УДК 513.88

Д. Ю. Якименко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО НЕРОЗКЛАДНІ ТА ТРАНЗИТИВНІ СИСТЕМИ ПІДПРОСТОРІВ

We prove that the indecomposability of a system of subspaces of finite-dimensional Hilbert space implies the transitivity of this system under the condition of the linear coherence of corresponding system of orthogonal projectors.

Доказано, что из неразложимости системы подпространств конечномерного гильбертового пространства следует транзитивность этой системы при условии линейной связности соответствующей системы ортопроекторов.

1. Вступ. Системи підпросторів лінійного чи гільбертового простору завжди викликали інтерес як самі по собі, так і в зв'язку з їх застосуваннями [1 – 5].

Опис транзитивних та нерозкладних систем важливий тому, що такі системи є найпростішими, з яких можна намагатися будувати будь-які системи підпросторів. У цій статті доводиться, що транзитивність та нерозкладність системи підпросторів скінченновимірного гільбертового простору еквівалентні за умови лінійної зв'язності відповідної системи ортопроекторів.

2. Означення та основні властивості. Нехай H — скінченновимірний гільбертів простір, $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — підпростори H, $S = (H_1; H_1, H_2, \ldots, H_n)$ — система підпросторів у H, $\overline{S} = (\overline{H}; \overline{H_1}, \overline{H_2}, \ldots, \overline{H_n})$ — система підпросторів у $\overline{H}$. Лінійне відображення $R\colon H \to \overline{H}$ будемо називати гомоморфізмом системи S в $\overline{S}$, якщо $R(H_i) \subset \overline{H_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Позначимо через $\mathrm{Hom}(S, \overline{S})$ множину гомоморфізмів з S в $\overline{S}$, $\mathrm{End}(S) :=$ $:= \mathrm{Hom}(S, S)$, тобто

$$\mathrm{End}(S) = \left\{ R \in B(H) \mid R(H_i) \subset \overline{H_i},\ i = \overline{1, n} \right\}.$$

Система S називається транзитивною, якщо $\mathrm{Idem}(S) = CI_H$.

Далі, позначимо

$$\mathrm{Idem}(S) = \left\{ R \in B(H) \mid R(H_i) \subset H_i,\ i = \overline{1, n},\ R^2 = R \right\}.$$

Система S називається нерозкладною, якщо $\mathrm{Idem}(S) = \{0, I_H\}$. Безпосередньо з означень випливає, що транзитивна система є обов'язково нерозкладною.

Зауважимо, що властивості транзитивності та нерозкладності системи S, очевидно, не залежать від структури скалярного добутку в H, тобто ці поняття можна розглядати і як властивості систем підпросторів лінійного простору.

Має місце наступне твердження (див., наприклад, [5]):

$$S \text{ нерозкладна} \iff \exists U, W \in H\colon U \cap W = 0,\ U + W = H$$

та

$$H_i = U \cap H_i + W \cap H_i.$$

Якщо ми маємо підпростори $U_1, U_2, \ldots, U_n \in H$, то через $U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} \ldots \dot{+} U_n$ будемо позначати $U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ у випадку, коли $U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1} +$ $+ U_{i+1} + \ldots + U_n) = 0$, $i = \overline{1, n}$. Іншими словами, $U_1 \dot{+} U_2 \dot{+} \ldots \dot{+} U_n$ — пряма сума у H, якщо H розуміти як лінійний простір.

З кожною системою S можна зв'язати систему ортопроекторів $p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_n$, де p_i — оператор ортогонального проектування на H_i, $i = \overline{1, n}$.

Систему ортопроекторів $p_1, p_2, \ldots, p_n$ будемо називати лінійно зв'язною, якщо існують $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, такі, що $\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i = I$, де I — тотожний оператор.

3. Основна теорема.

Теорема. *Нехай H — гільбертів простір,* $\dim H < \infty$, $S = (H; E_1, E_2, \ldots \ldots, E_n)$ *— система підпросторів у H, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — ортопроектори, що відповідають $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Нехай виконується $\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i = I$ для деяких $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, n}$. Тоді якщо S нерозкладна, то S є транзитивною.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто S є нерозкладною та не транзитивною. Тоді існує $x \in B(H)$, $x \neq \lambda I$, таке, що $x(E_i) \subset E_i$, $i = \overline{1, n}$.

Лема 1. *Оператор x має лише одне власне число.*

Доведення. Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — різні власні числа оператора x. Тоді $H = H(\lambda_1) \dot{+} H(\lambda_2) \dot{+} \ldots \dot{+} H(\lambda_k)$, де $H(\lambda_i) = \{v \in H \mid \exists l \in N \ (x - \lambda_i)^l v = 0\}$. Припустимо, що ми маємо деякий підпростір $E \subset H$ такий, що $x(E) \subset E$. Розглянемо x як оператор з E в E. Власні числа x як оператора з $B(E)$ належать множині всіх власних чисел x. Аналогічно можемо розкласти $E = E(\lambda_1) \dot{+} E(\lambda_2) \dot{+} \ldots \dot{+} E(\lambda_k)$, $E(\lambda_i) = 0$, якщо λ_i не є власним числом $x \in B(E)$, $E(\lambda_i) = \{v \in E \mid \exists l \in N \ (x - \lambda_i)^l v = 0\}$ в іншому випадку. Зрозуміло, що $E(\lambda_i) \subset H(\lambda_i)$.

Таким чином, будь-який E_i, $i = \overline{1, n}$, можна розкласти в суму $E_i = E_i(\lambda_1) \dot{+} \dot{+} E_i(\lambda_2) \dot{+} \ldots \dot{+} E_i(\lambda_k)$, де $E_i(\lambda_j) \subset H(\lambda_j)$. Отже, якщо x має більше одного власного числа, то маємо розкладність S, що і доводить лему 1.

Нехай λ — єдине власне число x. Тоді $x - \lambda$ є нільпотентним та $x - \lambda \in \mathrm{End}(S)$. Нехай $k \in N$ — найменше таке, що $(x - \lambda)^k = 0$. Позначимо $y = (x - \lambda)^{k-1} \in B(H)$. Очевидно, що $y \in \mathrm{End}(S)$, $y^2 = 0$. Але y не дорівнює 0, оскільки x, за припущенням, не кратний одиничному ($x \neq \lambda I$, $x \neq 0$).

Таким чином, ми отримали такий наслідок.

Наслідок. *Якщо S є нерозкладною та не транзитивною, то існує $y \in \mathrm{End}(S)$, $y^2 = 0$, таке, що $y \neq 0$.*

Введемо наступні позначення: $H_0 = \mathrm{Ker}\, y$, $H_1 = H_0^{\perp}$, $H_{01} = y(H_1)$. Зрозуміло, що $H_{01} = \mathrm{Im}\, y$. $H_{01} \subset H_0$, оскільки $y^2 = 0$; $H_{00} = (H_1 \oplus H_{01})^{\perp}$. Отже, маємо розклад $H = H_1 \oplus H_0 = H_1 \oplus (H_{01} \oplus H_{00})$. При цьому зрозуміло також, що $\dim H_1 = \dim H_{01}$.

Нехай маємо деякий підпростір $E' \subset H$ такий, що $y(E') \subset E'$. Аналогічно можемо розкласти $E' = E_1' \oplus E_0' = E_1' \oplus (E_{01}' \oplus E_{00}')$, де $E_0' = E' \cap H_0$, $E_1' = E' \cap (E_0')^{\perp}$, $E_{01}' = y(E_1')$, $E_{00}' = E' \cap (E_1' \oplus E_{01}')^{\perp}$. Неважко переконатися, що $E_0' \subset H_0$, $E_{01}' \subset H_{01}$, $E_0' \subset E_{01}' \oplus E_{00}'$, $\dim E_1' = \dim E_{01}'$. Зауважимо, що, взагалі кажучи, $E_1' \not\subset H_1$.

Розкладемо кожний E_i, $i = \overline{1, n}$, з системи S описаним вище способом:

$$E_i = E_{i,1} \oplus E_{i,0} = E_{i,1} \oplus (E_{i,01} \oplus E_{i,00}).$$

Якщо ми доведемо, що $E_{i,1} \subset H_1$, $i = \overline{1, n}$, то отримаємо розкладність S (бо тоді $E_i = E_{i,1} \oplus E_{i,0} = E_i \cap H_1 \oplus E_i \cap H_0$, $i = \overline{1, n}$), а отже, прийдемо до шуканої суперечності.

Лема 2. $\sum_{i=1}^n \alpha_i \dim E_{i,1} \geq \dim H_1$, *причому рівність можлива лише за умови $E_{i,1} \subset H_1$, $i = \overline{1, n}$.*

Доведення. Позначимо через $\mathrm{pr}[E']$, де E' — підпростір H, оператор ортогонального проектування на E', $S_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,\mathrm{pr}[E_{i,1}]$, $S_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,\mathrm{pr}[E_{i,0}]$. За умовою теореми $S_0 + S_1 = I$. Нехай $m = \dim H$, $l = \dim H_1$, $\{v_1, \ldots, v_l\}$ — ортонормований базис H_1, $\{w_1, \ldots, w_{m-l}\}$ — ортонормований базис H_0. Розглянемо матриці операторів S_0 та S_1 у базисі $\{v_1, \ldots, v_l, w_1, \ldots, w_{m-l}\}$. По-перше, оскільки $\alpha > 0$, то S_0 та S_1 — невід'ємні оператори, а отже, на діагоналях матриць розташовані невід'ємні числа. Оскільки $E_{i,0} \subset H_0$, то $S_0(H_1) = 0$. Отже,

$$S_0 = \begin{pmatrix} d_1 & * & \ldots & * & & & & \\ * & d_2 & \ldots & * & & * & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ * & * & \ldots & d_l & & & & \\ & & & & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & * & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

де $a_i \geq 0$, $i = \overline{1, m-l}$. Але $S_0 + S_1 = I$, тому

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & & * & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & & & & \\ & & & & b_1 & * & \ldots & * \\ & & & & * & b_2 & \ldots & * \\ & & * & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & * & * & \ldots & b_{m-l} \end{pmatrix},$$

де $b_i \geq 0$, $a_i + b_i = 1$, $i = \overline{1, m-l}$.

Тоді $\mathrm{tr}(S_1) = l + b_1 + b_2 + \ldots + b_{m-l} \geq l$, тобто $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,\mathrm{tr}(\mathrm{pr}[E_{i,1}]) \geq \dim H_1$ чи $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \dim E_{i,1} \geq \dim H_1$. Рівність буде лише за умови $b_1 = b_2 = \ldots = b_{m-l} = 0$. Звідси $(S_1(w_i), w_i) = 0$, $i = \overline{1, m-l}$, а отже, $\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \,\mathrm{pr}[E_{j,1}](w_i), w_i\right) = 0$, $i = \overline{1, m-l}$. Тому $\mathrm{pr}[E_{j,1}](w_i) = 0$, $i = \overline{1, m-l}$, $j = \overline{1, n}$, звідки $H_0 \subset (E_{j,1})^{\perp}$, $j = \overline{1, n}$, тобто $E_{j,1} \subset H_1$, $j = \overline{1, n}$.

Лема 3. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \dim E_{i,01} \leq \dim H_{01}$.

Доведення. Позначимо $S_{01} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,\mathrm{pr}[E_{i,01}]$, $S_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,\mathrm{pr}[E_{i,1} \oplus E_{i,00}]$, $S_{01} + S_2 = I$. Нехай $\{v_1', \ldots, v_l'\}$ — ортонормований базис H_{01}, $\{, w_1', \ldots, w_{m-l}'\}$ — ортонормований базис $(H_{01})^{\perp}$. Розглянемо матриці операторів S_{01} та S_2 у базисі $\{v_1', \ldots, v_l', w_1', \ldots, w_{m-l}'\}$. Знову S_{01} та S_2 є невід'ємними, отже, на діагоналях матриць розташовані невід'ємні числа. Оскільки $E_{i,01} \subset H_{01}$, то $S_{01}((H_{01})^{\perp}) = 0$. Звідси

$$S_{01} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} c_1 & * & \ldots & * & & & & \\ * & c_2 & \ldots & * & & * & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ * & * & \ldots & c_l & & & & \\ & & & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & * & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right),$$

де $c_i \geq 0$, $i = \overline{1, l}$. Але $S_{01} + S_2 = I$, отже,

$$S_2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} d_1 & * & \ldots & * & & & & \\ * & d_2 & \ldots & * & & * & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ * & * & \ldots & d_l & & & & \\ & & & & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & * & & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right),$$

де $d_i \geq 0$, $c_i + d_i = 1$, $i = \overline{1, l}$.

Маємо $\operatorname{tr}(S_{01}) = c_1 + c_2 + \ldots + c_l = l - \sum_{i=1}^{l} d_i \leq l$, звідки $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{tr}(\operatorname{pr}[E_{i,01}]) \leq$ $\leq \dim H_{01}$, тобто $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \dim E_{i,01} \leq \dim H_{01}$. Оскільки $\dim H_1 = \dim H_{01}$ та $\dim E_{i,1} = \dim E_{i,01}$, $i = \overline{1, n}$, то з лем 2 та 3 отримуємо, що має бути рівність $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \dim E_{i,1} = \dim H_1$, а отже, з леми 2 випливає, що $E_{i,1} \subset H_1$, $i = \overline{1, n}$.

Теорему доведено.

Оскільки транзитивність та нерозкладність системи підпросторів не залежать від структури скалярного добутку в H, то основний результат роботи можна переформулювати таким чином:

нерозкладність системи підпросторів скінченновимірного лінійного простору V еквівалентна транзитивності, якщо у V можна ввести такий скалярний добуток, що відповідна система ортопроекторів виявиться лінійно зв'язною.

Зауваження. Після подання статті до друку вийшла робота С. А. Кругляка, Л. О. Назарової та $\boxed{\text{А. В. Ройтера}}$ „Ортоскалярные представления колчанов в категории гильбертовых пространств" („Записки научных семинаров ПОМИ", 2006, том 338, с. 180 – 201), в якій для незвідних ортоскалярних зображень колчанів доведено їх шуровість в категорії лінійних просторів.

Автор висловлює глибоку подяку Ю. С. Самойленку за постановку задачі та цінні зауваження і поради.

1. *Gelfand I. M., Ponomarev V. A.* Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in finite-dimensional vector space // Coll. Math. Spc. Bolyai. – 1970. – **5**. – P. 163 – 237.
2. *Brenner S.* Endomorphism algebras of vector spaces with distinguished sets of subspaces // J. Algebra. – 1967. – **6**. – P. 100 – 114.
3. *Nazarova L. A.* Representations of a quadruple // Izv. AN SSSR. – 1967. – **31**, № 6. – P. 1361 – 1377.
4. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и прил. – 2002. – **36**, вып. 3. – С. 30 – 35.
5. *Enomoto M., Watatani Ya.* Relative position of four subspaces in a Hilbert space // ArXive:(2004).

Одержано 20.02.2006