УДК 519.21

Є. В. Карнаух (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ДВОГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ МАЙЖЕ НАПІВНЕПЕРЕРВНИХ ПРОЦЕСІВ, ЗАДАНИХ НА ЛАНЦЮГУ МАРКОВА

Almost upper semicontinuous processes defined on a finite Markov chain are considered. Distributions of functionals associated with the exit of these processes from a finite interval are investigated. Some modification of such processes is also considered.

Рассматриваются почти полунепрерывные сверху процессы, заданные на конечной цепи Маркова. Изучаются распределения функционалов, связанных с выходом этих процессов из ограниченного интервала. Рассматривается также модификация данных процессов.

Задачі, пов'язані з виходом із інтервалу, для процесу з незалежними приростами розглядались у багатьох роботах (див., наприклад, [1, 2]). Аналогічні проблеми досліджувались для процесів на скінченному ланцюгу Маркова (ЛМ) за умови напівнеперервності [3, 4]. Для блукань на зліченному ЛМ двограничну задачу було розглянуто в [5]. У даній статті розглядаються розподіли деяких функціоналів, пов'язаних з виходом з обмеженого інтервалу, для процесу з незалежними приростами на скінченному ЛМ, за умови, що цей процес перетинає додатний рівень лише показниково розподіленими стрибками (майже напівнеперервний процес [6]).

Розподіли перестрибкових функціоналів, що описуються інтегральними рівняннями на півосі, визначаються проекційно-факторизаційним методом із застосуванням (замість канонічної) нескінченно подільної факторизації. В даній роботі досліджувані функціонали описуються інтегральним рівнянням на інтервалі, яке продовжується на півпряму. При розв'язанні продовженого рівняння використовується метод, розвинений М. Г. Крейном в [7, 8] із застосуванням імовірнісних факторизаційних тотожностей.

Розглянемо двовимірний процес Маркова

$$Z(t) = \{\xi(t),\ x(t)\}, \qquad t \geq 0,$$

де $x(t)$ — скінченний незвідний неперіодичний ЛМ з множиною станів $E' = \{1, \ldots, m\}$ та матрицею перехідних імовірностей

$$P(t) = e^{tQ}, \qquad t \geq 0, \qquad Q = N(P - I),$$

$N = \|\delta_{kr}\nu_k\|_{k,r=1}^{m}$, ν_k — параметри показниково розподілених випадкових величин ζ_k (час перебування $x(t)$ в стані k), $P = \|p_{kr}\|$ — матриця перехідних імовірностей вкладеного ланцюга; $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$ — стаціонарний розподіл, $\xi(t)$ — однорідний процес з умовно незалежними приростами при фіксованих значеннях $x(t)$ (див. [3, с. 13]).

Еволюція процесу $Z(t)$ описується матричною характеристичною функцією (х. ф.):

$$\Phi_t(\alpha) = \left\| \mathrm{E}[e^{i\alpha\xi(t)},\ x(t) = r \,/\, x(0) = k] \right\| = \mathrm{E}e^{i\alpha\xi(t)} = e^{t\Psi(\alpha)}, \quad \Psi(0) = Q.$$

Далі будемо розглядати процеси, які мають кумулянту

$$\Psi(\alpha) = \Lambda\overline{F}_0(0)\left(C(C - i\alpha I)^{-1} - I\right) + \int_{-\infty}^{0} (e^{i\alpha x} - 1)\,dK_0(x) + Q, \tag{1}$$

де

$$dK_0(x) = NdF(x) + \Pi(dx); \quad F(x) = \| \mathrm{P}\{\chi_{kr} < x;\ x(\zeta_1) = r / x(0) = k\} \|;$$

χ_{kr} — стрибки $\xi(t)$ в моменти переходу $x(t)$ зі стану k в r;

$$\Pi(dx) = \Lambda dF_0(x); \quad F_0(x) = \left\| \delta_{kr} F_k^0(x) \right\|;$$

$F_k^0(x)$ — функції розподілу стрибків $\xi(t)$, якщо $x(t) = k$; $\Lambda = \|\delta_{kr}\lambda_k\|$; λ_k — параметри показниково розподілених випадкових величин ζ_k' (час між двома сусідними стрибками $\xi(t)$, якщо $x(t) = k$); $C = \|\delta_{kr} c_k\|$; c_k — параметри показниково розподілених додатних стрибків $\xi(t)$, якщо $x(t) = k$. Процес $Z(t)$ з такою кумулянтою є майже напівнеперервним зверху процесом і визначений в [6, с. 43].

Якщо через θ_s позначити показниково розподілену випадкову величину з параметром $s > 0$ $(\mathrm{P}\{\theta_s > t\} = e^{-st},\ t \geq 0)$, не залежну від $Z(t)$, то х. ф. $\xi(\theta_s)$ записуємо так:

$$\Phi(s, \alpha) = \mathrm{E} e^{i\alpha\xi(\theta_s)} = s \int_0^\infty e^{-st} \Phi_t(\alpha) dt = s(sI - \Psi(\alpha))^{-1},$$

$$P_s = s \int_0^\infty e^{-st} P(t) dt = \Phi(s, 0) = s(sI - Q)^{-1}.$$

Позначимо моменти першого досягнення додатного (від'ємного) рівня через

$$\tau^+(x) = \inf\{t > 0 \colon \xi(t) > x\}, \quad x > 0$$

$$(\tau^-(x) = \inf\{t > 0 \colon \xi(t) < x\}, \quad x < 0),$$

та момент першого виходу з інтервалу $(x - T,\ x)$, $0 < x < T$, $T > 0$, через

$$\tau(x, T) = \inf\{t > 0 \colon \xi(t) \notin (x - T,\ x)\}.$$

Введемо події

$$A_+(x) = \{\omega : \xi(\tau(x, T)) \geq x\}, \quad A_-(x) = \{\omega : \xi(\tau(x, T)) \leq x - T\}.$$

Тоді для $x > 0$ можемо записати

$$\tau(x, T) \doteq \begin{cases} \tau^+(x, T) = \tau^+(x), & \omega \in A_+(x), \\ \tau^-(x, T) = \tau^-(x - T), & \omega \in A_-(x). \end{cases}$$

Перестрибки в момент виходу з інтервалу визначимо так:

$$\gamma_T^-(x) = x - T - \xi(\tau^-(x, T)), \quad \gamma_T^+(x) = \xi(\tau^+(x, T)) - x.$$

У першій частині статті знайдемо уточнення для генератрис:

$$B^T(s, x) = \left\| \mathrm{E}\left[e^{-s\tau(x,T)},\ \xi(\tau(x, T)) \geq x,\ \ x(\tau(x, T)) = r / x(0) = k\right] \right\| =$$

$$= \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^+(x,T)},\ A_+(x)\right],$$

$$B_T(s, x) = \left\| \mathrm{E}\left[e^{-s\tau(x,T)},\ \xi(\tau(x, T)) \leq x - T,\ \ x(\tau(x, T)) = r / x(0) = k\right] \right\| =$$

$$= \mathrm{E}\left[e^{-s\tau^-(x,T)},\ A_-(x)\right],$$

$$B(s, x, T) = \mathrm{E} e^{-s\tau(x,T)}, \quad V(s, \alpha, x, T) = \mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi(\theta_s)},\ \tau(x, T) > \theta_s\right],$$

$$V^\pm(s, \alpha, x, T) = \mathrm{E}\left[e^{i\alpha\gamma_T^\pm(x) - s\tau^\pm(x,T)},\ A_\pm(x)\right],$$

$$V_{\pm}(s,\alpha,x,T) = \mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi(\tau^{\pm}(x,T))-s\tau^{\pm}(x,T)},\ A_{\pm}(x)\right].$$

Позначимо множину обмежених абсолютно інтегровних на інтервалі $I \subset \subset (-\infty,\infty)$ функцій і, відповідно, множину їх інтегральних перетворень так:

$$\mathcal{L}_m(I) = \left\{G(x) = \|G_{kr}(x)\|:\ \int_I |G_{kr}(x)|dx < \infty;\ k,r = \overline{1,m}\right\},$$

$$\Re_m^0(I) = \left\{g^0(\alpha) = \left\|g_{kr}^0(\alpha)\right\|:\ g_{kr}^0(\alpha) = C_{kr} + \int_I e^{i\alpha x} G_{kr}(x)dx;\ k,r = \overline{1,m}\right\}.$$

Введемо операцію проектування на $\Re_m^0((-\infty,\infty))$:

$$[C+g(\alpha)]_I = \int_I e^{i\alpha x} G(x)dx, \qquad [C+g(\alpha)]_I^0 = C + \int_I e^{i\alpha x} G(x)dx,$$

$$[C+g(\alpha)]_- = [C+g(\alpha)]_{(-\infty,0)}, \qquad [C+g(\alpha)]_+ = [C+g(\alpha)]_{(0,\infty)}.$$

Слід зазначити, що $V(s,\alpha,x,T) \in \Re_m^0((x-T,x))$, $V^+(s,\alpha,x,T) \in \Re_m^0([x,\infty))$, $V(s,\alpha,x,T) \in \Re_m^0((-\infty,x-T]))$.

Далі, введемо екстремуми для $\xi(t)$ і відповідні функції розподілів:

$$\xi^{\pm}(t) = \sup_{0\le u\le t}(\inf)\,\xi(u), \qquad \xi^{\pm} = \sup_{0\le u\le\infty}(\inf)\,\xi(u),$$

$$\bar{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^+(t), \qquad \check{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^-(t),$$

$$P_+(s,x) = \mathrm{P}\{\xi^+(\theta_s) < x\}, \quad x > 0, \qquad P^-(s,x) = \mathrm{P}\{\bar{\xi}(\theta_s) < x\}, \quad x < 0,$$

$$p_+(s) = \mathrm{P}\{\xi^+(\theta_s) = 0\}, \qquad q_+(s) = P_s - p_+(s),$$

$$p_+^*(s) = p_+(s)P_s^{-1}, \qquad R_+^*(s) = Cp_+^*(s).$$

Лема 1 [3, с. 49]. *Для двовимірного процесу Маркова* $Z(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ *має місце факторизаційна тотожність*

$$\Phi(s,\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\xi(\theta_s)} = \begin{cases}\Phi_+(s,\alpha)P_s^{-1}\Phi^-(s,\alpha),\\ \Phi_-(s,\alpha)P_s^{-1}\Phi^+(s,\alpha),\end{cases} \tag{2}$$

де

$$\Phi_{\pm}(s,\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\xi^{\pm}(\theta_s)}, \qquad \Phi^-(s,\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\bar{\xi}(\theta_s)}, \qquad \Phi^+(s,\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\check{\xi}(\theta_s)}.$$

Теорема 1. *Для процесу* $Z(t)$ *з кумулянтою* (1) $B^T(s,x)$ *визначається співвідношенням*

$$sB^T(s,x) = s(I-p_+^*(s))e^{-R_+^*(s)x} - p_+^*(s)\int_{-\infty}^{x-T} dP^-(s,y)e^{-C(x-y)}C_0^T(s) -$$

$$-\ (I-p_+^*(s))\int_0^x e^{-R_+^*(s)z}R_+^*(s)\int_{-\infty}^{x-z-T} dP^-(s,y)e^{-C(x-y-z)}dz\,C_0^T(s), \qquad 0 < x < T,$$

$$C_0^T(s) = \Lambda\overline{F}_0(0)\left(I + C\int_0^T e^{Cz}B^T(s,z)dz\right). \tag{3}$$

Доведення. Зі стохастичних співвідношень для $\tau^+_{kr}(x, T)$, де нижні індекси відповідно позначають початковий стан та стан ланцюга $x(t)$ в момент виходу з $(x-T, x)$ $(x(0) = k,\ x(\tau(x, T)) = r)$:

$$\tau^+_{kr}(x, T) = \begin{cases} \zeta'_k, & \zeta'_k < \zeta_k,\ \ \xi_k > x, \\ \zeta'_k + \tau^+_{kr}(x-\xi_k, T), & \zeta'_k < \zeta_k,\ x-T < \xi_k < x, \\ \zeta_k + \tau^+_{jr}(x-\chi_{kj}, T), & \zeta'_k > \zeta_k,\ x-T < \chi_{kj} < x, \end{cases} \tag{4}$$

виводяться рівняння

$$B^T_{kr}(s, x) = \lambda_k \int_0^\infty e^{-(s+\lambda_k+\nu_k)y} dy \left(\int_x^\infty dF^0_k(z) + \int_{x-T}^x dF^0_k(z) B^T_{kr}(s, x-z) \right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \nu_k \int_0^\infty e^{-(s+\lambda_k+\nu_k)y} dy \int_{x-T}^x dF_{kj}(z) B^T_{jr}(s, x-z), \quad 0 < x < T,$$

які можна записати в матричній формі

$$(sI + \Lambda + N) B^T(s, x) = \Lambda \overline{F}_0(x) + \int_{x-T}^x dK_0(z) B^T(s, x-z), \quad 0 < x < T,$$

$$B^T(s, x) = 0, \quad x \ge T, \qquad B^T(s, x) = I, \quad x < 0. \tag{5}$$

Після заміни $\overline{B}^T(s, x) = I - B^T(s, x)$ з (5) для $\overline{B}^T(s, x)$, $0 < x < T$, отримаємо рівняння

$$(sI + \Lambda + N) \overline{B}^T(s, x) = (sI - Q) + \int_{-\infty}^\infty dK_0(z) \overline{B}^T(s, x-z), \quad 0 < x < T,$$

яке після продовження на піввісь $x > 0$ буде мати вигляд

$$(sI + \Lambda + N) \overline{B}^T(s, x) = (sI - Q) + \int_{-\infty}^\infty dK_0(z) \overline{B}^T(s, x-z) + e^{-Cx} C^T_0(s) I\{x > T\}. \tag{6}$$

Позначимо $C_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x} I\{x > 0\}$ і розглянемо замість (6) рівняння для $Y_\varepsilon(T, s, x)$, $x > 0$, $\varepsilon > 0$:

$$(sI + \Lambda + N) Y_\varepsilon(T, s, x) = (sI - Q) C_\varepsilon(x) +$$

$$+ \int_{-\infty}^\infty dK_0(z) Y_\varepsilon(T, s, x-z) + e^{-Cx} C^T_0(s) I\{x > T\}. \tag{7}$$

Застосовуючи інтегральне перетворення по x до (7), отримуємо рівняння

$$(sI - \Psi(\alpha)) \tilde{Y}_\varepsilon(T, s, \alpha) = (sI - Q) \int_0^\infty e^{i\alpha z} e^{-\varepsilon z} dz + \int_0^\infty e^{i\alpha z} e^{-Cz} C^T_0(s) I\{z > T\} dz -$$

$$- \left[\tilde{K}_0(\alpha) \tilde{Y}_\varepsilon(T, s, \alpha) \right]_-,$$

$$\tilde{K}_0(\alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha z} dK_0(z), \qquad \tilde{Y}_\varepsilon(T, s, \alpha) = \int_0^\infty e^{i\alpha z} Y_\varepsilon(T, s, z) dz. \tag{8}$$

Використовуючи (2), після проектування $[\,]_+$ з (8) одержуємо співвідношення

$$s\tilde{Y}_\varepsilon(T,s,\alpha) = \Phi_+(s,\alpha)P_s^{-1}\left[\Phi^-(s,\alpha)\left((sI-Q)\int_0^\infty e^{i\alpha z}e^{-\varepsilon z}dz + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^\infty e^{i\alpha z}e^{-Cz}C_0^T(s)I\{z>T\}dz\right)\right]_+,$$

після обернення якого маємо

$$sY_\varepsilon(T,s,x) = \int_0^x dP_+(s,z)P_s^{-1}\int_{-\infty}^0 dP^-(s,y)(sI-Q)e^{-\varepsilon(x-y-z)} +$$

$$+ \int_0^x dP_+(s,z)P_s^{-1}\int_{-\infty}^{\min\{x-z-T,\,0\}} dP^-(s,y)e^{-C(x-y-z)}C_0^T(s). \tag{9}$$

Оскільки $Y_\varepsilon(T,s,x) \to \overline{B}^T(s,x)$ при $\varepsilon \to 0$, $0 < x < T$, то з (9) випливає

$$s\overline{B}^T(s,x) = \int_0^x dP_+(s,z)(sI-Q) + \int_0^x dP_+(s,z)P_s^{-1}\int_{-\infty}^{x-z-T} dP^-(s,y)e^{-C(x-y-z)}C_0^T(s).$$

Враховуючи, що [6, с. 45]

$$\mathrm{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\} = (I - p_+^*(s))e^{-R_+^*(s)x}P_s, \qquad x > 0, \tag{10}$$

отримуємо (3).

Далі наведемо без доведення аналог тотожностей Печерського (див. [2, с. 108]).

Лема 2. *Для* $Z(t)$ *мають місце наступні тотожності*:

$$V(s,\alpha,x,T) = \Phi(s,\alpha)\big(I - V_+(s,\alpha,x,T) - V_-(s,\alpha,x,T)\big), \tag{11}$$

$$V(s,\alpha,x,T) = \Phi_+(s,\alpha)P_s^{-1}\big[\Phi^-(s,\alpha)(I - V_+(s,\alpha,x,T))\big]_{[x-T,\,\infty)}, \tag{12}$$

$$V(s,\alpha,x,T) = \Phi_-(s,\alpha)P_s^{-1}\big[\Phi^+(s,\alpha)(I - V_-(s,\alpha,x,T))\big]_{(-\infty,\,x]}. \tag{13}$$

Позначимо спільний розподіл $\{\xi(\theta_s), \xi^+(\theta_s), \xi^-(\theta_s)\}$ так:

$$H_s(T,x,y) = \left\|\mathrm{P}\{\xi(\theta_s) < y,\ \xi^+(\theta_s) < x,\ \xi^-(\theta_s) > x-T,\ x(\theta_s) = r\,/\,x(0) = k\}\right\| =$$

$$= \mathrm{P}\{\xi(\theta_s) < y,\ \tau(x,T) > \theta_s\}.$$

Теорема 2. *Для процесу* $Z(t)$ *з кумулянтою* (1) *спільні розподіли* $\{\tau^+(x,T), \gamma_T^+(x)\}$ *та* $\{\tau^+(x,T), \xi(\tau^+(x,T))\}$ *визначаються співвідношеннями*

$$\begin{gathered} V^+(s,\alpha,x,T) = B^T(s,x)C(C-i\alpha I)^{-1}, \qquad 0 < x < T, \\ V_+(s,\alpha,x,T) = e^{i\alpha x}V^+(s,\alpha,x,T). \end{gathered} \tag{14}$$

Х. ф. $\xi(\theta_s)$ *до моменту виходу з інтервалу має вигляд*

$$V(s,\alpha,x,T) = \Phi_+(s,\alpha)P_s^{-1}\big[\Phi^-(s,\alpha)\big(I - e^{i\alpha x}B^T(s,x)C(C-i\alpha I)^{-1}\big)\big]_{[x-T,\,\infty)}, \tag{15}$$

відповідний розподіл має щільність $(x - T < y < x,\ y \neq 0)$

$$h_s(T,x,y) = \frac{\partial}{\partial y} H_s(T,x,y) =$$

$$= p_+^*(s)(P^-(s,y))' I\{y<0\} + (I - p_+^*(s)) \int_{x-T}^{\min(0;y)} e^{-R_+^*(s)(y-z)} R_+^*(s) dP^-(s,z) -$$

$$- p_+^*(s) \int_{-\infty}^{y-x} dP^-(s,z) B^T(s,x) C e^{-C(y-x-z)} - (I - p_+^*(s)) \int_0^{y-(x-T)} e^{-R_+^*(s)v} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{y-v-x} R_+^*(s) dP^-(s,z) B^T(s,x) C e^{-C(y-v-x-z)} dv \tag{16}$$

з атомом в нулі

$$\mathrm{P}\{\xi(\theta_s) = 0,\ \tau(x,T) > \theta_s\} =$$

$$= s\big(sI + \Lambda - N(\|\mathrm{P}\{\chi_{kr} = 0,\ x(\zeta_1) = r / x(0) = k\}\| - I)\big)^{-1}. \tag{17}$$

Імовірність невиходу з інтервалу $(x-T,\ x)$ *визначається співвідношенням*

$$\mathrm{P}\{\tau(x,T) > \theta_s\} = \int_{x-T}^{x} dH_s(T,x,y). \tag{18}$$

Для генератрис $\tau(x,T)$ *та* $\tau^-(x,T)$ *маємо*

$$\begin{aligned} B(s,x,T) &= I - \mathrm{P}\{\tau(x,T) > \theta_s\} P_s^{-1}, \quad 0 < x < T, \\ B_T(s,x) &= B(s,x,T) - B^T(s,x), \quad 0 < x < T. \end{aligned} \tag{19}$$

Доведення. Зі стохастичних співвідношень (4) для $\tau^+(x,T)$ та

$$\gamma_T^+(x)_{kr} \doteq \begin{cases} \xi_k, & \zeta_k' < \zeta_k,\ \xi_k > x, \\ \gamma_T^+(x-\xi_k)_{kr}, & \zeta_k' < \zeta_k,\ x-T < \xi_k < x, \\ \gamma_T^+(x-\chi_{kj})_{jr}, & \zeta_k' > \zeta_k,\ x-T < \chi_{kj} < x, \end{cases}$$

для $\gamma_T^+(x)$ виводимо рівняння

$$(sI + N + \Lambda) V^+(s,\alpha,x,T) = \Lambda \overline{F}_0(0) e^{-Cx} C (C - i\alpha I)^{-1} + \int_{x-T}^{x} dK_0(z) V^+(s,\alpha,x-z,T).$$

Враховуючи (5), отримуємо першу формулу з (14). Друга випливає з означення $\gamma_T^+(x)$. Співвідношення (15) випливає з (12). Після обернення по α з (15) отримаємо (16) та (17).

Використовуючи (16), (17) та аналог формул Братійчука [1, с. 187], можемо одержати матричний аналог для генератрис спільних розподілів $\{\tau^+(x,T),\ \xi(\tau^+(x,T))\}$ та $\{\tau^-(x,T), \xi(\tau^-(x,T))\}$.

Теорема 3. *Для* $Z(t)$ *мають місце наступні співвідношення*:

$$s\mathrm{E}\Big[e^{-s\tau^+(x,T)},\ \xi(\tau^+(x,T)) > z\Big] = \int_{x-T}^{x} dH_s(T,x,y) \overline{K}_0(z-y), \quad z > x, \tag{20}$$

$$sE\left[e^{-s\tau^-(x,T)},\ \xi(\tau^-(x,T)) < z\right] = \int_{x-T}^{x} dH_s(T,x,y)K_0(z-y), \quad z < x-T, \tag{21}$$

$$\overline{K}_0(x) = \int_x^{\infty} dK_0(y), \quad x > 0, \qquad K_0(x) = \int_{-\infty}^{x} dK_0(y), \quad x < 0.$$

Доведення. Згідно з [4, с. 469]

$$\mathrm{E}_i\left[e^{-s\tau(x,T)}f(x-\xi(\tau(x,T)),\ x(\tau(x,T)))\right] - f(x,i) = \mathrm{E}_i \int_0^{\tau(x,T)} e^{-st} g(x-\xi(t), x(t))\,dt, \tag{22}$$

де f — обмежена функція, $g = Af - sf$, A — генератор напівгрупи, який визначається кумулянтою $\Psi(\alpha)$. Для правої частини рівняння маємо

$$\mathrm{E}_i \int_0^{\tau(x,T)} e^{-st} g(x-\xi(t), x(t))\,dt = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} e^{-st} \mathrm{E}_i[g(x-\xi(t), j),\ \tau(x,T) > t,\ x(t) = j]\,dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} s^{-1} \int_{x-T}^{x} g(x-y, j)\,d(H_s(T,x,y))_{ij}. \tag{23}$$

Якщо припустити, що $f(x,i) = I\{x \ge -z\}\delta_{ir}$, $z > 0$, $i, r \in E'$, то

$$\mathrm{E}_i\left[e^{-s\tau(x,T)}f(x-\xi(\tau(x,T)),\ x(\tau(x,T)))\right] - f(x,i) =$$

$$= \mathrm{E}_i\left[e^{-s\tau(x,T)},\ \gamma_T^+(x) \ge z,\ x(\tau(x,T)) = r\right], \tag{24}$$

$$g(x,j) = \int_{-\infty}^{\infty} I\{x-y \le -z\}\,dK_0^{jr}(y) = \overline{K}_0^{jr}(x+z). \tag{25}$$

Підставляючи (24) та (25) в (22) та беручи до уваги (23), отримуємо

$$\mathrm{E}_i\left[e^{-s\tau(x,T)},\ \gamma_T^+(x) \ge z,\ x(\tau(x,T)) = r\right] = \sum_{j=1}^{m} s^{-1} \int_{x-T}^{x} \overline{K}_0^{jr}(x-y+z)\,d(H_s(T,x,y))_{ij}. \tag{26}$$

Використовуючи означення $\gamma_T^+(x)$, з (26) одержуємо (20). Аналогічно знаходимо формулу (21).

Розглянемо поведінку функцій $B^T(s,x)$ та $H_s(T,x,y)$ при $s \to 0$. Позначимо $M(y) = \lim_{s\to 0} s^{-1} p_+^*(s) P^-(s,y)$; існування цієї функції випливає з таких міркувань. Згідно з [6, с. 46] для генератриси $\overline{\xi}(\theta_s)$ маємо

$$\lim_{s\to 0} s^{-1} p_+^*(s) \mathrm{E} e^{r\overline{\xi}(\theta_s)} = -\left(p_+^*(0)C - rI\right)(C - rI)^{-1}\Psi^{-1}(-ir).$$

Тоді можемо визначити $M(y)$ як функцію, для якої

$$\int_{-\infty}^{0} e^{ry}\,dM(y) = -\left(p_+^*(0)C - rI\right)(C - rI)^{-1}\Psi^{-1}(-ir).$$

Крім того, з [6, с. 41] випливає

$$p_+^*(0) = \left(I - \left\| \mathrm{P}\left\{\tau^+(0) < \infty,\ x(\tau^+(0)) = r / x(0) = k\right\}\right\|\right).$$

***Наслідок* 1.** *Для процесу* $Z(t)$ *маємо*

$$\lim_{s\to 0} s^{-1}h_s(T,x,y) = M'(y)I\{y<0\} + (I - p_+^*(0)) \int\limits_{x-T}^{\min(0;y)} e^{-R_+^*(0)(y-z)}CdM(z) -$$

$$- (I - p_+^*(0)) \int\limits_0^{y-(x-T)} e^{-R_+^*(0)v} C \int\limits_{-\infty}^{y-v-x} dM(z)B^T(x)Ce^{-C(y-v-x-z)}dv -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{y-x} dM(z)B^T(x)Ce^{-C(y-x-z)}, \tag{27}$$

$$B^T(x) = \lim_{s\to 0} B^T(s,x) = (I - p_+^*(0))e^{-R_+^*(0)x} - \int\limits_{-\infty}^{x-T} dM(y)e^{-C(x-y)}C_0^T(0) -$$

$$- (I - p_+^*(0))\int\limits_0^x e^{-R_+^*(0)z} C \int\limits_{-\infty}^{x-z-T} dM(y)e^{-C(x-y-z)}dz\, C_0^T(0), \tag{28}$$

$$C_0^T(0) = \Lambda \overline{F}_0(0)\left(I + C\int\limits_0^T e^{Cz}B^T(z)dz\right).$$

Припустимо далі, що $\chi_{kr} \equiv 0$. Якщо $x(t) = k,\ k = 1, \dots, m,$ то покладемо

$$\xi(t) = \sum_{n \le \nu_k'(t)} \xi_n'^k - \sum_{n\le \nu_k(t)} \xi_n^k,$$

де $\nu_k'(t)$ та $\nu_k(t)$ — процеси Пуассона з інтенсивностями λ_k^1 та λ_k^2 відповідно, $\xi_n'^k$ та ξ_n^k — незалежні додатні випадкові величини; $\xi_n'^k$ показниково розподілені з параметрами c_k, ξ_n^k мають довільний розподіл з обмеженим математичним сподіванням m_k. Зрозуміло, що в цьому випадку процес $Z(t) = \{\xi(t),\ x(t)\}$ є майже напівнеперервним зверху з кумулянтою

$$\Psi(\alpha) = \Lambda\overline{F}_0(0)\left(C(C - i\alpha I)^{-1} - I\right) + \int\limits_{-\infty}^0 (e^{i\alpha x} - I)\Pi(dx) + Q,$$

де

$$\Lambda = \left\|\delta_{kr}(\lambda_k^1 + \lambda_k^2)\right\|, \qquad \overline{F}_0(0) = \left\|\delta_{kr}\lambda_k^1/(\lambda_k^1+\lambda_k^2)\right\|, \qquad \Pi(dx) = \Lambda F_0(0)dF_0^1(x),$$

$$F_0(0) = I - \overline{F}_0(0), \qquad F_0^1(x) = \left\|\delta_{kr}\mathrm{P}\{-\xi_n^k < x\}\right\|, \quad x<0.$$

Розглянемо процес $\eta_{B,u}(t)$, який визначається стохастичними співвідношеннями

$$\eta_{B,u}^{kr}(t) = \begin{cases} u + \xi_{kr}(t), & t < T_1, \\ B, & t \in (T_1, T_2),\ T_1 < \infty, \\ \eta^{jr}_{B,B-\xi_1^j}(t - T_2), & t > T_2,\ x(T_2) = j,\ T_1 < \infty, \end{cases} \tag{29}$$

де верхні індекси kr означають, що $x(t) = r$, $x(0) = k$; $T_1 \doteq \tau^+(v)$, $v = B - u$ та $T_2 \doteq T_1 + \zeta_*$, ζ_* — момент першого від'ємного стрибка, що не залежить від T_1.

Процес $\eta_{B,u}(t)$ називається процесом ризику в марковському середовищі зі стохастичною функцією премій та обмеженим резервом (див. [9 – 11]). Розглянемо також дивідендний процес $Y_{B,u}(t) \doteq u + \xi(t) - \eta_{B,u}(t)$ (див. [9, с. 169]).

Теорема 4. *Розподіл* $\eta_{B,u}(\theta_s)$ *визначається х. ф.*

$$\Phi_{B,u}(s,\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\eta_{B,u}(\theta_s)} =$$

$$= e^{i\alpha B}\Big((C - i\alpha I)p_+^*(s)e^{-i\alpha v} - (I - p_+^*(s))e^{-R_+^*(s)v}R_+^*(s)\Big)(R_+^*(s) - i\alpha I)^{-1}\Phi^-(s,\alpha) +$$

$$+ (I - p_+^*(s))e^{-R_+^*(s)v}(sI + \Lambda F_0(0) - Q)^{-1}\Big(s e^{i\alpha B} + \Lambda F_0(0)\tilde{\Phi}_B(s,\alpha)\Big), \qquad (30)$$

$$\tilde{\Phi}_B(s,\alpha) = \int_{-\infty}^{0} dF_0^1(z)\Phi_{B,B+z}(s,\alpha) = e^{i\alpha B}(\Lambda F_0(0))^{-1}(sI + \Lambda F_0(0) - Q)(p_+^*(s))^{-1} \times$$

$$\times (sI + \Lambda - Q)^{-1}\int_{-\infty}^{0}\Pi(dz)\Big((I - p_+^*(s))e^{R_+^*(s)z}s(sI + \Lambda F_0(0) - Q)^{-1} +$$

$$+ \Big(e^{i\alpha z}(C - i\alpha I) - (I - p_+^*(s))e^{R_+^*(s)z}C\Big)p_+^*(s)(R_+^*(s) - i\alpha I)^{-1}\Phi^-(s,\alpha)\Big). \qquad (31)$$

Якщо $m_1^0 = \sum_{k=1}^{m}\pi_k(\lambda_k^1/c_k - \lambda_k^2 m_k) > 0$, *то для* $\eta_{B,u} = \lim_{s\to 0}\eta_{B,u}(\theta_s)$

$$\Phi_{B,u}(\alpha) = \mathrm{E}e^{i\alpha\eta_{B,u}} = e^{i\alpha B}(I - p_+^*(0))e^{-R_+^*(0)v}p_+^*((\Lambda - Q)^{-1}\int_{-\infty}^{0}\Pi(dz) \times$$

$$\times \Big(-e^{i\alpha z}\Psi^{-1}(\alpha) + (I - p_+^*(0))e^{R_+^*(0)z}\Big((\Lambda F_0(0) - Q)^{-1} + C(C - i\alpha I)^{-1}\Psi^{-1}(\alpha)\Big)\Big), \qquad (32)$$

$$\mathrm{P}\{\eta_{B,u} = B\} = (I - p_+^*(0))e^{-R_+^*(0)v}p_+^*(\Lambda - Q)^{-1} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{0}\Pi(dz)(I - p_+^*(0))e^{R_+^*(0)z}(\Lambda F_0(0) - Q)^{-1}. \qquad (33)$$

Для дивідендного процесу $Y_{B,u}(\theta_s)$ *маємо*

$$\mathrm{E}e^{-\mu Y_{B,u}(\theta_s)} = \Big(I - (I - p_+^*(s))e^{-R_+^*(s)v}\mu(\mu I + R_+^*(s))^{-1}\Big)P_s, \qquad (34)$$

$$\mathrm{P}\{Y_{B,u}(\theta_s) = 0\} = \mathrm{P}\{\xi^+(\theta_s) < v\} = P_s - (I - p_+^*(s))e^{-R_+^*(s)v}P_s. \qquad (35)$$

Доведення. З (29) випливає, що х. ф. $\eta_{B,u}(t)$ задовольняє інтегральне співвідношення, яке після перетворення Лапласа – Карсона набирає вигляду

$$\Phi_{B,u}(s,\alpha) = e^{i\alpha u}\mathrm{E}\Big[e^{i\alpha\xi(\theta_s)},\ \xi^+(\theta_s) < v\Big] +$$

$$+ e^{i\alpha B}\mathrm{E}\Big[e^{-sT_1},\ T_1 < v\Big](I - \mathrm{E}e^{-s\zeta_*})P_s + \mathrm{E}\Big[e^{-sT_1},\ T_1 < \infty\Big]\mathrm{E}e^{-s\zeta_*}\tilde{\Phi}_B(s,\alpha). \qquad (36)$$

Згідно з [3, с. 50; 6, с. 43] маємо

$$\mathrm{E}\left[e^{-sT_1},\ T_1 < \infty\right] = (I - p_+^*(s))e^{-R_+^*(s)v},$$

$$\mathrm{E}e^{-s\zeta_*} = (sI + \Lambda F_0(0) - Q)^{-1}\Lambda F_0(0), \tag{37}$$

$$\mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi(\theta_s)},\ \xi^+(\theta_s) < v\right] = \mathrm{E}\left[e^{i\alpha\xi^+(\theta_s)},\ \xi^+(\theta_s) < v\right]P_s^{-1}\Phi^-(s,\alpha) =$$

$$= \left((C - i\alpha I)p_+^*(s) - (I - p_+^*(s))e^{(i\alpha I - R_+^*(s))v}R_+^*(s)\right)(R_+^*(s) - i\alpha I)^{-1}\Phi^-(s,\alpha).$$

Підставляючи попередні формули в (36), отримуємо (30) та

$$\tilde{\Phi}_B(s,\alpha) = e^{i\alpha B}\left(I - \int_{-\infty}^{0} dF_0^1(z)(I - p_+^*(s))e^{R_+^*(s)z} \times \right.$$

$$\left. \times (sI + \Lambda F_0(0) - Q)^{-1}\Lambda F_0(0)\right)^{-1}\left(\left(\int_{-\infty}^{0} e^{i\alpha z} dF_0^1(z)(C - i\alpha I) - \right.\right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{0} dF_0^1(z)(I - p_+^*(s))e^{R_+^*(s)z}C\right)p_+^*(s)(R_+^*(s) - i\alpha I)^{-1}\Phi^-(s,\alpha) -$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{0} dF_0^1(z)(I - p_+^*(s))e^{R_+^*(s)z}s(sI + \Lambda F_0(0) - Q)^{-1}\right). \tag{38}$$

Зі стохастичних співвідношень для $\tau^+(x)$ (див. [3, с. 62]) випливає рівняння для $p_+^*(s)$:

$$(sI + \Lambda - Q)(I - p_+^*(s)) = \Lambda\overline{F}_0(0) + \Lambda F_0(0)\int_{-\infty}^{0} dF_0^1(z)(I - p_+^*(s))e^{Cp_+^*(s)z}. \tag{39}$$

Підставляючи (39) в (38), одержуємо (31). Зауважимо, що для $m_1^0 > 0$ ξ^+ має вироджений розподіл, тому перший доданок формули (36) прямує до 0 при $s \to 0$. Оскільки $(I - \mathrm{E}e^{-s\zeta_*}) = s(sI + \Lambda F_0(0) - Q)^{-1}P_s^{-1}$, то другий доданок в (36) також прямує до 0. Щодо третього зазначимо, що згідно з теоремою 3 [6] та першою формулою в (2) маємо

$$\lim_{s\to 0} s\,(p_+^*(s))^{-1} = p_+^*,$$

$$\lim_{s\to 0} s^{-1}p_+^*(s)(R_+^*(s) - i\alpha I)^{-1}\Phi^-(s,\alpha) = \lim_{s\to 0}(C - i\alpha I)^{-1}(sI - \Psi(\alpha))^{-1} =$$

$$= -(C - i\alpha I)^{-1}\Psi^{-1}(\alpha).$$

Таким чином, з (36) після переходу до границі при $s \to 0$ випливає (32). Співвідношення (34), (35) випливають із зображення $Y_{B,u}^{kr}(t) \doteq \max\left(0,\ \xi_{kr}^+(t) - v\right)$.

1. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка, 1990. – 264 с.
2. *Печерский Е. А.* Некоторые тождества, связанные с выходом случайного блуждания из от-

резка и полуинтервала // Теория вероятностей и ее применения. – 1974. – **19**, № 1. – С. 104 – 119.

3. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів с незалежними приростами на скінченних ланцюгах Маркова та для напівмарковських процесів. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 320 с.
4. *Королюк В. С., Шуренков В. М.* Метод резольвенты в граничных задачах для случайных блужданий на цепях Маркова // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 4. – С. 464 – 471.
5. *Братійчук М. С.* Властивості операторів, зв'язаних з марковськими адитивними процесами. I, II // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1996. – № 55. – С. 20 – 29; 1997. – № 57. – С. 1 – 9.
6. *Gusak D. V., Karnaukh E. V.* Matrix factorization identity for almost semi-continuous processes on a Markov chain // Theory Stochast. Process. – 2005. – **11(27)**, № 1-2. – P. 41 – 47.
7. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разностей аргументов // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, № 5. – С. 3 – 120.
8. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разностей аргументов // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, № 2. – С. 3 – 72.
9. *Bühlmann H.* Mathematical methods in risk theory. – Berlin: Springer, 1970. – 330 p.
10. *Гусак Д. В.* Про модифікації процесів ризику // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1997. – № 56. – С. 87 – 95.
11. *Карташов Н. В.* Про ймовірність розорення для процесу ризику з обмеженими резервами // Там же. – 1999. – № 60. – С. 46 – 58.

Одержано 01.02.2006