УДК 517.5

Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова (Харьков. нац. ун-т)

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА КОМПАКТНОМ ИНТЕРВАЛЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ЗАДАЧЕЙ НЕВАНЛИННЫ – ПИКА В КЛАССЕ $S[a, b]$

We consider the Nevanlinna – Pick interpolation problem with infinitely many interpolation nodes in the class $S[a, b]$ and associate with it rational matrix functions orthogonal on the interval $[a, b]$. A criterion for the complete indetermination of the infinite Nevanlinna – Pick problem in terms of the orthogonal rational matrix functions is obtained.

Розглянуто інтерполяційну задачу Неванлінни – Піка з нескінченною кількістю вузлів інтерполяції у класі $S[a, b]$, з якою пов'язано ортогональні на інтервалі $[a, b]$ раціональні матриці-функції. Отримано критерій повної невизначеності нескінченної задачі Неванлінни – Піка у термінах ортогональних раціональних матриць-функцій.

Класс аналитических функций $S[a, b]$ был введен М. Г. Крейном в связи с изучением проблемы моментов на компактном интервале [1, с. 527]. Усеченная задача Неванлинны – Пика в матричном классе $S[a, b]$ была рассмотрена в работах [2, 3].

В настоящей статье рассматривается задача Неванлинны – Пика в классе $S[a, b]$ с бесконечным числом комплексных узлов интерполяции, с которой связываются два семейства $\{P_{r,(n)}\}$ рациональных матриц-функций (см. (15)). Основными результатами статьи являются теоремы 3 и 4. Теорема 3 устанавливает ортонормированность семейства $\{P_{1,(n)}\}$ относительно матричного веса $(b-t)d\sigma(t)$ и $\{P_{2,(n)}\}$ относительно матричного веса $(t-a)d\sigma(t)$ (см. (16)). Теорема 4 дает критерий полной неопределенности задачи Неванлинны – Пика в терминах сходимости рядов из $\{P_{r,(n)}\}$ (см. (18)).

Задача Неванлинны – Пика в классе $S[a, b]$. Пусть заданы вещественные числа $a < b$ и натуральное число m. Обозначим $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{C}_\pm = \mathbb{C}_- \cup \mathbb{C}_+$. Символом $\mathbb{C}^{m\times m}$ обозначим множество комплексных квадратных матриц порядка m, символом $\mathbb{C}_{\mathcal{H}}$ — множество эрмитовых матриц, символами $\mathbb{C}_{\geq}^{m\times m}$ и $\mathbb{C}_{>}^{m\times m}$ — множества соответственно неотрицательных и положительных матриц. Для неотрицательных (положительных) матриц будем также использовать обозначения $A \geq 0$ $(A > 0)$. Символами $I_m \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и $0_m \in \mathbb{C}^{m\times m}$ будем обозначать единичную и нулевую матрицы. Через $S[a, b]$ обозначим множество голоморфных матриц-функций $s : \mathbb{C}\backslash[a, b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$ таких, что

$$\frac{s(z) - s^*(z)}{z - \bar{z}} \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}_\pm, \quad s(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash[a, b].$$

В [1, с. 528] доказано, что матрица-функция принадлежит $S[a, b]$ тогда и только тогда, когда она допускает интегральное представление вида

$$s(z) = (b - z)\int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t - z}. \tag{1}$$

Здесь $\sigma : [a, b] \to \mathbb{C}_{\mathcal{H}}^{m\times m}$ — неубывающая матрица-функция ограниченной вариации.

Пусть заданы бесконечная последовательность попарно различных комплексных чисел $\mathcal{Z}_\infty = \{z_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}_+$ и бесконечная последовательность матриц $\{s_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}^{m\times m}$. В задаче Неванлинны – Пика требуется описать все матрицы-функции $s \in S[a,b]$ такие, что

$$s(z_j) = s_j \qquad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Множество всех решений задачи (2) обозначим $\mathcal{F}_\infty$.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Наряду с задачей (2) будем рассматривать усеченную задачу Неванлинны – Пика, в которой требуется описать все $s \in S[a,b]$ такие, что

$$s(z_j) = s_j, \qquad 1 \le j \le n. \tag{3}$$

Множество всех решений задачи (3) обозначим $\mathcal{F}_n$. Ясно, что $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{F}_n$. Введем обозначения

$$\mathcal{Z}_n = \{z_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}_+, \qquad \overline{\mathcal{Z}}_n = \{\bar z_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}_-, \qquad \overline{\mathcal{Z}}_\infty = \{\bar z_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}_-.$$

С n-й усеченной задачей (3) свяжем следующие объекты:

$$s_1(z) = s(z), \qquad s_2(z) = \frac{z-a}{b-z}\, s(z), \tag{4}$$

$$T_{(n)} = \begin{bmatrix} z_1 I_m & 0_m & \dots & 0_m \\ 0_m & z_2 I_m & \dots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & \dots & z_m I_m \end{bmatrix}, \qquad \tilde s_j = \frac{z_j - a}{b - z_j}\, s_j, \qquad v_{(n)} = \begin{bmatrix} I_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix},$$

$$R_{T,(n)}(z) = (T_{(n)} - zI_{mn})^{-1} = \begin{bmatrix} (z_1 - z)^{-1} I_m & \dots & 0_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & \dots & (z_n - z)^{-1} I_m \end{bmatrix},$$

$$K_{1,(n)} = \left\{ \frac{s_i - s_j^*}{z_i - \bar z_j} \right\}_{i,j=1}^n, \qquad K_{2,(n)} = \left\{ \frac{\tilde s_i - \tilde s_j^*}{z_i - \bar z_j} \right\}_{i,j=1}^n,$$

$$u_{1,(n)} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}, \qquad u_{2,(n)} = \begin{bmatrix} \tilde s_1 \\ \vdots \\ \tilde s_n \end{bmatrix}.$$

Определение 1. *Усеченная задача Неванлинны – Пика* (3) *называется вполне неопределенной, если*

$$K_{1,(n)} > 0, \qquad K_{2,(n)} > 0.$$

Определение 2. *Матрица-функция*

$$U_{(n)}(z) = \left[\begin{array}{c|c} I_m - (z-b)v_{(n)}^* R_{T,(n)}^*(b) K_{2,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) u_{2,(n)} & (z-a)v_{(n)}^* R_{T,(n)}^*(b) K_{2,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) v_{(n)} \\ \hline (z-b)u_{1,(n)}^* R_{T,(n)}^*(b) K_{1,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) u_{1,(n)} & I_m + (z-b)u_{1,(n)}^* R_{T,(n)}^*(b) K_{1,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) v_{(n)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_{(n)}(z) & \beta_{(n)}(z) \\ \hline \gamma_{(n)}(z) & \delta_{(n)}(z) \end{array}\right] \qquad (5)$$

называется резольвентной матрицей задачи (3).

Рассмотрим блочные матрицы

$$J = \begin{bmatrix} 0_m & -iI_m \\ iI_m & 0_m \end{bmatrix}, \qquad J_\pi = \begin{bmatrix} 0_m & I_m \\ I_m & 0_m \end{bmatrix}.$$

В [3] рассмотрены решения Крейна и Фридрихса интерполяционной задачи (3)

$$s_{K,(n)}(z) = \beta_{(n)}^{-1}(z)\alpha_{(n)}(z) \in \mathcal{F}_n, \qquad s_{F,(n)}(z) = \delta_{(n)}^{-1}(z)\gamma_{(n)}(z) \in \mathcal{F}_n \qquad (6)$$

и получены неравенства

$$0_m < s_{F,(n)}(x) \le s_{(n)}(x) \le s_{K,(n)}(x) \qquad \forall s_{(n)} \in \mathcal{F}_n \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus[a,b]. \qquad (7)$$

Определение 3. *Матричный интервал*

$$I_{(n)}(x) = \{A \in \mathbb{C}^{m\times m} : s_{F,(n)}(x) \le A \le s_{K,(n)}(x)\}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus[a,b],$$

называется интервалом Вейля в точке x, *ассоциированным с усеченной задачей Неванлинны – Пика* (3).

Очевидно, что множество решений $(n+1)$-й усеченной задачи содержится во множестве решений n-й усеченной задачи $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда и из неравенства (7) для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$0_m < s_{F,(n)}(x) \le s_{F,(n+1)}(x) \le s_{K,(n+1)}(x) \le s_{K,(n)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}\setminus[a,b].$$

В терминах интервалов Вейля эти неравенства можно записать в виде $I_{n+1}(x) \subset \subset I_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{F}_\infty$ *обозначает множество решений задачи* (2), $\mathcal{F}_n$ — *множество решений* n*-й усеченной задачи, а* $s_{F,(n)}$ *и* $s_{K,(n)}$ — *решения Фридрихса и Крейна соответственно. Тогда*:

1) *существуют равномерные на компактах* $K \subset \mathbb{C}\setminus[a,b]$ *пределы*

$$s_{K,(\infty)}(z) := \lim_{n\to\infty} s_{K,(n)}(z) \in \mathcal{F}_\infty, \qquad s_{F,(\infty)}(z) := \lim_{n\to\infty} s_{F,(n)}(z) \in \mathcal{F}_\infty\,; \qquad (8)$$

2) *для всех* $s \in \mathcal{F}_\infty$ *выполняются неравенства*

$$0_m < s_{F,(\infty)}(x) \le s(x) \le s_{K,(\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}\setminus[a,b]. \qquad (9)$$

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство аналогичных результатов в [4, 5].

Можно доказать (см. [3]), что $s_{F,(\infty)}$ и $s_{K,(\infty)}$ являются решениями всех усеченных задач (3). Таким образом, множество решений интерполяционной задачи Неванлинны – Пика (2) не пусто.

Определение 4. *Матричный интервал*

$$I_\infty(x) := [s_{F,(\infty)}(x), s_{K,(\infty)}(x)]$$

называется интервалом Вейля (2) *в точке* $x \in \mathbb{R}\setminus[a,b]$.

Из теоремы С. А. Орлова (см. [6]) следует, что для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\setminus[a,b]$ имеет место равенство

$$\operatorname{rank}\{s_{K,(\infty)}(x_1) - s_{F,(\infty)}(x_1)\} = \operatorname{rank}\{s_{K,(\infty)}(x_2) - s_{F,(\infty)}(x_2)\}. \tag{10}$$

Другими словами, ранги предельных интервалов Вейля $I_\infty(x)$ не зависят от выбора точки $x \in \mathbb{R}\setminus[a,b]$.

Определение 5. *Интервал Вейля в точке* $x \in \mathbb{R}\setminus[a,b]$ *называется невырожденным, если* $s_{F,(\infty)}(x) < s_{K,(\infty)}(x)$, *т. е.*

$$\operatorname{rank}(s_{K,(\infty)}(x) - s_{F,(\infty)}(x)) = m.$$

Определение 6. *Интерполяционная задача* (2) *называется вполне неопределенной, если для всех* $x \in \mathbb{R}\setminus[a,b]$ *предельные интервалы Вейля* $I_\infty(x)$ *являются невырожденными матричными интервалами.*

Ортогональные семейства рациональных матриц-функций. Пусть дана вполне неопределенная n-я усеченная задача (3). Тогда

$$K_{r,(n)} = \begin{bmatrix} K_{r,(n-1)} & B_{r,(n)} \\ B^*_{r,(n)} & \dfrac{s_{r,n} - s^*_{r,n}}{z_n - \bar z_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{(n-1)m} & 0_{(n-1)m\times m} \\ B^*_{r,(n)}K^{-1}_{r,(n-1)} & I_m \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} K_{r,(n-1)} & 0_{(n-1)m\times m} \\ 0_{m\times(n-1)m} & \hat K_{r,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{(n-1)m} & K^{-1}_{r,(n-1)}B_{r,(n)} \\ 0_{m\times(n-1)m} & I_m \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где $\hat K_{r,n} = \dfrac{s_{r,n} - s^*_{r,n}}{z_n - \bar z_n} - B^*_{r,(n)}K^{-1}_{r,(n-1)}B_{r,(n)}$, $r = 1, 2$.

Отсюда следует, что для вполне неопределенной n-й усеченной задачи (3) $\hat K_{r,n} > 0$, $r = 1, 2$. Из (11) имеем

$$K^{-1}_{r,(n)} = \begin{bmatrix} K^{-1}_{r,(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K^{-1}_{r,(n-1)}B_{r,(n)} \\ I_m \end{bmatrix} \hat K^{-1}_{r,n} \left[-B^*_{r,(n)}K^{-1}_{r,(n-1)} \quad I_m \right]. \tag{12}$$

Теорема 2. *Для того чтобы интерполяционная задача* (2) *была вполне неопределенной, необходимо, чтобы существовали строго положительные пределы для всех* $x \in \mathbb{R}\setminus[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} [v^*_{(n)}R^*_{T_{(n)}}(x)K^{-1}_{r,(n)}R_{T_{(n)}}(x)v_{(n)}] > 0_m, \qquad r = 1, 2, \tag{13}$$

и достаточно, чтобы хотя бы для одного $x_0 \in \mathbb{R}\setminus[a,b]$ *существовали строго положительные пределы* (13).

Доказательство. Из определения 6 и формулы (10) следует, что для вполне неопределенности интерполяционной задачи (2) необходимо, чтобы при всех $x \in \mathbb{R}\setminus[a,b]$ предельные интервалы Вейля были невырождены, и достаточно, чтобы хотя бы для одного $x_0 \in \mathbb{R}\setminus[a, b]$ был невырожденным соответствующий предельный интервал Вейля. Таким образом, зафиксируем точку $x_0 \in \in \mathbb{R}\setminus[a, b]$ и докажем утверждение теоремы для точки x_0.

Очевидно, что $\operatorname{rank} R_{T_{(n)}}(x_0)\upsilon_{(n)} = m$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, для вполне неопределенной задачи

$$\upsilon_{(n)}^* R_{T_{(n)}}^*(x_0) K_{r,(n)}^{-1} R_{T_{(n)}}(x_0)\upsilon_{(n)} \in \mathbb{C}_>^{m\times m}, \qquad r = 1, 2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Из (12) имеем

$$\upsilon_{(n+1)}^* R_{T_{(n+1)}}^*(x_0) K_{r,(n+1)}^{-1} R_{T_{(n+1)}}(x_0)\upsilon_{(n+1)} \geq \upsilon_{(n)}^* R_{T_{(n)}}^*(x_0) K_{r,(n)}^{-1} R_{T_{(n)}}(x_0)\upsilon_{(n)}.$$

В [3] доказано, что

$$\{s_{K,(n)}(x_0) - s_{F,(n)}(x_0)\}^{-1} = \frac{(x_0-a)^2}{b-a}\, \upsilon_{(n)}^* R_{T_{(n)}}^*(x_0) K_{2,(n)}^{-1} R_{T_{(n)}}(x_0)\upsilon_{(n)} +$$

$$+ \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{b-a}\, \upsilon_{(n)}^* R_{T_{(n)}}^*(x_0) K_{1,(n)}^{-1} R_{T_{(n)}}(x_0)\upsilon_{(n)}. \tag{14}$$

Слагаемые в правой части последнего равенства являются строго положительными матрицами и монотонно возрастают с ростом n (см. (12)). Левая часть, в силу неопределенности интерполяционной задачи Неванлинны – Пика (2), при $n \to \infty$ стремится к положительно определенной матрице $\{s_{K,(\infty)}(x_0) - - s_{F,(\infty)}(x_0)\}^{-1}$. Отсюда следует существование и строгая положительность пределов в (13).

Наоборот, пусть существуют и строго положительны оба предела в (13). Выполним предельный переход при $n \to \infty$ в обеих частях равенства (14). Получим $\{s_{K,(\infty)}(x_0) - s_{F,(\infty)}(x_0)\}^{-1} > 0$. Таким образом, предельный интервал Вейля $I_\infty(x_0)$ является невырожденным и, следовательно, интерполяционная задача (2) является вполне неопределенной.

Теорема доказана.

Рассмотрим два семейства рациональных матриц-функций, ассоциированных с вполне неопределенными усеченными задачами Неванлинны – Пика (3)

$$\begin{gathered} P_{r,(1)}(z) = K_{r,(1)}^{-1/2} R_{T,(1)}(z), \\ P_{r,(n)}(z) = \hat{K}_{r,(n)}^{-1/2}\left[-B_{r,(n)}^* K_{r,(n-1)}^{-1} \quad I\right] R_{T,(n)}(z)\upsilon_{(n)}, \qquad n > 1, \qquad r = 1, 2. \end{gathered} \tag{15}$$

Теорема 3. *Пусть* $k, p \geq 1$, *матрица-функция* $s \in \mathcal{F}_{\max(k,p)}$ *и* σ *содержится в интегральном представлении* (1) *матрицы-функции* s. *Тогда имеют место соотношения обобщенной ортогональности*

$$\int_a^b P_{r,(k)}(t)(b-t)\left\{\frac{t-a}{b-t}\right\}^{r-1} d\sigma(t) P_{r,(p)}^*(t) = \begin{cases} I_{m\times m}, & k = p, \\ 0_{m\times m}, & k \neq p, \end{cases} \qquad r = 1, 2. \tag{16}$$

Доказательство. Из интегрального представления (1) следует равенство

$$K_{r,(k)} = \int_a^b R_{T,(k)}(t)\upsilon_{(k)}(b-t)\left\{\frac{t-a}{b-t}\right\}^{r-1} d\sigma(t)\upsilon_{(k)}^* R_{T,(k)}^*(t), \qquad r = 1, 2. \tag{17}$$

Пусть $k = p > 1$. Тогда

$$\int_a^b P_{r,(k)}(t)(b-t)\left\{\frac{t-a}{b-t}\right\}^{r-1} d\sigma(t)P^*_{r,(p)}(t) = \hat{K}^{-1/2}_{r,(k)}\left[-B^*_{r,(k)}K^{-1}_{r,(k-1)} \quad I\right]\times$$

$$\times\int_a^b\left\{R_{T,(k)}(t)\upsilon_{(k)}(b-t)\left\{\frac{t-a}{b-t}\right\}^{r-1} d\sigma(t)\upsilon^*_{(k)}R^*_{T,(k)}(t)\right\}\begin{bmatrix}-K^{-1}_{r,(k-1)}B_{r,(k)}\\ I\end{bmatrix}\times$$

$$\times\hat{K}^{-1/2}_{r,k} = \hat{K}^{-1/2}_{r,k}\left[-B^*_{r,(k)}K^{-1}_{r,(k-1)} \quad I\right]K_{r,(k)}\begin{bmatrix}-K^{-1}_{r,(k-1)}B_{r,(k)}\\ I\end{bmatrix}\hat{K}^{-1/2}_{r,k} =$$

$$= \hat{K}^{-1/2}_{r,k}\hat{K}_{r,k}\hat{K}^{-1/2}_{r,k} = I_{m\times m}.$$

Здесь второе равенство следует из (17), а третье — из (11).

Пусть теперь $k > p > 1$. Имеем

$$\int_a^b P_{r,(k)}(t)(b-t)\left\{\frac{t-a}{b-t}\right\}^{r-1} d\sigma(t)P^*_{r,(p)}(t) = \hat{K}^{-1/2}_{r,k}\left[-B^*_{r,k}K^{-1}_{r,(k-1)} \quad I\right]\times$$

$$\times\int_a^b\left\{R_{T,(k)}(t)\upsilon_{(k)}(b-t)\left\{\frac{t-a}{b-t}\right\}^{r-1} d\sigma(t)\upsilon^*_{(k)}R^*_{T,(k)}(t)\right\}\begin{bmatrix}I_{pm\times pm}\\ 0_{(k-p)m\times pm}\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}-K^{-1}_{r,(p-1)}B_{r,(p)}\\ I\end{bmatrix}\hat{K}^{-1/2}_{r,p} = \hat{K}^{-1/2}_{r,k}\left[0_{(k-1)m\times m} \quad \hat{K}_{r,(k)}\right]\begin{bmatrix}I_{pm\times pm}\\ 0_{(k-p)m\times pm}\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}-K^{-1}_{r,(p-1)}B_{r,(p)}\\ I\end{bmatrix}\hat{K}^{-1/2}_{r,k} = 0_{m\times m}.$$

Формулы (16) доказаны при $p > 0$. Для $p = 0$ они очевидны.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Для того чтобы задача Неванлинны – Пика* (2) *была вполне неопределенной, необходимо, чтобы при всех* $x \in \mathbb{R}\setminus[a, b]$ *сходились ряды*

$$\sum_{j=1}^{\infty} P^*_{1,(j)}(x)P_{1,(j)}(x), \qquad \sum_{j=1}^{\infty} P^*_{2,(j)}(x)P_{2,(j)}(x), \tag{18}$$

и достаточно, чтобы ряды (18) *сходились хотя бы при одном* $x_0 \in \mathbb{R}\setminus[a, b]$.

Доказательство. Имеют место равенства

$$\upsilon^*_{(k)}R^*_{T,(k)}(x)K^{-1}_{r,(k)}R_{T,(k)}(x)\upsilon_{(k)} = \sum_{j=1}^{\infty} P^*_{r,(j)}(x)P_{r,(j)}(x), \qquad r = 1, 2.$$

Действительно,

$$\upsilon^*_{(k)}R^*_{T,(k)}(x)K^{-1}_{r,(k)}R_{T,(k)}(x)\upsilon_{(k)} =$$

$$= \upsilon^*_{(k)}R^*_{T,(k)}(x)\left\{\left[\begin{array}{c|c}K^{-1}_{r,(k-1)} & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right] + \begin{bmatrix}-K^{-1}_{r,(k-1)}B_{r,(k)}\\ I\end{bmatrix}\hat{K}_{r,k}\left[-B^*_{r,k}K^{-1}_{r,(k-1)} \quad I\right]\right\}\times$$

$$\times\ R_{T,(k)}(x)v_{(k)} \ = \ v^*_{(k-1)}R^*_{T,(k-1)}(x)K^{-1}_{r,(k-1)}R_{T,(k-1)}(x)v_{(k-1)} + P^*_{r,(k)}(x)P_{r,(k)}(x) \ = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{j=1}^{\infty} P^*_{r,(j)}(x)P_{r,(j)}(x).$$

Здесь мы воспользовались (12). Отсюда и из теоремы 2 следует утверждение теоремы.

1. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 552 с.
2. *Дюкарев Ю. М., Чоке Риверо А. Е.* Задача Неванлинны – Пика в классе $S[a, b]$ // Изв. вузов. Математика. – 2003. – С. 36 – 45.
3. *Dyukarev Yu. M., Serikova I. Yu.* Friedrichs and Krein solutions of the Nevanlinna – Pick interpolation problem in the class $S[a, b]$ // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2004. – **1**, № 3. – С. 55 – 66.
4. *Дюкарев Ю. М.* О критериях неопределенности матричной проблемы моментов Стилтьеса // Мат. заметки. – 2004. – **75**, № 1. – С. 71 – 88.
5. *Дюкарев Ю. М.* Задача Неванлинны – Пика для стильтьесовских матриц-функций // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 2. – С. 366 – 380.
6. *Орлов С. А.* Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиуса предельных матричных кругов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – **40**, № 3. – С. 593 – 644.

Получено 26.01.2006