

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС СФЕРИЧЕСКОГО МАЯТНИКА ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

The origin, development and vanishing of the deterministic chaos in a dynamical system "spherical pendulum — electric motor of a limited power" are investigated. Chaotic attractors discovered in the system are described in detail.

Досліджено виникнення, розвиток і зникнення детермінованого хаосу в динамічній системі „сферичний маятник-електродвигун обмеженої потужності”. Детально описано виявлені в системі хаотичні аттрактори.

1. Введение. Маятниковые системы на протяжении столетий постоянно привлекают к себе внимание исследователей в различных областях математики, механики и физики. Эти системы являются классическим примером колебательных динамических систем. В маятниковых системах были обнаружены такие фундаментальные эффекты, как параметрический резонанс, высокочастотная стабилизация неустойчивых положений равновесия [1 – 5] и др.

Маятниковые системы чрезвычайно просты по своей физической природе и дают возможность проводить простую экспериментальную проверку различных теоретически обнаруженных колебательных эффектов. Однако в большей степени интерес к исследованию различных аспектов динамического поведения маятниковых систем объясняется тем, что многие эффекты и явления, впервые обнаруженные в маятниковых системах, впоследствии были установлены и для систем значительно более сложной физической природы, таких как кольца, оболочки, пластины, различные среды в цилиндрических и сферических полостях. Более того, различные маятниковые системы стали с успехом применяться для приближенного математического моделирования динамики указанных выше сложных колебательных систем [6 – 11]. При этом упрощаются, иногда достаточно существенно, получаемые дифференциальные уравнения движения, но остается достаточно точным описание динамики этих сложных колебательных систем. Например, применение процедуры Бубнова – Галеркина при описании колебаний свободной поверхности жидкости в топливных баках дает возможность исследование системы уравнений в частных производных заменить исследованием более простой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Знание же особенностей динамики маятниковых моделей позволяет предугадать динамику распределенных систем. Кроме того, такой подход позволяет дорогостоящие натурные испытания заменить простыми лабораторными экспериментами.

В последнее время значительно расширилась область применения маятниковых моделей для математического описания колебательных процессов. Такие модели стали широко применяться при исследовании динамического поведения систем самой разнообразной природы в биологии, медицине, экономике и социологии [12].

Подавляющее большинство исследований динамики маятниковых систем проводится без учета ограниченности мощности источника возбуждения колебаний.

При такой идеализации источника возбуждения предполагается, что он имеет неограниченную мощность. Поэтому при математическом моделировании таких систем обратное влияние колебательной системы на функционирование источника возбуждения колебаний исключают из рассмотрения, считая, что это влияние пренебрежимо мало. Такой подход и широкое использование различных методов редукции дают возможность понизить порядок динамических систем, применяемых для исследования колебаний маятников. Однако во многих случаях такая идеализация приводит к значительным ошибкам в качественном и количественном описании динамических режимов маятниковых систем. Так, устойчивые по Ляпунову при теоретических расчетах режимы могут оказаться неустойчивыми при проведении натуральных экспериментов. Вместо ожидаемых периодических режимов обнаруживаются положения равновесия, и наоборот [9, 13 – 15].

Мировоззренческий переворот, вызванный открытием детерминированного хаоса в динамических системах, существенно расширил наше представление о возможных установившихся колебательных режимах в маятниковых системах. Становится очевидной, во многих случаях, порочность идеализации источников возбуждения колебаний и, особенно, применение различных методов редукции. Качественно различные методы редукции предполагают замену исследований динамики произвольной исходной системы на исследование динамики ряда подсистем, на которые каким-либо способом расщепляется исходная система. При этом уменьшается размерность фазовых пространств получаемых подсистем. Платой за такое упрощение исходной системы может служить потеря информации о возможных хаотических аттракторах исходной системы. Это происходит во всех случаях, когда фазовая размерность редуцированных подсистем меньше или равна двум.

Фактически своеобразным редуцированием исходной маятниковой системы является пренебрежение взаимодействием между этой системой и каким-либо источником возбуждения колебаний. Неважно на каком основании, то ли неограниченностью мощности источника возбуждения, то ли малостью коэффициентов взаимосвязи между маятником и источником возбуждения. Выплескивание такой „воды“ (взаимосвязи между маятником и источником) приводит к выплескиванию „ребенка“ (полной потере информации о хаотических режимах взаимодействия). Поэтому ясно, что открытие детерминированного хаоса заставляет отказаться от применения методов редукции при полноценном исследовании типов динамических режимов различных колебательных систем.

2. Сферический маятник. Сферический маятник является самым простым примером осциллятора с двумя степенями свободы, имеющего равные частоты. Многие явления, характерные для сферического маятника, проявляются в динамике систем с распределенными параметрами, имеющими периодическую координату: колец, цилиндрических и сферических оболочек, круглых пластин, сред в цилиндрических и сферических полостях. Поэтому знание свойств колебательных процессов сферического маятника дает понимание колебательных эффектов в ряде упомянутых выше систем.

Рассмотрим систему, схема которой представлена на рис. 1. Кривошипно-ползунный механизм соединяет ротор электродвигателя с точкой подвеса физи-

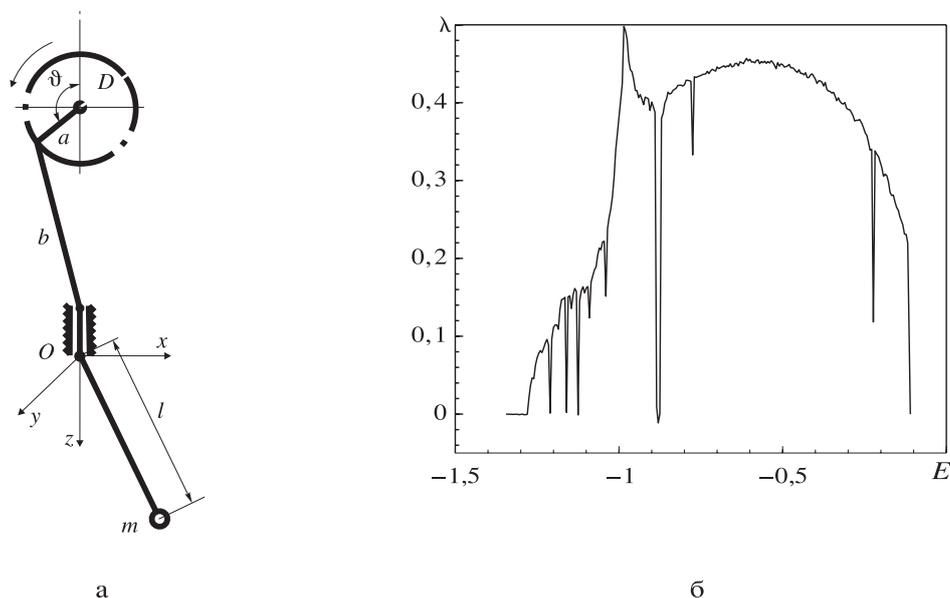


Рис. 1. Схема рассматриваемой системы (а) и зависимость старшего ляпуновского характеристического показателя от угла наклона статической характеристики (б).

ческого маятника, который может совершать пространственные колебания. Как известно, такой маятник называется сферическим.

Введем декартову систему координат $Oxyz$, как показано на рис. 1. Обозначим через a, b длину кривошипа и ползуна соответственно. Предположим, что $b \gg a$. Когда кривошип a поворачивается на угол Θ , ползун с подвесом получает перемещение вдоль вертикальной оси неподвижной системы координат вида $v(t) = -a \cos \Theta$. В неподвижной декартовой системе координат $Oxyz$ кинетическая энергия системы „маятник-электродвигатель” записывается в виде [10, 14, 16]

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} m \left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (\dot{v} + \dot{z})^2 \right], \quad (1)$$

а потенциальная —

$$V = mg(l - z - v), \quad (2)$$

где x, y, z — декартовы координаты центра масс маятника, I — момент инерции ротора электродвигателя, m — масса маятника, l — приведенная длина маятника. Массой ползуна и подвеса мы пренебрегаем.

Следуя работе [16], введем новые переменные α и β по формулам

$$x = l \sin \alpha, \quad y = l \sin \beta.$$

Поскольку во введенной системе координат $Oxyz$ для маятника всегда выполняется соотношение

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

то

$$z = l\sqrt{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}.$$

Для малых α и β лагранжиан исследуемой системы $T - V$ представим в виде [10, 16, 17]

$$\begin{aligned} T - V = & \frac{1}{2}I\dot{\Theta}^2 + \\ & + \frac{1}{2}ml^2 \left[\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 2\alpha\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - 2(\alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\beta})\dot{\Theta}\frac{a}{l}\sin\Theta + \dot{\Theta}^2\frac{a^3}{l^2}\sin^2\Theta \right] - \\ & - gml \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{24} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^4}{24} + \frac{\alpha^2\beta^2}{4} + \frac{a}{l}\cos\Theta \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Поэтому для основных переменных $\Theta(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ уравнения Лагранжа (уравнения движения) запишутся в следующей форме:

$$\begin{aligned} I\ddot{\Theta} = & L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta}) - mla \left[\ddot{\Theta}\frac{a}{l}\sin^2\Theta + \dot{\Theta}^2\frac{a}{l}\sin\Theta\cos\Theta + \frac{g}{l}\sin\Theta - \right. \\ & \left. - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)\sin\Theta - (\alpha\ddot{\alpha} + \beta\ddot{\beta})\sin\Theta \right], \\ \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha\beta^2}{2} \right) + \delta_1\dot{\alpha} + \alpha(\dot{\beta}^2 + \beta\ddot{\beta}) - \\ & - \frac{a}{l}\alpha \left(\dot{\Theta}^2\cos\Theta + \ddot{\Theta}\sin\Theta \right) = 0, \\ \ddot{\beta} + \omega_0^2 \left(\beta - \frac{\beta^3}{6} + \frac{\alpha^2\beta}{2} \right) + \delta_1\dot{\beta} + \beta(\dot{\alpha}^2 + \alpha\ddot{\alpha}) - \\ & - \frac{a}{l}\beta \left(\dot{\Theta}^2\cos\Theta + \ddot{\Theta}\sin\Theta \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $L(\dot{\Theta})$ — движущий момент электродвигателя, $H(\dot{\Theta})$ — внутренний момент сил сопротивления вращению ротора электродвигателя, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ — собственная частота маятника, δ_1 — коэффициент демпфирования силы сопротивления среды, в которой движется маятник.

Полученная система дифференциальных уравнений описывает сложный процесс взаимодействия вращения вала двигателя (формирование возбуждающей силы) и пространственных колебаний маятника. Она является существенно нелинейной и не допускает точного аналитического решения. Для упрощения системы уравнений (4) введем малый параметр $\varepsilon = \frac{a}{l}$, положив $a \leq l$. Кроме того, предположим, что реализуются условия основного параметрического резонанса, когда скорость вращения вала двигателя $\dot{\Theta}$ близка к удвоенной собственной частоте маятника $2\omega_0$, а именно,

$$\dot{\Theta}(t) = 2\omega_0 + \varepsilon\omega_0\nu(t). \quad (5)$$

Для исследования резонансных колебаний маятника выполним в уравнениях (4) замену переменных по формулам [17]

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left[y_1(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2} + y_2(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2} \right], \\ \beta(t) &= \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left[y_4(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2} + y_5(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2} \right].\end{aligned}\quad (6)$$

Посредством данной замены мы переходим в уравнениях (4) к новым переменным $y_1(\tau), y_2(\tau), y_4(\tau), y_5(\tau)$ и медленному времени τ ,

$$\tau = \frac{\varepsilon}{4} \Theta(t). \quad (7)$$

Подставим выражения (6) в уравнения (4) и проведем процедуру усреднения, используя методику работ [18, 19], по быстрому явно входящему времени $\Theta(t)$. При этом учтем, что

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha(t)}{dt} &= \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{d\Theta(t)}{dt} \left[-y_1(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2} + y_2(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2} \right], \\ \frac{d\beta(t)}{dt} &= \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{2} \frac{d\Theta(t)}{dt} \left[-y_4(\tau) \sin \frac{\Theta(t)}{2} + y_5(\tau) \cos \frac{\Theta(t)}{2} \right].\end{aligned}\quad (8)$$

После проведения процедуры усреднения по быстрому времени получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{d\tau} &= Cy_1 - \left[y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_2 - \frac{3}{4}(y_1 y_5 - y_2 y_4) y_4 + 2y_2, \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= Cy_2 + \left[y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_1 - \frac{3}{4}(y_1 y_5 - y_2 y_4) y_5 + 2y_1, \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= D(y_1 y_2 + y_4 y_5) + Ey_3 + F, \\ \frac{dy_4}{d\tau} &= Cy_4 - \left[y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_5 + \frac{3}{4}(y_1 y_5 - y_2 y_4) y_1 + 2y_5, \\ \frac{dy_5}{d\tau} &= Cy_5 + \left[y_3 + \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2) \right] y_4 + \frac{3}{4}(y_1 y_5 - y_2 y_4) y_2 + 2y_4.\end{aligned}\quad (9)$$

При выводе системы уравнений (9) использовалась линейная аппроксимация [14] статической характеристики двигателя, когда

$$\frac{L(\dot{\Theta}) - H(\dot{\Theta})}{I + \frac{1}{2}ma^2} = \varepsilon \frac{\omega_0}{2} (N_0 - N_1 \dot{\Theta}) + \varepsilon^2 \dots \quad (10)$$

Поэтому

$$F = \left(\frac{N_0}{\omega_0} - 2N_1 \right) \frac{l}{a}, \quad D = -\frac{2ml^2}{I + \frac{1}{2}ma^2}, \quad C = -\frac{\delta_1}{\omega_0}.$$

Кроме того, в системе (9) введено обозначение $y_3 = \nu$.

Полученная система дифференциальных уравнений пятого порядка (9) используется в качестве математической модели детерминированной колебательной динамической системы „сферический маятник-электродвигатель”. Отметим, что при идеализации источника возбуждения система уравнений (9) расщепляется на две подсистемы. Одна подсистема состоит из первого, второго, четвертого и пятого уравнений системы (9), вторая — из третьего уравнения системы (9). При этом, так как влиянием колебаний маятника на вращение вала двигателя пренебрегают, в этом уравнении полагают $D = 0$. Тогда третье уравнение (9) становится линейным, и для него элементарно может быть найдено общее решение (функция u_3), которое затем подставляется в первую подсистему. В дальнейшем можно проводить исследование решений первой, „маятниковой” подсистемы. Как установлено в работе [11], при применении идеализации источника возбуждения не удается обнаружить хаотических установившихся колебаний маятника при вертикальном возбуждении точки его подвеса.

Дальнейшей целью исследования является изучение возможных типов аттракторов системы уравнений (9). Поскольку данная система является достаточно сложной нелинейной системой уравнений, для построения ее аттракторов применяется комплекс численных методов и алгоритмов. Основным расчетным методом нахождения решений системы (9) являлся метод Рунге–Кутты четвертого или пятого порядка с применением корректирующей процедуры Дормана–Принса [20], которая обеспечивает точность проводимых вычислений порядка $O(10^{-12}) \div O(10^{-15})$. При построении фазовых портретов установившихся режимов особое внимание уделялось недопущению их искажения траекториями переходных процессов. Для построения спектра ляпуновских характеристических показателей аттракторов применялся алгоритм Бенеттина и др. [21], для построения сечений и отображений Пуанкаре аттракторов системы — метод Ено [12, 22] и для получения распределений спектральных плотностей — метод Файлона.

При проведении численных расчетов полагалось, что параметры системы (9) имеют следующие значения:

$$C = -0,5, \quad D = -1, \quad F = 0,5. \quad (11)$$

Начальные условия варьировались в окрестности начала координат фазового пространства системы уравнений (9).

В качестве бифуркационного рассматривался параметр E — угол наклона статической характеристики электродвигателя, зависящий от типа применяемого двигателя. Покажем, что при так выбранных значениях в пространстве параметров системы существуют большие области, в которых система (9) имеет хаотические аттракторы.

Исследование идентификации типов аттракторов системы (9) начнем с расчета старшего ляпуновского характеристического показателя. Напомним, что положительность такого показателя является основным практическим критерием хаотического поведения системы [12, 22]. На рис. 1, б приведена зависимость старшего ляпуновского характеристического показателя λ от угла наклона статической характеристики E . Как видно из приведенного рисунка, практически для всех $E \in (-1,27; -0,1)$ у системы существуют хаотические аттракторы. На графи-

ке также видны провалы значения старшего ляпуновского показателя, которые соответствуют узким окнам периодичности. Этим окнам больше в левой части графика.

При значениях $E \geq -1,75$ в системе (9) существует устойчивый предельный цикл достаточно простой структуры. При $E = -1,42$ такой цикл теряет устойчивость и в его окрестности возникает устойчивый предельный цикл удвоенного периода. Происходит первая бифуркация удвоения периода цикла. При дальнейшем возрастании значений E в системе продолжается каскад бифуркаций удвоения. Проекция фазового портрета цикла и нескольких бифуркаций удвоения его периода показаны на рис. 2. Приведенная на рисунках проекция включает переменные y_1 , y_2 , пропорциональные маятниковой угловой переменной α , и переменную y_3 , характеризующую вращение вала электродвигателя. На рисунках хорошо заметно удвоение числа тактов предельных циклов с каждой последующей бифуркацией. Этот бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода цикла завершается рождением хаотического аттрактора в критической точке $E \approx -1,275$. Таким образом, переход к хаосу совершается в соответствии со сценарием Фейгенбаума [23].

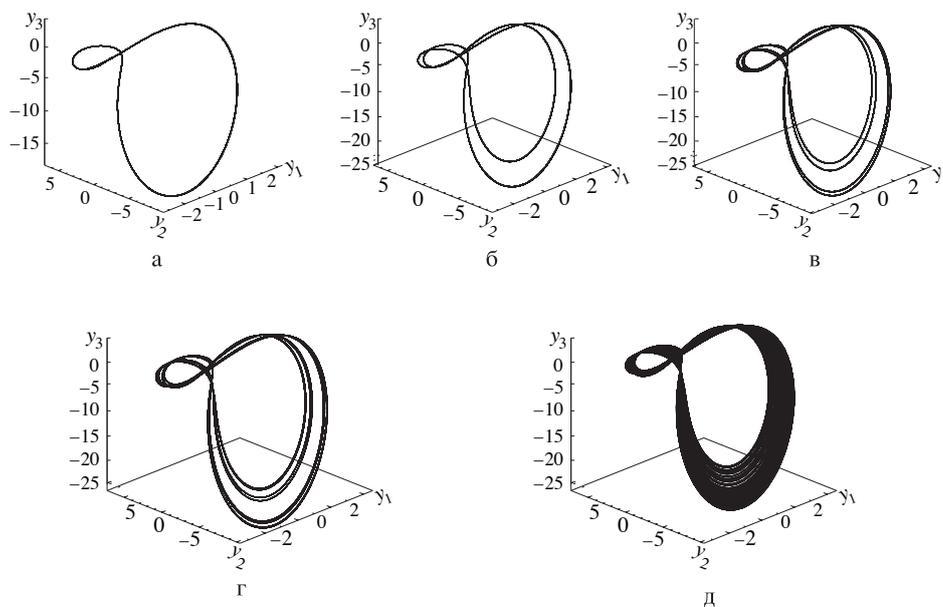


Рис. 2. Проекция фазового портрета предельного цикла при $E = -1,43$ (а), первых трех бифуркаций удвоения периода (б–г) и хаотического аттрактора при $E = -1,25$ (д).

Возникший хаотический аттрактор (рис. 2, д) имеет спиральную структуру и несколько напоминает хаотические аттракторы, обнаруженные у плоского маятника [13, 15]. Следует отметить, что такие хаотические аттракторы имеют некоторую, иногда довольно значительную, похожесть фазового портрета на фазовые портреты циклов с большим числом тактов, при бифуркациях которых рождаются эти хаотические аттракторы. Однако здесь имеется одно принципиальное отличие. Предельные циклы, несмотря на их как угодно большое число тактов, отличаются

регулярным возвращением траектории в любую точку цикла через время, строго равное периоду цикла. В случае же хаотического аттрактора картина совершенно иная. Траектория обязательно бесконечное число раз возвращается в любую, как угодно малую, окрестность аттрактора, но время таких возвратов непредсказуемо. Моменты времени этих возвратов образуют некоторую хаотическую последовательность.

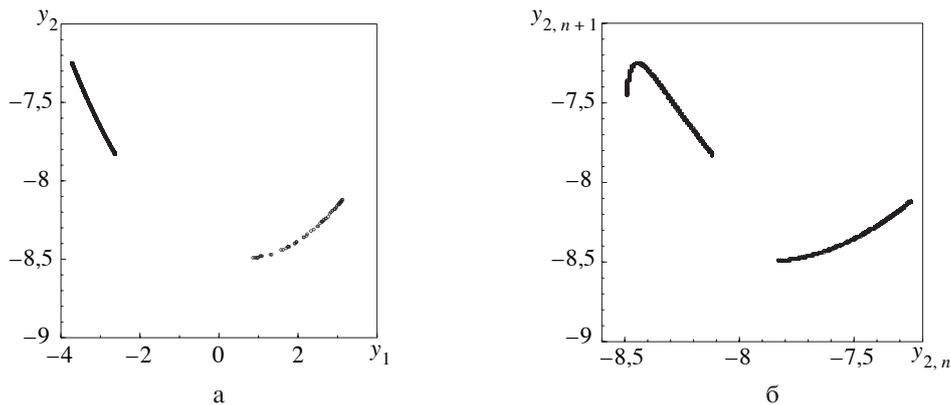


Рис. 3. Проекция сечения (а) и отображения Пуанкаре (б) хаотического аттрактора при $E = -1,25$.

На рис. 3, а, б приведены проекции сечения Пуанкаре, плоскостью $y_3 = -15$ и отображение Пуанкаре по переменной y_2 . Как видно из приведенных рисунков, сечение Пуанкаре имеет квазиленточную структуру. Число точек этого сечения постоянно увеличивается с ростом времени численного интегрирования. Его точки образуют некоторое хаотическое множество точек. Соответственно отображение Пуанкаре по форме напоминает одномерную кривую с локальным максимумом. Это может служить доказательством того, что система (9) находится в хаотическом режиме [12, 22]. Данное одномерное отображение может использоваться для приближенного изучения динамики системы. Естественно, что исследование одномерных отображений намного проще исследования систем дифференциальных уравнений с размерностью фазового пространства, равной пяти. Кроме того, такой вид отображения Пуанкаре свидетельствует о том, что система (9) принадлежит одному из классов универсальности динамических систем, введенных Фейгенбаумом [12, 22, 23]. Отметим еще одну особенность обнаруженных аттракторов системы, как регулярных, так и хаотических. Они имеют симметрию фазовых портретов по переменным y_1, y_2 и y_4, y_5 соответственно. Это объясняется симметрией уравнений (9) относительно данных переменных.

Как установлено ранее, возникшие в системе (9) при $E \approx -1,275$ хаотические установившиеся режимы продолжают существовать на очень значительном интервале изменения E . При возрастании значения E в системе наблюдаются структурные перестройки типа „хаос-хаос”, т. е. хаотический аттрактор одного типа в результате внутренних бифуркационных явлений сменяется хаотическим аттрак-

тором другого типа. Проследим за изменением свойств хаотических аттракторов при возрастании E .

При $-1,27 \leq E \leq -1,18$ наблюдается развитие хаотического аттрактора, заключающееся в увеличении объема области в фазовом пространстве, в которой находятся траектории аттрактора, и более плотном заполнении этой области траекториями аттрактора. Происходит некоторый рост величины старшего ляпуновского показателя, который при $E = -1,18$ достигает значения $0,134$. При $E = -1,17$ накапливающиеся количественные изменения приводят к заметной перестройке структуры существовавшего хаотического аттрактора. Проекция фазового портрета такого аттрактора, его сечение и отображение Пуанкаре приведены на рис. 4, *а-в*. Из рисунков видно, что особенно заметно, по сравнению с приведенными на рис. 3 *а, б*, изменились сечение и отображение Пуанкаре аттрактора, хотя сечение Пуанкаре, по-прежнему, имеет квазиленточную структуру.

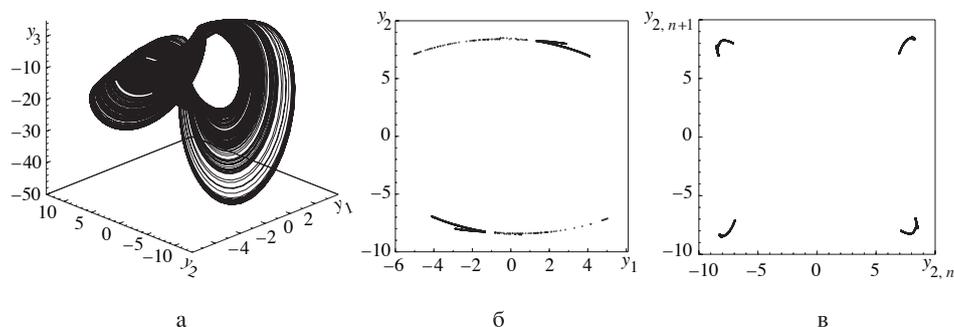


Рис. 4. Проекция фазового портрета хаотического аттрактора при $E = -1,17$ (*а*), его сечение (*б*) и отображение Пуанкаре (*в*).

При дальнейшем росте E наблюдается значительное увеличение фазового объема области локализации траекторий аттрактора, особенно по направлению переменной y_3 , что хорошо согласуется с теорией В. О. Кононенко [14]. Заметно, до $0,34$, возрастает старший ляпуновский характеристический показатель, что свидетельствует о значительном увеличении скорости разбегания близких фазовых траекторий аттрактора. На рис. 5 приведены, соответственно, проекции фазового портрета, сечения и отображения Пуанкаре хаотического аттрактора при $E = -1,01$. Очень своеобразный вид имеет двумерная проекция фазового портрета. Возникший „двуглазый” аттрактор напоминает известную „бабочку” аттрактора Лоренца, что свидетельствует о тесной связи различных типов хаотических аттракторов из разных разделов нелинейной динамики. Как и у всех ранее рассмотренных хаотических аттракторов, сечение Пуанкаре (рис. 5, *в*) имеет квазиленточную структуру. Но очень заметно усложнилось отображение Пуанкаре (рис. 5, *г*), которое представляет суперпозицию нескольких линий типа парабол.

При прохождении параметром E точки $-1,0$ в системе происходит жесткая бифуркация типа „хаос-хаос”, в результате которой возникает хаотический аттрактор иного типа. На рис. 6 приведены различные характеристики нового хаотического аттрактора. Как видно из рисунка, происходит поворот проекции фазового портрета. Особенно наглядно это проявляется при сравнении двумерных проекций с

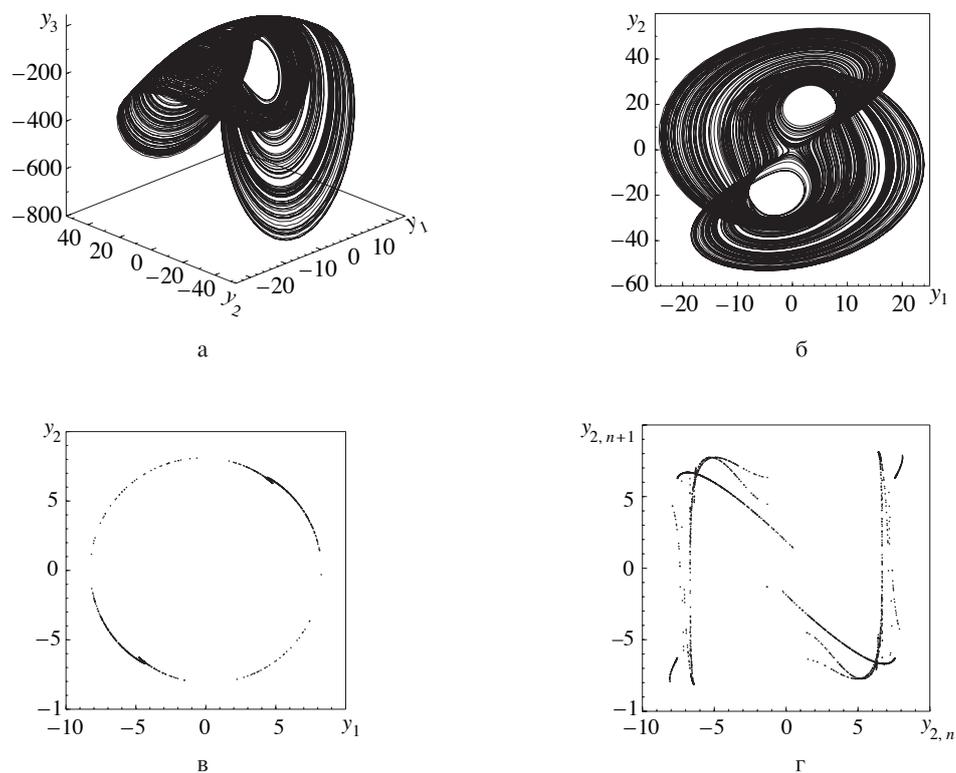


Рис. 5. Проекция фазового портрета хаотического аттрактора (а, б), его сечение (в) и отображение Пуанкаре (г) при $E = -1,01$.

рис. 5, б и 6, б. Изменяется и сечение Пуанкаре (рис. 6, в), точки которого начинают разбегаться на секущей плоскости, утрачивая квазиленточную структуру. Очень меняется вид отображения Пуанкаре (рис. 6, г), представляющего собой чрезвычайно сложную суперпозицию линий, среди которых явно просматриваются различные параболы. Становится невозможной какая-либо одномерная дискретная аппроксимация рассматриваемой задачи.

Такой тип хаотического аттрактора существует, за исключением узкого окна периодичности, на всем дальнейшем исследованном интервале изменения значений E . Однако структура аттрактора претерпевает некоторые изменения при увеличении E . На рис. 7 приведены характеристики хаотического аттрактора, построенного при $E = -0,61$. Этот хаотический аттрактор имеет наибольший старший ляпуновский показатель, равный 0,457, что заметно превышает аналогичные показатели аттракторов, выявленных нами при $E < -1$. Как было отмечено, это свидетельствует о большей скорости разбегания, неустойчивых по Ляпунову, близких в начальный момент времени траекторий аттрактора. При общей схожести фазовых портретов данного аттрактора и приведенного на рис. 6, а, б отметим исчезновение „глаз” на двумерной проекции фазового портрета. Изменяется, по сравнению с предыдущим случаем, и вид сечения Пуанкаре, точки которого начинают хаотически группироваться вдоль нескольких кривых, отдаленно напоминающих концентрические окружности. Еще более усложняется отображение Пуан-

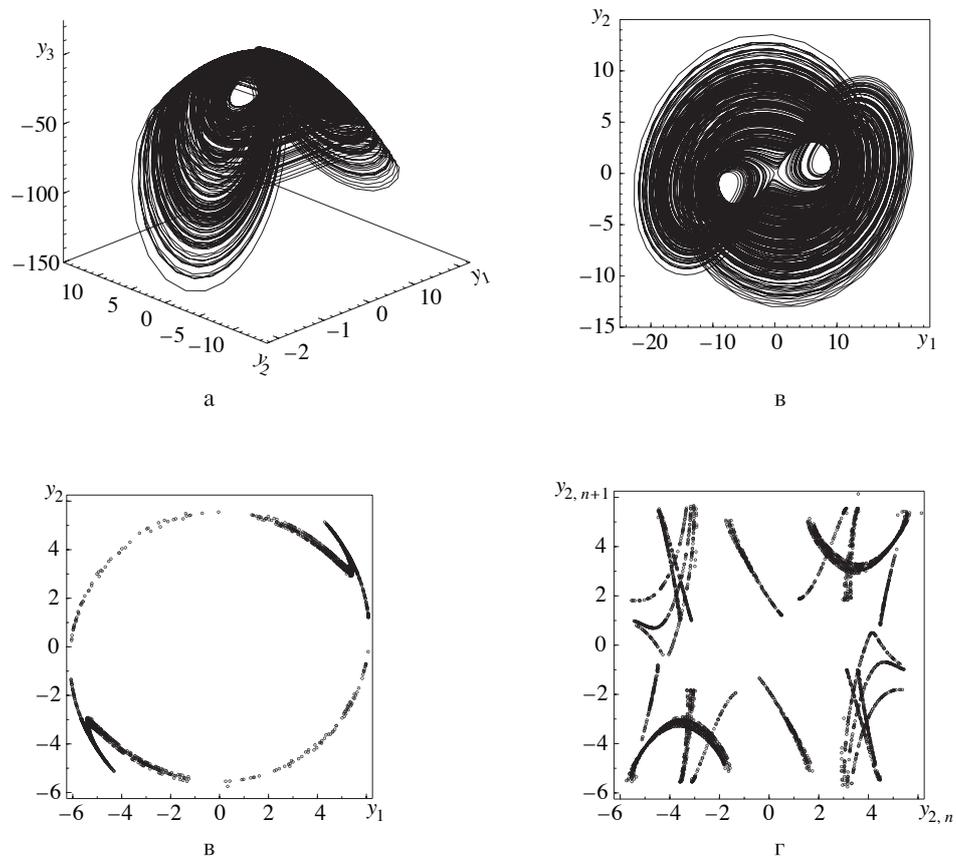


Рис. 6. Проекция фазового портрета хаотического аттрактора (а, б), его сечение (в) и отображение Пуанкаре (г) при $E = -0,89$.

каре, что, по-прежнему, делает невозможной какую-либо одномерную дискретную аппроксимацию рассматриваемой задачи.

При дальнейшем увеличении значений E начинает заметно уменьшаться фазовый объем области, в которой располагается хаотический аттрактор. Наконец, при $E = -0,1$ происходит разрушение хаотического аттрактора и в системе (9) возникает устойчивое положение равновесия. На рис. 8 приведены сечение и отображение Пуанкаре, а также распределение естественной инвариантной меры по проекции фазового портрета для хаотического аттрактора, построенного при $E = -0,12$, т. е. незадолго до его исчезновения. Точки сечения Пуанкаре отчетливо хаотически группируются вдоль кривых, по форме напоминающих концентрические окружности. Отображение Пуанкаре практически принимает вид некоторого точечного отображения. Очень интересный вид имеет распределение инвариантной меры по фазовому портрету аттрактора (рис. 8, в). Густое затемнение в центре рисунка показывает, что основное время траектории аттрактора пребывают в окрестности точки $(0, 0)$. Эта точка является проекцией неустойчивого положения равновесия системы (9). Хаос приобретает структуру, достаточно типичную для перемежаемости. Фазовые траектории данного аттрактора систе-

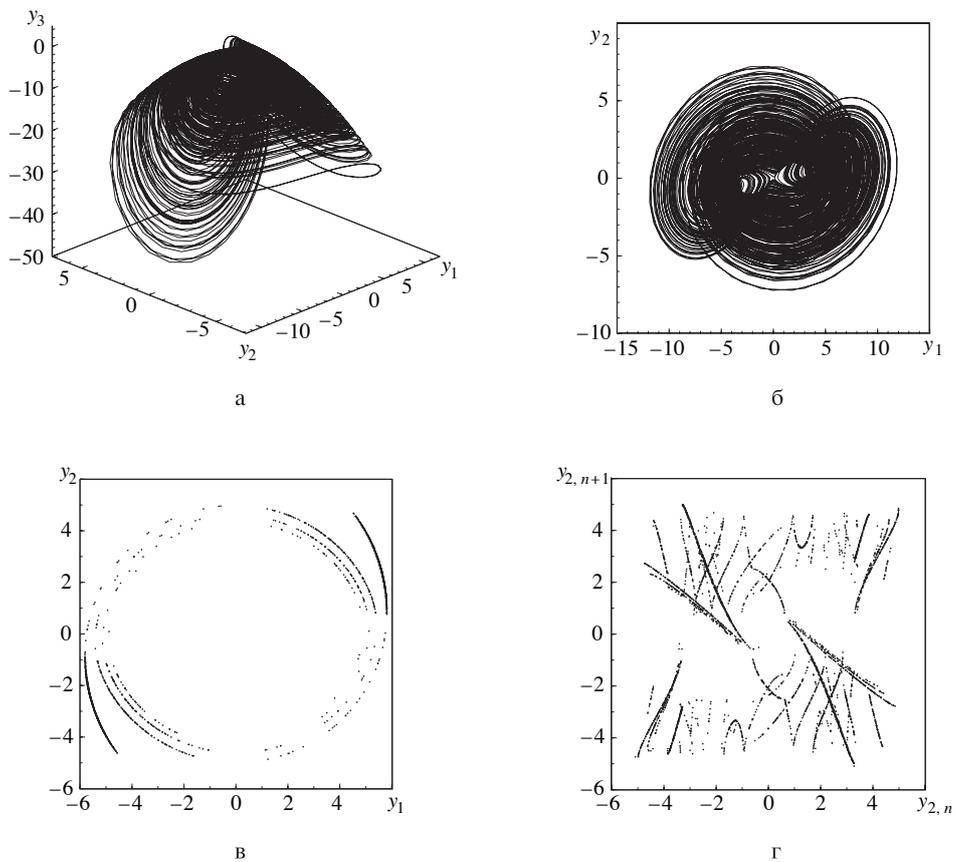


Рис. 7. Проекция фазового портрета хаотического аттрактора (а, б), его сечение (в) и отображение Пуанкаре (г) при $E = -0,61$.

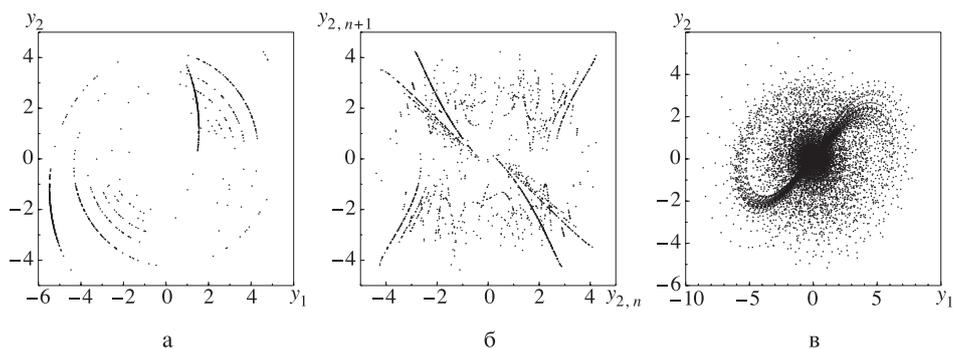


Рис. 8. Сечение (а), отображение Пуанкаре (б) и распределение инвариантной меры хаотического аттрактора (в) при $E = -0,12$.

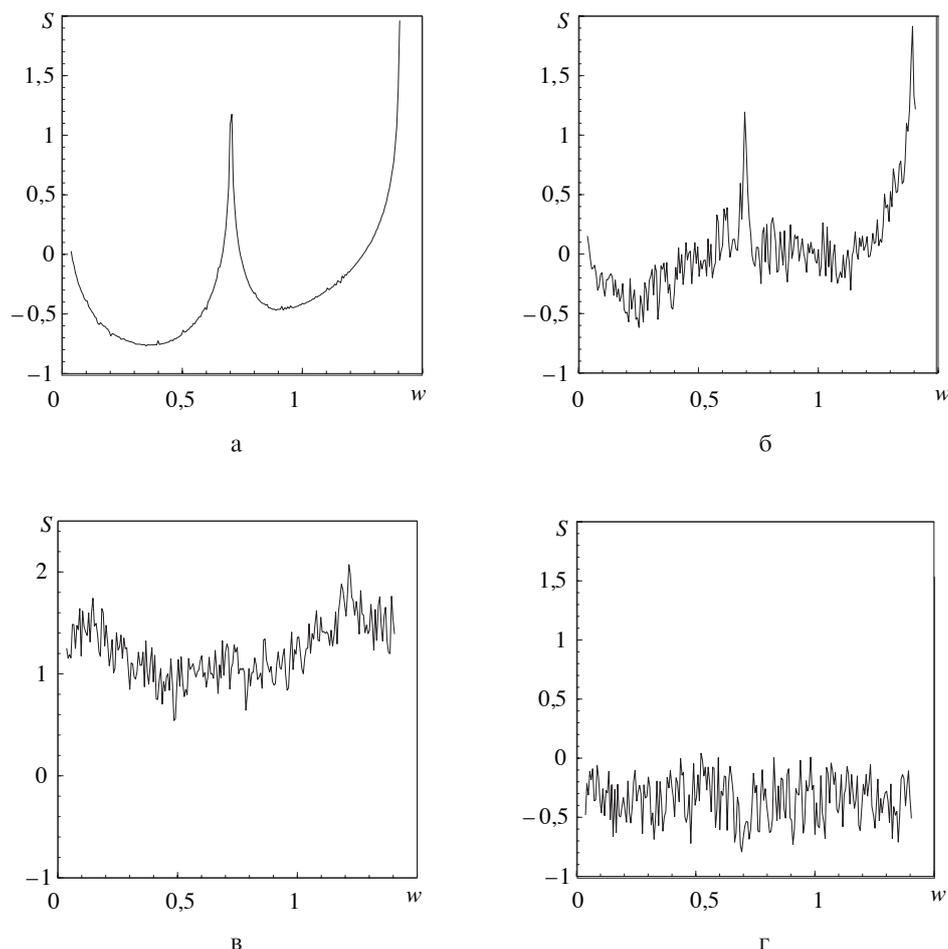


Рис. 9. Распределение спектральной плотности предельного цикла при $E = -1,31$ (а) и хаотических аттракторов при $E = -1,25$ (б), $E = -1,01$ (в) и $E = -0,12$ (г).

мы пытаются притянуться к нулевому положению равновесия, вследствие чего они длительное время блуждают в малой окрестности этого положения (ламинарная стадия, которой соответствуют густо затемненные участки на рис. 8, в). Затем в непредсказуемый наперед момент времени происходит турбулентный всплеск, сопровождающийся неперiodическими раскрутками по виткам спирали аттрактора.

Рассмотрим характерные особенности распределения спектральных плотностей (Фурье-спектры) для различных типов аттракторов системы (9). Так, на рис. 9, а приведен Фурье-спектр для первой бифуркации из ранее изученного нами каскада бифуркаций удвоения периодов предельных циклов системы, которые имели место для значений $E \in (-1,45; -1,275)$ (см. рис. 2, а-з). Построенный спектр является дискретным с четкими пиками на двух основных гармониках разложения временных реализаций данного предельного цикла в ряд Фурье. На рис. 9, б приведен Фурье-спектр хаотического аттрактора, который возникает в результате этого бесконечного каскада бифуркаций. Как видно из рис. 9, б, спектр становится непрерывным, что является еще одним подтверждением того, что система (9)

при данном значении E находится в хаотическом режиме. Однако в непрерывном спектре на рис. 9, б отчетливо видны пики гармоник исчезнувших предельных циклов.

Развитие хаоса при возрастании E , кроме изменений структуры фазового портрета и других характеристик хаотических аттракторов, также приводит к заметным изменениям их Фурье-спектров. Начинается постепенное уменьшение пиков таких непрерывных спектров, что в конце концов приводит к их исчезновению. Так, на рис. 9, в представлен Фурье-спектр, который соответствует хаотическому аттрактору, существующему у правого порога жесткой перестройки хаотических режимов. Этот спектр, по-прежнему, является непрерывным. Однако, как видно из рис. 9, в, в нем нет сколь-нибудь заметных пиков.

Что касается Фурье-спектров хаотических аттракторов, существующих в системе после жесткой бифуркации типа „хаос-хаос”, т. е. при $E > -1,0$, то все они имеют качественно подобную структуру. В качестве типичного представителя таких спектров выбран спектр, приведенный на рис. 9, г. Этот Фурье-спектр соответствует хаотическому аттрактору, который существует в системе (9) при $E = -0,12$, т. е. у правой границы исчезновения хаоса. Он является непрерывным и представляет собой некий „шумовой” пьедестал с отсутствием сколь-нибудь заметных пиков и завалов по всей области рассмотренных частот. Такие Фурье-спектры присущи всем хаотическим аттракторам, существующим в системе при $E > -1,0$.

Вызывает интерес сравнение полученных результатов со случаем идеализации источника возбуждения колебаний. Как было отмечено ранее, при таком подходе проводится редукция системы уравнений (9), после чего исследуется новая система, состоящая из первого, второго, четвертого и пятого уравнений системы (9). При этом неизвестная функция y_3 считается постоянным параметром. Было проведено численное интегрирование такой системы уравнений при $C = -0,5$ и значениях $y_3 = -250 \div 30$. Заметим, что это пределы изменения амплитуд колебаний функции y_3 в установившихся хаотических режимах. При численных расчетах значение y_3 изменялось с очень малым шагом. Во всех случаях наблюдается выход системы на устойчивое положение равновесия, причем для $|y_3| \geq 3$ это положение равновесия всегда имеет вид $y_1 = y_2 = y_4 = y_5 = 0$. В данной области изменения параметров не обнаружено не только хаотических аттракторов, но даже и устойчивых предельных циклов. Это в очередной раз свидетельствует о том, к каким грубым ошибкам в описании динамики системы приводит пренебрежение взаимодействием колебательной нагрузки с источником возбуждения колебаний. Предполагаемые простые устойчивые положения равновесия в действительности оказываются сложнейшими хаотическими аттракторами.

1. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. Ин-та строит. механики АН УССР. – 1950. – № 14. – С. 9–34.
2. Гадионенко А. Я. О периодических движениях маятника с вибрирующей точкой подвеса // Укр. мат. журн. – 1966. – 18, № 5. – С. 97–101.
3. Катица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1951. – 21. – С. 588–607.
4. Митропольский Ю. А., Швец А. Ю. О влиянии запаздывания на устойчивость маятника с вибрирующей точкой подвеса // Аналитические методы исследования нелинейных колебаний. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 115–120.
5. Швец А. Ю. Влияние переменного запаздывания на устойчивость колебаний маятника с вибрирующим подвесом // Укр. мат. журн. – 1985. – 37, № 1. – С. 127–129.
6. Луковский И. А. Механические аналогии в задачах нелинейной динамики твердого тела с жидкостью // Вопросы механики и ее приложений: Пр. Ин-ту математики НАН України. – 2002. – 44. – С. 125–160.

7. Crawford J. D., Knobloch E. Symmetry and symmetry-breaking bifurcations in fluid dynamics // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1991. – **23**. – P. 341–387.
8. Kambe T., Umeki M. Nonlinear dynamics of two-mode interaction in parametric excitation of surface waves // J. Fluid Mech. – 1990. – **139**. – P. 461–471.
9. Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Yu. Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations // J. Fluids and Structures. – 1994. – **8**, № 1. – P. 1–18.
10. Miles J. W. Resonant motion of a spherical pendulum // Physica D. – 1984. – **11**, № 3. – P. 309–323.
11. Miles J. W. Nonlinear Faraday resonance // J. Fluid Mech. – 1984. – **146**, № 2. – P. 285–302.
12. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. – М.: Наука, 1990. – 312 с.
13. Швец А. Ю. Карта динамических режимов физического маятника при ограниченном возбуждении // 36. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – **1**, № 2. – С. 197–209.
14. Kononenko V. O. Vibrating system with a limited power-supply. – London: Iliffe, 1969. – 236 p.
15. Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Yu. Chaos in vibrating systems with limited power-supply // Chaos. – 1993. – **3**, № 3. – P. 387–395.
16. Miles J. W. Stability of forced oscillations of a spherical pendulum // Quart. Appl. Math. – 1962. – **20**, № 1. – P. 21–32.
17. Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Yu. Chaotic oscillations of a spherical pendulum as the effect of interaction with excitation device // Complexity in Physics and Technology. – Singapore: World Sci., 1992. – P. 77–89.
18. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
19. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 439 с.
20. Хайпер Е., Нерсент С. П., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
21. Benettin G., Galgani L., Strelcyn J. M. Kolmogorov entropy and numerical experiments // Phys. Rev. A. – 1976. – **14**, № 6. – P. 2338–2342.
22. Кузнецов С. П. Динамический хаос. – М.: Физматлит, 2001. – 295 с.
23. Feigenbaum M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Statist. Phys. – 1978. – **19**, № 1. – P. 25–52.

Получено 18.09.2006