системи можуть бути регулярними, а при інших значеннях $\lambda > 0$ вже не будуть регулярними. Наприклад, система

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \lambda, \qquad \frac{d\varphi_2}{dt} = \lambda\sqrt{2},$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & -\sin(\varphi_1+\varphi_2) \\ \sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & \sin(\varphi_1+\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

не є регулярною при $\lambda = \sqrt{2} - 1$, а при всіх дійсних значеннях $\lambda \neq \sqrt{2} - 1$ буде регулярною, оскільки заміна змінних

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & \sin(\varphi_1+\varphi_2) \\ -\sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

записану вище систему зводить до вигляду

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \lambda, \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \lambda\sqrt{2}, \quad \begin{pmatrix} \dfrac{dy_1}{dt} \\ \dfrac{dy_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & (1+\sqrt{2})\lambda \\ 2-(1+\sqrt{2})\lambda & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Повернемось до нерівності (10) і припустимо, що в ній матриця $S(\varphi) \equiv S$ є сталою:

$$\left\langle [SA(\varphi) + A^T(\varphi)S]x, x \right\rangle \geq \beta\|x\|^2, \quad \beta = \text{const} > 0. \tag{28}$$

Тоді матриця S буде невиродженою і при цьому система (1) матиме єдину функцію Гріна (4) для кожної фіксованої вектор-функції $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(T_m)$. Якщо тепер розглянути обернене питання: нехай система (1) має функцію Гріна (4) при кожній фіксованій вектор-функції $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(T_m)$, то чи завжди знайдеться така стала матриця S, для якої виконується нерівність (28)? Виявляється, що у випадку $n \geq 2$ не завжди існує така стала матриця S. Деякі класи таких змінних матриць $A(\varphi)$ було знайдено, наприклад

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} P\sin(\varphi_1+\ldots+\varphi_m) & B_2(\varphi)\cos^2(\varphi_1+\ldots+\varphi_m) \\ B_1(\varphi) & -P^T\sin(\varphi_1+\ldots+\varphi_m) \end{pmatrix},$$

де обидві симетричні матриці $B_i(\varphi)$ є додатно визначеними, а дійсні частини всіх власних чисел сталої матриці P є відмінними від нуля. До теперішнього часу не підтверджено і не спростовано наступну гіпотезу: *кожна система* (1), *яка має функцію Гріна* (4) *при будь-якій фіксованій вектор-функції* $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(T_m)$ *і при цьому не існує сталої симетричної матриці* S, *яка б задовольняла умову* (28), *при певних як завгодно малих збуреннях змінної матриці* $A(\varphi)$ *вже не матиме функції Гріна* (4) *при всіх* $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(T_m)$.

Звернемо увагу на те, що послаблення нерівності (10), а саме припущення виконання умови

$$\left\langle [\dot{S}(\varphi) + S(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)S(\varphi)]x, x \right\rangle \geq 0 \tag{29}$$

з невиродженою симетричною матрицею $S(\varphi)$, не надає можливості стверджувати існування функції Гріна (4). При цьому навіть поведінка на нескінченності нетривіальних розв'язків лінійної системи $\dfrac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x$ може бути не експоненціальною. В цьому можна переконатись, розглядаючи тривіальний випадок $A(\varphi) \equiv 0$, $S(\varphi) \equiv I_n$. Існують матриці $A(\varphi)$, для яких *не існує невиродженої* симетричної матриці $S(\varphi) \in C'(T_m, a)$, для якої б виконувалась нерівність (29). Покажемо це на наступному прикладі:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Записуючи симетричну матрицю $S(\varphi)$ у вигляді $S(\varphi) = \begin{bmatrix} s_1(\varphi) & s_{12}(\varphi) \\ s_{12}(\varphi) & s_2(\varphi) \end{bmatrix}$ і підраховуючи $W(\varphi) = \dot{S} + SA + A^T S$, отримуємо

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & w_{12} \\ w_{12} & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s}_1(\varphi) + 2s_1(\varphi)\cos\varphi & \dot{s}_{12}(\varphi) + 3s_{12}(\varphi)\cos\varphi \\ \dot{s}_{12}(\varphi) + 3s_{12}(\varphi)\cos\varphi & \dot{s}_2(\varphi) + 4s_2(\varphi)\cos\varphi \end{bmatrix}. \qquad (31)$$

Оскільки квадратична форма, що відповідає матриці (31), повинна бути невід'ємною, то виконуються нерівності

$$w_1 = \dot{s}_1(\varphi) + 2s_1(\varphi)\cos\varphi \geq 0, \qquad w_2 = \dot{s}_2(\varphi) + 4s_2(\varphi)\cos\varphi \geq 0. \qquad (32)$$

Це означає, що неоднорідна система

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \qquad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi & 0 \\ 0 & -2\cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(\varphi) \\ w_2(\varphi) \end{bmatrix} \qquad (33)$$

має інваріантний тор $y_j = s_j(\varphi)$, $j = 1, 2$, при деяких невід'ємних функціях $w_j(\varphi)$, а це можливо лише у випадку, коли функції $w_j(\varphi)$ є ортогональними до нетривіальних інваріантних торів $x_j = c\sin^j\varphi$, $j = 1, 2$, системи (30), тобто повинна виконуватись тотожність

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_j(\varphi_\tau(\varphi))\left(e^{-\tau}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{\tau}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{-j}\sin^j\varphi\, d\tau \equiv 0, \qquad j = 1, 2.$$

Записана тотожність при умові $w_j(\varphi) \geq 0$ виконуватиметься лише при виконанні тотожності $w_j \equiv 0$, а оскільки квадратична форма, яка відповідає матриці (31), повинна бути невід'ємною, то і $w_{12} \equiv 0$. Звідси випливає, що $s_j \equiv 0$ і $s_{12} \equiv 0$, тобто матриця $S(\varphi) \equiv 0$.

Якщо існує невироджена симетрична матриця $S(\varphi) \in C'(T_m, a)$, яка задовольняє нерівність (29), то систему рівнянь (1) можна записати в еквівалентній формі

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad S(\varphi)\frac{dx}{dt} + 0{,}5\dot{S}(\varphi)x = [B(\varphi) + M(\varphi)]x, \qquad x \in R^n, \qquad (34)$$

де

$$B(\varphi) = 0{,}5\left[\dot{S}(\varphi) + S(\varphi)A(\varphi) + A^T(\varphi)S(\varphi)\right],$$
$$M(\varphi) = 0{,}5\left[S(\varphi)A(\varphi) - A^T(\varphi)S(\varphi)\right]. \qquad (35)$$

Розглядаючи тепер систему (34) як самостійну (вже не припускаємо виконання рівностей (35)) з деякою симетричною $B(\varphi) \in C(T_m)$ і кососиметричною $M(\varphi) \in C(T_m)$ матрицями, сформулюємо наступне твердження.

Теорема 3 [7]. *Нехай система рівнянь* (34) *при* $B(\varphi) \equiv 0$ *і з деякою кососиметричною матрицею* $M(\varphi)$ $\left(M^T(\varphi) \equiv -M(\varphi)\right)$ *є слабкорегулярною. Тоді* n *є парним і система* (34) *буде регулярною при будь-якій симетричній матриці* $B(\varphi) \in C(T_m)$, *що задовольняє умову* $\langle B(\varphi)x, x\rangle \geq 0$.

Розглянемо тепер систему (1) з матрицею $A(\varphi)$ блочно-трикутного вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx_1}{dt} = B_1(\varphi)x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = B_{12}(\varphi)x_1 + B_2(\varphi)x_2, \quad x_1 \in R^r, \quad x_2 \in R^p. \qquad (36)$$

Якщо при заміні змінних $x_1 = y_1$, $x_2 = U(\varphi)y_1 + y_2$ система (36) зводиться до блочно-діагонального вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dy_1}{dt} = B_1(\varphi)y_1, \qquad \frac{dy_2}{dt} = B_2(\varphi)y_2,$$

то для прямокутної матриці $U(\varphi) \in C'(T_m; a)$ виконується тотожність $\dot{U}(\varphi) \equiv \equiv B_2(\varphi)U(\varphi) - U(\varphi)B_1(\varphi) + B_{21}(\varphi)$. У зв'язку з цим виникає проблема існування інваріантного тора $X = U(\varphi)$ системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dX}{dt} = A(\varphi)X + XB(\varphi) + F(\varphi), \tag{37}$$

де $A(\varphi)$, $B(\varphi) \in C(T_m)$ — квадратні матриці розмірів відповідно $n \times n$, $p \times p$, X — невідома прямокутна матриця, яка складається з n рядків і p стовпців, $F(\varphi) \in C(T_m)$ — задана прямокутна матриця. Цікаві дослідження структури функції Гріна для системи (37) проводились у роботі [3]. Тут ми запропонуємо достатні умови існування інваріантного тора

$$X = U(\varphi) \tag{38}$$

при кожній фіксованій матриці $F(\varphi) \in C(T_m)$.

Теорема 4. *Нехай для нормованих фундаментальних матриць розв'язків* $\Omega_\tau^t(\varphi; A)$, $\Omega_\tau^t(\varphi; B)$ *відповідних лінійних систем* $\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x$, $\frac{dy}{dt} = -B(\varphi_t(\varphi))y$ *виконуються умови*

$$\begin{aligned} \left\| \Omega_t^0(\varphi; A) \right\| &\le K \exp\{\gamma_1 t\}, \quad t \ge 0, \\ \left\| \Omega_0^t(\varphi; B) \right\| &\le K \exp\{\gamma_2 t\}, \quad t \ge 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 < 0, \quad \gamma_j &= \mathrm{const}, \quad K = \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{39}$$

Тоді система (37) *має єдиний інваріантний тор* (38) *при кожній фіксованій матриці* $F(\varphi) \in C(T_m)$ *і цей тор записується у вигляді*

$$X = U(\varphi) = -\int_0^{+\infty} \Omega_\tau^0(\varphi; A) F(\varphi_\tau(\varphi)) \Omega_0^\tau(\varphi; B)\, d\tau. \tag{40}$$

Якщо ж умови (39) *замінити такими*:

$$\begin{aligned} \left\| \Omega_t^0(\varphi; A) \right\| &\le K \exp\{\gamma_1 t\}, \quad t \le 0, \\ \left\| \Omega_0^t(\varphi; B) \right\| &\le K \exp\{\gamma_2 t\}, \quad t \le 0, \\ \gamma_1 + \gamma_2 > 0, \quad \gamma_j &= \mathrm{const}, \quad K = \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{41}$$

то система (37) *також матиме інваріантний тор*

$$X = U(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\varphi; A) F(\varphi_\tau(\varphi)) \Omega_0^\tau(\varphi; B)\, d\tau. \tag{42}$$

Доведення. Загальний розв'язок рівняння

$$\frac{dX}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))X + XB(\varphi_t(\varphi)) + F(\varphi_t(\varphi))$$

записується у вигляді

$$X = U(t; \varphi) = \Omega_0^t(\varphi; A) C \Omega_t^0(\varphi; B) + \int_0^t \Omega_\tau^t(\varphi; A) F(\varphi_\tau(\varphi)) \Omega_t^\tau(\varphi; B)\, d\tau =$$

$$= \Omega_0^t(\varphi; A)\left[C + \int_0^t \Omega_\tau^0(\varphi; A) F(\varphi_\tau(\varphi)) \Omega_0^\tau(\varphi; B)\, d\tau\right] \Omega_t^0(\varphi; B), \tag{43}$$

де C — довільна стала прямокутна матриця (може бути залежною тільки від параметрів φ). Звідси отримуємо

$$\Omega_t^0(\varphi; A)U(t;\varphi)\Omega_0^t(\varphi; B) = C + \int\limits_0^t \Omega_\tau^0(\varphi; A)F(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi; B)d\tau. \tag{44}$$

Нехай виконуються оцінки (39), тоді в рівності (44) перейдемо до границі при $t \to +\infty$. Припускаючи, що матриця $U(t;\varphi)$ є обмеженою, отримуємо

$$0 = C + \int\limits_0^{+\infty} \Omega_\tau^0(\varphi; A)F(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi; B)d\tau.$$

Звідси маємо

$$C = -\int\limits_0^{+\infty} \Omega_\tau^0(\varphi; A)F(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi; B)d\tau = U(\varphi). \tag{45}$$

З властивостей матрицантів $\Omega_\tau^t(\varphi_z(\varphi); B) \equiv \Omega_{\tau+z}^{t+z}(\varphi; B)$ випливає, що функція (45) належить простору $C'(T_m; a)$ і задовольняє тотожність

$$\dot{U}(\varphi) \equiv A(\varphi)U(\varphi) + U(\varphi)B(\varphi) + F(\varphi),$$

тобто рівність (40) визначає тор системи (37). Якщо ж тепер припустити виконання оцінок (41), то в рівності (44) перейдемо до границі при $t \to -\infty$. При цьому прямокутна матриця C (залежна тільки від вектора параметрів φ) буде мати вигляд

$$C = \int\limits_{-\infty}^0 \Omega_\tau^0(\varphi; B_2)B_{12}(\varphi_\tau(\varphi))\Omega_0^\tau(\varphi; B_1)d\tau = U(\varphi).$$

Отримана матриця теж як функція, залежна від вектора параметрів φ, належить простору $C'(T_m; a)$, і рівністю (42) визначається інваріантний тор системи (37).

Наслідок. *Для будь-якої фіксованої матриці $A(\varphi) \in C(T_m)$ завжди знайдеться матриця $B(\varphi) \in C(T_m)$ така, що рівняння* (37) *матиме єдиний інваріантний тор* (38) *при кожній фіксованій матриці $F(\varphi) \in C(T_m)$.*

Тепер припустимо, що система (1) з допомогою деякої невиродженої заміни змінних $x = L(\varphi)\bar{x}$, $L(\varphi) \in C'(T_m; a)$ спрощується, зводячи матрицю $A(\varphi)$ до блочно-трикутного вигляду

$$L^{-1}(\varphi)\left[A(\varphi)L(\varphi) - \dot{L}(\varphi)\right] = \begin{pmatrix} \bar{A}_1(\varphi) & 0 \\ \bar{A}_{12}(\varphi) & \bar{A}_2(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Аналогічно припускаємо існування $(p \times p)$-вимірної невиродженої матриці $Q(\varphi) \in C'(T_m; a)$, для якої виконується рівність

$$\left[Q(\varphi)B(\varphi) - \dot{Q}(\varphi)\right]Q^{-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \bar{B}_1(\varphi) & \bar{B}_{12}(\varphi) \\ 0 & \bar{B}_2(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{47}$$

У рівностях (46), (47) $\bar{A}_1$, $\bar{B}_1$ — квадратні матриці розмірів відповідно $n_1 \times n_1$, $p_1 \times p_1$.

Система рівнянь (37) при заміні змінних

$$X = L(\varphi)YQ(\varphi) \tag{48}$$

зводиться до вигляду

$$
\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi),\\
\frac{dY_{11}}{dt} &= \bar{A}_1(\varphi)Y_{11} + Y_{11}\bar{B}_1(\varphi) + \bar{F}_{11}(\varphi),\\
\frac{dY_{12}}{dt} &= Y_{11}\bar{B}_{12}(\varphi) + \bar{A}_1(\varphi)Y_{12} + Y_{12}\bar{B}_2(\varphi) + \bar{F}_{12}(\varphi),\\
\frac{dY_{21}}{dt} &= \bar{A}_{21}(\varphi)Y_{11} + \bar{A}_2(\varphi)Y_{21} + Y_{21}\bar{B}_1(\varphi) + \bar{F}_{21}(\varphi),\\
\frac{dY_{22}}{dt} &= \bar{A}_{21}(\varphi)Y_{12} + Y_{21}\bar{B}_{12}(\varphi) + \bar{A}_2(\varphi)Y_{22} + Y_{22}\bar{B}_2(\varphi) + \bar{F}_{22}(\varphi),
\end{aligned}
\tag{49}
$$

де

$$
Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}, \qquad L^{-1}(\varphi)F(\varphi)Q^{-1}(\varphi) = \bar{F}(\varphi) = \begin{pmatrix} \bar{F}_{11}(\varphi) & \bar{F}_{12}(\varphi) \\ \bar{F}_{21}(\varphi) & \bar{F}_{22}(\varphi) \end{pmatrix}.
$$

Існування інваріантного тора (38) системи (37) еквівалентне існуванню тора системи (49). З вигляду системи (49) видно, що достатньою умовою існування тора системи (49) є існування тора системи

$$
\begin{aligned}
&\frac{dY_{11}}{dt} = \bar{A}_1(\varphi)Y_{11} + Y_{11}\bar{B}_1(\varphi) + \bar{F}_{11}(\varphi), \qquad \frac{dY_{12}}{dt} = \bar{A}_1(\varphi)Y_{12} + Y_{12}\bar{B}_2(\varphi) + \bar{F}_{12}(\varphi),\\
&\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),\\
&\frac{dY_{21}}{dt} = \bar{A}_2(\varphi)Y_{21} + Y_{21}\bar{B}_1(\varphi) + \bar{F}_{21}(\varphi), \qquad \frac{dY_{22}}{dt} = \bar{A}_2(\varphi)Y_{22} + Y_{22}\bar{B}_2(\varphi) + \bar{F}_{22}(\varphi)
\end{aligned}
\tag{50}
$$

при будь-яких фіксованих функціях $\bar{F}_{ij}(\varphi) \in C(T_m)$. Існують приклади, які показують, що система (49) може мати інваріантний тор при будь-яких фіксованих функціях $\bar{F}_{ij}(\varphi) \in C(T_m)$, а система (50) не при всіх $\bar{F}_{ij}(\varphi) \in C(T_m)$ має інваріантний тор.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. *Самойленко А. М.* К теории возмущения инвариантных многообразий динамических систем // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Т. 1. Аналитические методы. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. – С. 495 – 499.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Некоторые вопросы теории многочастотных колебаний. – Киев, 1977. – 46 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 77.14).
4. *Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M., Kulik V. L.* Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems. – London: Taylor & Francis Inc., 2003.
5. *Самойленко А. М.* О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 12. – С. 1665 – 1699.
6. *Бойчук А. А.* Условие существования единственной функции Грина – Самойленко задачи об инвариантном торе // Там же. – 2001. – **53**, № 4. – С. 556 – 559.
7. *Kenneth J. Palmer.* On the reducibility of almost periodic systems of linear differential systems // J. Different. Equat. – 1980. – **36**, № 3. – P. 374 – 390.
8. *Кулик Г. М., Кулик В. Л.* Існування функцій Гріна – Самойленка деяких лінійних розширень динамічних систем // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 4. – С. 468 – 474.
9. *Кулик В. Л., Степаненко Н. В.* Про властивість регулярності на осі деяких лінійних систем диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 4. – С. 568 – 574.

Одержано 08.11.2006