УДК 517.5

А. А. Нудельман (Одес. нац. акад. пищ. технологий)

ПРОДОЛЖЕНИЕ ВЛЕВО СТИЛЬТЬЕСОВСКОЙ МОМЕНТНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РОДСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ*

For a nonhomogeneous string with the known mass distribution (the full mass is assumed to be infinite), the known finite length, and the unknown spectral measure $d\sigma(t)$, we construct an analogous string with spectral measure $d\sigma(t)/t$. This allows to calculate the moments of all negative orders of the measure $d\sigma(t)$. The mechanical interpretation of the Stieltjes investigations on the moment problem proposed by M. G. Krein enables one to solve the following problem: for given Stieltjes moment sequence with unique solution, calculate the moments of negative orders. This problem is equivalent to the following one: establish the asymptotic behavior of the associate Stieltjes function near zero if its asymptotic behavior near infinity is given.

Для неоднорідної струни з відомими розподілом мас (повна маса вважається нескінченною), скінченною довжиною та невідомою спектральною мірою $d\sigma(t)$ побудовано аналогічну струну зі спектральною мірою $d\sigma(t)/t$. Це дозволяє обчислити моменти всіх від'ємних порядків міри $d\sigma(t)$. Механічна інтерпретація досліджень Стільтьєса з проблеми моментів, запропонована М. Г. Крейном, дозволяє розв'язати наступну проблему: для стільтьєсівської моментної послідовності, яка має єдиний розв'язок, обчислити моменти від'ємних порядків. Ця проблема еквівалентна такій: знайти асимптотичну поведінку асоційовної функції Стільтьєса поблизу нуля, знаючи її асимптотичну поведінку поблизу нескінченності.

1. Как известно, классическая проблема моментов Стильтьеса состоит в следующем. Для заданной последовательности чисел $\{s_k\}_0^\infty$ необходимо:

1) найти условия, при которых существует неотрицательная мера $d\sigma$ (*решение проблемы*), для которой числа s_k являются степенными моментами k-го порядка:

$$s_k = \int\limits_0^\infty t^k d\sigma(t), \qquad k = 0, 1, \ldots; \tag{1}$$

2) если решение существует, выяснить, единственно ли оно (в этом случае проблема называется *определенной*);

3) если проблема неопределенная, найти все решения.

Ответы на первые два вопроса были даны еще Стильтьесом [1], описание всех решений неопределенной проблемы впервые приведено в работе М. Г. Крейна [2].

Проблема (1) разрешима тогда и только тогда, когда все формы

$$\sum_{i,j=0}^{n} s_{i+j} x_i x_j, \qquad \sum_{i,j=0}^{n} s_{i+j+1} x_i x_j \tag{2}$$

являются неотрицательно определенными при $n = 0, 1, \ldots$. Если при этом хотя бы одна из них вырождается, то решение единственно и имеет конечный носитель. Верно и обратное: если проблема (1) имеет решение с конечным носителем, то оно единственно, при этом все формы (2) неотрицательны и среди них имеются вырожденные. Таким образом, для того чтобы проблема (1) имела решение с бесконечным носителем, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все определители

* Частично поддержана фондом U. S. Civilian Research and Development Foundation и Министерством образования и науки Украины (грант UK2-2811-OD-06).

$$A_n = \det(s_{i+j})_0^{n-1}, \quad B_n = \det(s_{i+j+1})_0^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots \quad (A_0 = B_0 = 1). \tag{3}$$

Именно этот случай был изучен Стильтьесом, который установил, что проблема (1) является определенной тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \tag{4}$$

где

$$a_{2k} = A_k^2 / B_k B_{k-1}, \qquad a_{2k+1} = A_{k-1}^2 / B_k B_{k-1}. \tag{5}$$

В последнее время начали разрабатывать так называемую *сильную* проблему моментов Стильтьеса [3] (см. также [4], где имеется обширная библиография, и [5]), которая отличается от классической тем, что кроме моментов неотрицательных порядков s_k, $k = 0, 1, \ldots$, задаются моменты отрицательных порядков s_{-k}, $k = 1, 2, \ldots$.

При постановке рассмотренных в настоящей статье задач отправным пунктом послужил следующий вопрос. Пусть задана последовательность $\{s_k\}_0^\infty$, для которой разрешима классическая проблема моментов Стильтьеса (1). При каких условиях ее можно продолжить влево некоторой последовательностью $\{s_{-k}\}_1^\infty$ так, чтобы для бесконечной в обе стороны последовательности $\{s_k\}_{-\infty}^\infty$ была разрешима сильная проблема моментов Стильтьеса

$$s_k = \int_0^\infty t^k \, d\sigma(t), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{6}$$

Иными словами, при каких условиях среди решений $d\sigma$ классической проблемы (1) имеются такие, для которых сходятся интегралы

$$s_{-k} = \int_0^\infty t^{-k} \, d\sigma(t), \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Отметим, что этот вопрос содержателен только в случае, когда классическая проблема Стильтьеса (1) является определенной, ибо, как показал Стильтьес, у неопределенной проблемы имеются решения с дискретным носителем, не содержащим нуля; для таких решений интегралы (7) существуют. Для определенной проблемы имеет смысл задача о том, как выразить моменты s_{-k} отрицательных порядков единственного решения через заданные моменты s_k неотрицательных порядков.

Укажем другую форму постановки последней задачи. Обозначим через $\mathcal{S}$ класс функций, голоморфных в комплексной области, разрезанной по $[0, \infty)$, отображающих открытую верхнюю полуплоскость в замкнутую верхнюю полуплоскость и неотрицательных на $(-\infty, 0)$. Известно (см., например, [6, с. 522]), что $F \in \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда

$$F(z) = \gamma + \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t - z}, \tag{8}$$

где $\gamma (= F(-\infty)) \geq 0$, $d\sigma(t) \geq 0$. Известно также, что $\mathcal{S}$-функция (8) при $z \to \infty$ в секторе $0 < \delta \leq |\arg z| \leq \pi$ асимптотически представляется рядом

$$-\sum_{k=0}^{\infty} s_k z^{-(k+1)} \tag{9}$$

тогда и только тогда, когда $\gamma = 0$ и выполняется (1). Кроме того [5], при $\gamma = 0$ $\mathcal{S}$-функция (8) асимптотически представляется рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_{-(k+1)} z^k \tag{10}$$

при $z \to 0$ в том же секторе тогда и только тогда, когда выполняется (7).

Теперь задачу можно сформулировать следующим образом. Зная асимптотическое разложение (9) заданной $\mathcal{S}$-функции вблизи ∞, найти ее асимптотическое разложение (10) вблизи 0.

Как показал М. Г. Крейн [2] (см. также [7]), теорию классической проблемы моментов Стильтьеса можно рассматривать как составную часть спектральной теории неоднородной струны (необходимые сведения см. ниже); в частности, множество решений проблемы (1) совпадает с множеством спектральных мер струны специального вида (*стильтьесовской струны*), условие определенности проблемы Стильтьеса совпадает с условием сингулярности соответствующей стильтьесовской струны.

В настоящей статье получены выражения для моментов отрицательных порядков спектральной меры произвольной неоднородной сингулярной струны в терминах ее длины и функции распределения масс. Эти общие формулы позволяют решить задачу о продолжении влево стильтьесовской моментной последовательности с помощью известных формул для длины и функции распределения масс стильтьесовской струны.

Критерии существования моментов отрицательных порядков спектральной меры сингулярной струны были получены И. С. Кацем [8]. Здесь будет получена другая форма критерия.

2. Приведем необходимые сведения из спектральной теории неоднородной струны. Подробное изложение можно найти в [7].

Обозначим через $S[L, M]$ струну, натянутую единичной силой между точками $x = 0$ и $x = L\,(\le \infty)$ с функцией распределения масс $M(x)$ $(M(0) = 0)$, причем

$$0 < M(x) = M(x+0) < M(L), \quad 0 < x < L, \qquad M(L-0) = M(L). \tag{11}$$

Удобно считать, что $M(x) = 0$ при $x < 0$. Допускаются интервалы, свободные от масс, равно как и сосредоточенные массы. Амплитудные функции такой струны являются решениями интегрального уравнения

$$y(x, \lambda) = \alpha + \beta z - \lambda \int_{-0}^{x} (x-\xi)\, y(\xi, \lambda)\, dM(\xi). \tag{12}$$

Если на функциях вида

$$u(x) = \alpha + \beta x + \int_{-0}^{x} (x-\xi)\, g(\xi)\, dM(\xi),$$

где g — комплекснозначная M-суммируемая на $[0, L]$ функция, определить оператор дифференцирования по x формулой

$$\frac{du}{dx} = \beta + \int_{-0}^{x} g(\xi)\, dM(x),$$

а на функциях вида

$$v(x) = \beta + \int_{-0}^{x} g(\xi)\, dM(\xi)$$

определить оператор дифференцирования по $M(x)$ формулой

$$\frac{dv}{dM(x)} = g(x),$$

то уравнение (12) будет равносильно задаче

$$\frac{d^2y}{dM(x)\,dx} + \lambda y = 0, \qquad y(0,\lambda) = \alpha, \qquad \frac{dy}{dx}(-0,\lambda) = \beta. \tag{13}$$

В частном случае, когда $M(x)$ абсолютно непрерывна, $dM(x) = p(x)dx$, уравнение (13) превращается в обычное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda p(x) y = 0.$$

Обозначим через $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ решения задачи (13), соответствующие значениям $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Мера $d\sigma$ называется *спектральной мерой струны* $S[L, M]$, если отображение $U: f \to F$, где

$$F(\lambda) = \int_{-0}^{l} f(x)\varphi(x,\lambda)\,dM(x),$$

отображает пространство $\mathcal{L}^2([0,l], dM)$ в пространство $\mathcal{L}^2([0,\infty], d\sigma)$ изометрически, т. е. если

$$\int_0^\infty |F(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda) = \int_{-0}^{l} |f(x)|^2\, dM(x).$$

Спектральная мера единственна тогда и только тогда, когда струна сингулярна, т. е.

$$L + M(L) = \infty. \tag{14}$$

Одну из спектральных мер (*главную спектральную меру*) можно получить следующим образом. Функция

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{x\uparrow L}\frac{\psi(x,\lambda)}{\varphi(x,\lambda)}, \tag{15}$$

называемая коэффициентом динамической податливости струны, является $\mathcal{S}$-функцией, так что

$$\Gamma(\lambda) = \gamma + \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}, \qquad d\sigma(t) \ge 0. \tag{16}$$

Здесь мера $d\sigma$ — главная спектральная мера струны (ее можно найти с помощью формулы обращения Стильтьеса), $\gamma\ (= \Gamma(+\infty))$ — длина участка струны, примыкающего к 0, свободного от масс: $M(x) = 0$ при $0 \le x < \gamma$. В силу (11) в рассматриваемом случае $\gamma = 0$. Для сингулярной струны также

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{x\uparrow L}\frac{\dfrac{d\psi(x,\lambda)}{dx}}{\dfrac{d\varphi(x,\lambda)}{dx}}. \tag{17}$$

В дальнейшем предполагается, что струна $S[L, M]$ сингулярна.

Наша цель состоит в том, чтобы выразить через L и dM моменты отрицательных порядков меры $d\sigma$.

3. Выражение для s_{-1} известно, оно получается достаточно просто: так как

$$\varphi(x,\lambda) = 1 - \lambda\int_0^x (x-\xi)\varphi(\xi,\lambda)\,dM(\xi), \qquad \psi(x,\lambda) = x - \lambda\int_0^x (x-\xi)\varphi(\xi,\lambda)\,dM(\xi),$$

то $\varphi(x,0) = 1$, $\psi(x,0) = x$, так что, полагая $\lambda = 0$ в (15) и (16), получаем

$$s_{-1} = L. \tag{18}$$

Таким образом, s_{-1} существует тогда и только тогда, когда $L < \infty$ (и, следовательно, $M(L) = \infty$).

Для нахождения s_{-k} при $k > 1$ будет использован следующий прием. По сингулярной струне $S[L, M]$ $\big(L < \infty,\ M(L) = \infty\big)$ строится новая сингулярная струна $S[L_1, M_1]$ $\big(M_1(L_1) = \infty\big)$, у которой спектральная мера $d\sigma_1$ связана с $d\sigma$ формулой $d\sigma_1(t) = t^{-1}d\sigma(t)$. Применяя (18) к новой струне, имеем

$$L_1 = \int_0^\infty t^{-1}d\sigma_1(t) = \int_0^\infty t^{-2}d\sigma(t) = s_{-2},$$

так что s_{-2} существует тогда и только тогда, когда новая струна имеет конечную длину. Повторно применяя этот прием, находим условия существования и формулы для s_{-k}.

При построении струны $S[L_1, M_1]$ по струне $S[L, M]$ будет использован подход, намеченный без доказательства М. Г. Крейном [9] в других преобразованиях спектральных мер. Координата x_1 и масса $M_1(x_1)$ интервала $[0, x_1]$ для новой струны вводятся как некоторые неубывающие функции параметра x $(0 \le x \le L)$: $x_1 = p(x)$, $M_1(x_1) = q(x)$, не имеющие общих точек разрыва. Следует пояснить, что если (ξ, η) — интервал, в котором функция p сохраняет постоянное значение, $p(x) = c$ при $\xi < x < \eta$, то в точке $x_1 = c$ сосредоточена масса $q(\eta - 0) - q(\xi + 0)$; если ζ — точка разрыва функции p, $p(\zeta - 0) = a$, $p(\zeta + 0) = b$, то интервал $a < x_1 < b$ свободен от масс. Аналогично, интервалу постоянства функции q соответствует интервал, свободный от масс, а ее скачку — сосредоточенная масса.

Пусть $S[L, M]$ $\big(L < \infty,\ M(L) = \infty\big)$ — заданная сингулярная струна со спектральной мерой $d\sigma$. Положим

$$x_1 = \int_{-0}^{x} (L-\xi)^2 dM(\xi), \quad M_1(x_1) = (L-x)^{-1}, \quad 0 < x < L, \quad M_1(0) = 0. \tag{19}$$

Когда x пробегает отрезок $[0, L]$, x_1 пробегает отрезок $[0, L_1]$, где

$$L_1 = \int_{-0}^{L} (L-\xi)^2 dM(\xi),$$

при этом $M_1(L_1) = \infty$. Струна $S[L_1, M_1]$ имеет в точке 0 сосредоточенную массу $M_1(+0) = L^{-1}$. Если струна $S[L, M]$ имеет в точке 0 сосредоточенную массу m_0, то $x_1(+0) = L^2 m_0$ и, следовательно, у струны $S[L_1, M_1]$ интервал $0 < x_1 < L^2 m_0$ свободен от масс.

Теорема 1. *Если функция* $y(x, \lambda)$ *является решением задачи* (13), *то функция*

$$Y(x_1, \lambda) \;=\; \alpha + \beta L - \lambda \int\limits_{-0}^{x} (L-\xi)\, y(\xi, \lambda)\, dM(\xi) \tag{20}$$

является решением задачи

$$\frac{d^2 Y}{dM_1(x_1)\, dx_1} + \lambda Y \;=\; 0, \qquad Y(0,\lambda) \;=\; \alpha + \beta L, \qquad \frac{dY}{dx_1}(-0,\lambda) \;=\; \beta\lambda.$$

Доказательство. Следует убедиться в том, что

$$Y(x_1, \lambda) \;=\; \alpha + \beta L + \beta\lambda x_1 - \lambda \int\limits_{-0}^{x_1} (x_1 - t_1)\, Y(t_1, \lambda)\, dM_1(t_1). \tag{21}$$

Прежде всего заметим, что

$$x_1 - t_1 \;=\; \int\limits_{-0}^{x} (L-\xi)^2 dM(\xi) - \int\limits_{-0}^{t} (L-\xi)^2 dM(\xi) \;=\; \int\limits_{t+0}^{x} (L-\xi)^2 dM(\xi).$$

Положим $\mu(t) = (L-t)^{-1}$ при $0 < t < L$, $\mu(t) = 0$ при $t \le 0$ и $\nu(t) = \int_{-0}^{t} (L-\tau)\, y(\tau,\lambda)\, dM(\tau)$. Обозначим правую часть (21) через $Z(x_1, \lambda)$ и с учетом (19) запишем ее в виде

$$Z(x_1, \lambda) \;=\; \alpha + \beta L + \beta\lambda \int\limits_{-0}^{x} (L-\xi)^2 dM(\xi) \;-$$

$$-\; \lambda \int\limits_{-0}^{x} \left(\int\limits_{t+0}^{x} (L-\xi)^2 dM(\xi) \right) (\alpha + \beta L - \lambda\nu(t))\, d\mu(t) \;=\; \alpha + \beta L + \beta\lambda \int\limits_{-0}^{x} (L-\xi)^2 dM(\xi) \;-$$

$$-\; \lambda(\alpha + \beta L) \int\limits_{0}^{x} \left(\int\limits_{t+0}^{x} (L-\xi)^2 dM(\xi) \right) d\mu(t) \;+\; \lambda^2 \int\limits_{0}^{x} \left(\int\limits_{t+0}^{x} (L-\xi)^2 dM(\xi) \right) \nu(t)\, d\mu(t).$$

Докажем, что $Z(x_1, \lambda) = Y(x_1, \lambda)$.

Изменив порядок интегрирования в последних двух слагаемых, получим

$$Z(x_1, \lambda) \;=\; \alpha + \beta L + \beta\lambda \int\limits_{-0}^{x} (L-\xi)^2 dM(\xi) \;-$$

$$-\; \lambda(\alpha + \beta L) \int\limits_{-0}^{x} \left(\int\limits_{0}^{\xi} d\mu(t) \right) (L-\xi)^2 dM(\xi) \;+\; \lambda^2 \int\limits_{-0}^{x} \left(\int\limits_{-0}^{\xi} \nu(t)\, d\mu(t) \right) (L-\xi)^2 dM(\xi).$$

Поскольку

$$\int\limits_{0}^{\xi} d\mu(t) \;=\; (L-\xi)^{-1} \quad \text{и} \quad d\nu(t) \;=\; (L-t)\, y(t,\lambda)\, dM(t),$$

то

$$\int\limits_{-0}^{\xi} \nu(t)\, d\mu(t) \;=\; \nu(t)(L-\xi)^{-1} - \int\limits_{-0}^{\xi} (L-t)^{-1} d\nu(t) \;=$$

$$= (L-\xi)^{-1}\int_{-0}^{\xi}(L-t)\,y(t,\lambda)\,dM(t) - \int_{-0}^{\xi} y(t,\lambda)\,dM(t) =$$

$$= (L-\xi)^{-1}\int_{-0}^{\xi}(\xi-t)\,y(t,\lambda)\,dM(t).$$

Учитывая (12), имеем

$$\int_{-0}^{\xi}\nu(t)\,d\mu(t) = \lambda^{-1}(L-\xi)^{-1}(\alpha+\beta\xi-y(\xi,t)).$$

Поэтому

$$Z(x_1,\lambda) = \alpha + \beta L + \beta\lambda\int_{-0}^{x}(L-\xi)^2\,dM(\xi) -$$

$$- \lambda(\alpha+\beta\lambda)\int_{-0}^{x}(L-\xi)\,dM(\xi) + \lambda\int_{-0}^{x}(L-\xi)(\alpha+\beta\xi-y(\xi,\lambda))\,dM(\xi) =$$

$$= \alpha + \beta L - \lambda\int_{-0}^{x}(L-\xi)\,y(\xi,\lambda)\,dM(\xi) = Y(x_1,\lambda),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Теорема 2. *Для функции* $Y(x_1,\lambda)$, *определенной в теореме* 1, *справедлива формула*

$$\frac{dY}{dx_1} = -\lambda\frac{y(x,\lambda)}{L-x}.$$

Доказательство. По определению

$$\frac{dY}{dx_1} = \beta\lambda - \lambda\int_{-0}^{x_1} Y(t_1,\lambda)\,dM_1(t_1),$$

так что

$$\frac{dY}{dx_1} = \beta\lambda - \lambda\int_{-0}^{x}\left(\alpha+\beta L-\lambda\int_{-0}^{t}(L-\xi)\,y(\xi,\lambda)\,dM(\xi)\right)d\mu(t) =$$

$$= \beta\lambda - \lambda\frac{\alpha+\beta L}{L-x} + \lambda^2\int_{-0}^{x}\left(\int_{\xi}^{x}d\mu(t)\right)(L-\xi)\,y(\xi,\lambda)\,d\mu(\xi) =$$

$$= -\lambda\frac{\alpha+\beta x}{L-x} + \frac{\lambda^2}{L-x}\int_{-0}^{x}(x-\xi)\,y(\xi,\lambda)\,d\mu(\xi) = -\lambda\frac{y(x,\lambda)}{L-x}.$$

Теорема 3. *Спектральные меры* $d\sigma$ *и* $d\sigma_1$ *соответственно струн* $S[L,M]$ *и* $S[L_1,M_1]$ *связаны соотношением*

$$d\sigma_1(t) = t^{-1}d\sigma(t).$$

Доказательство. Обозначим через $Y_1(x_1,\lambda)$ и $Y_2(x_1,\lambda)$ решения задачи (13), соответствующие значениям $\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0,\ \beta_2 = 1,$ так что

$$Y_1(x_1,\lambda) \;=\; 1-\lambda\int\limits_{-0}^{x}(L-\xi)\varphi(\xi,\lambda)\,dM(\xi),$$

$$Y_2(x_1,\lambda) \;=\; L-\lambda\int\limits_{-0}^{x}(L-\xi)\psi(\xi,\lambda)\,dM(\xi).$$

Согласно теореме 1

$$Y_1(0,\lambda) \;=\; 1, \qquad \frac{dY_1}{dx_1}(-0,\lambda) \;=\; 0,$$

$$Y_2(0,\lambda) \;=\; L, \qquad \frac{dY_2}{dx_1}(-0,\lambda) \;=\; \lambda,$$

поэтому для струны $S[L_1, M_1]$

$$\varphi_1(x_1,\lambda) \;=\; Y_1(x_1,\lambda), \qquad \psi_1(x_1,\lambda) \;=\; -\,L\lambda^{-1}Y_1(x_1,\lambda)\,+\,\lambda^{-1}Y_2(x_1,\lambda). \tag{22}$$

Поскольку струна $S[L_1, M_1]$ сингулярна $(M_1(L_1)=\infty)$, ее коэффициент динамической податливости $\Gamma_1(\lambda)$ можно вычислить по формуле

$$\Gamma_1(\lambda) \;=\; \lim_{x_1\uparrow L_1}\frac{\dfrac{d\psi_1(x_1,\lambda)}{dx_1}}{\dfrac{d\varphi_1(x_1,\lambda)}{dx_1}}.$$

Используя (22) и теорему 2, находим

$$\frac{\dfrac{d\psi_1(x_1,\lambda)}{dx_1}}{\dfrac{d\varphi_1(x_1,\lambda)}{dx_1}} \;=\; \lambda^{-1}\left(-L+\frac{\psi(x,\lambda)}{\varphi(x,\lambda)}\right),$$

откуда, устремляя x к L, получаем

$$\Gamma_1(\lambda) \;=\; \lambda^{-1}(-L+\Gamma(\lambda))$$

или

$$\int\limits_0^\infty\frac{d\sigma_1(t)}{t-\lambda} \;=\; \lambda^{-1}\left(-\int\limits_0^\infty\frac{d\sigma(t)}{t}+\int\limits_0^\infty\frac{d\sigma(t)}{t-\lambda}\right),$$

т. е.

$$\int\limits_0^\infty\frac{d\sigma_1(t)}{t-\lambda} \;=\; \int\limits_0^\infty\frac{t^{-1}d\sigma(t)}{t-\lambda}.$$

Следовательно, $d\sigma_1(t) \;=\; t^{-1}d\sigma(t)$.

Теорема доказана.

4. Как было отмечено в конце п. 2, из теоремы 3 следует, что $s_{-2} \;=\; L_1$, поэтому в соответствии с (19)

$$s_{-2} \;=\; \int\limits_{-0}^{L}(L-x)^2\,dM(x), \tag{23}$$

и s_{-2} существует тогда и только тогда, когда сходится интеграл в правой части (23) (момент инерции струны $S[L, M]$ относительно ее правого конца). Если положить $s_{-1}(x) = L - x$ $(s_{-1}(0) = L = s_{-1})$, то

$$s_{-2} = \int_{-0}^{L} s_{-1}^2(x)\,dM(x).$$

Отправляясь от построенной струны $S[L_{n-1}, M_{n-1}]$, $n = 1, 2, \ldots$, $L_0 = L$, $M_0 = M$, построим струну $S[L_n, M_n]$, положив

$$x_n = \int_{-0}^{x_{n-1}} (L_{n-1} - t_{n-1})^2\, dM_{n-1}(t_{n-1}),$$

$$M_n(x_n) = (L_{n-1} - x_{n-1})^{-1} \quad (0 < x_{n-1} < L_{n-1}), \qquad M_n(0) = 0.$$

Положим $s_{-k}(x) = L_{k-1} - x_{k-1}$, так что $s_{-k} = s_{-k}(-0)$. Тогда

$$dx_n = s_{-n}^2(x)\,dM_{n-1}(x), \qquad dM_n = \frac{dx_{n-1}}{s_n(x-0)\,s_n(x+0)}. \tag{24}$$

Условимся вместо $s_n(x-0)s_n(x+0)$ писать $\tilde{s}_n^2(x)$. Последовательно применяя (24), получаем

$$dx_n = s_{-n}^2(x)\,dM_{n-1}(x_{n-1}) = s_{-n}^2(x)\frac{dx_{n-2}}{\tilde{s}_{-(n-1)}^2(x)} =$$

$$= \left(\frac{s_{-n}(x)}{\tilde{s}_{-(n-1)}(x)}\right)^2 \tilde{s}_{-(n-2)}^2(x)\, dM_{n-3}(x_{n-3}) = \ldots .$$

Окончательный вид формулы, выражающей dx_n через x, зависит от четности n. Интегрируя dx_n по ξ от x до L, имеем

$$s_{-(2k+1)}(x) = \int_x^L \left(\frac{s_{-2}(\xi)s_{-4}(\xi)\ldots s_{-2k}(\xi)}{\tilde{s}_{-1}(\xi)\tilde{s}_{-3}(\xi)\ldots \tilde{s}_{-(2k-1)}(\xi)}\right)^2 d\xi,$$

$$s_{-(2k+2)}(x) = \int_x^L \left(\frac{s_{-1}(\xi)s_{-3}(\xi)\ldots s_{-(2k+1)}(\xi)}{\tilde{s}_{-2}(\xi)\tilde{s}_{-4}(\xi)\ldots \tilde{s}_{-2k}(\xi)}\right)^2 dM(\xi).$$

При $x = 0$ эти формулы дают значения моментов s_{-n}. Заметим, что функции $s_{-n}(x)$ при нечетном n непрерывны в интервале $0 \le x \le L$, тогда как при четном n они могут иметь скачки.

5. Возвратимся к проблеме моментов Стильтьеса (1). Как было отмечено, множество ее решений совпадает с множеством спектральных мер струны специального вида. Уточним, что речь идет о струне, которая состоит из невесомой нити, натянутой единичной силой между точками $x = 0$ и $x = L$, на которую в точках $x_k = \sum_{j=0}^{k} a_{2j}$, $k = 0, 1, \ldots$, $x_0 = 0$, насажены массы $m_k = a_{2k+1}$ (таким образом, $l_k := a_{2k}$ — расстояние между массами m_k и m_{k+1}). Связь между заданными моментами s_k и числами a_n задается формулами (3), (5). Такую струну будем называть *стильтьесовской струной,* а числа a_n — ее стильтьесовскими параметрами. Для того чтобы струна была стильтьесовской, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна ее спектральная мера (а тогда и все ее спектральные меры) имела конечные моменты всех неотрицательных порядков. Длина стильтьесовской струны

$$L = \sum_{j=1}^{\infty} l_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j},$$

а ее полная масса

$$M(L) = \sum_{j=0}^{\infty} m_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1}.$$

Заметим, что свои исследования по проблеме моментов Стильтьес начал с рассмотрения цепной дроби

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}},$$

так что параметры a_n у него появились до моментов s_k.

Для стильтьесовской струны условие сингулярности $L + M(L) = \infty$ совпадает с условием $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ сходимости цепной дроби и, следовательно, с условием определенности соответствующей проблемы моментов Стильтьеса.

Для проблемы моментов Стильтьеса имеем

$$s_{-1} = L = \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}.$$

Чтобы получить выражение для s_{-2}, заметим, что струна $S[L_1, M_1]$ также является стильтьесовской струной с параметрами

$$m_1' = L^{-1}, \qquad m_k' = l_k \left(L - \sum_{j=1}^{k-1} l_j \right)^{-1} \left(L - \sum_{j=1}^{k} l_j \right),$$

$$l_1' = m_1 L^2, \qquad l_k' = \left(L - \sum_{j=1}^{k-1} l_j \right)^2 m_k,$$

так что

$$s_{-2} = \sum_{k=1}^{\infty} l_k'.$$

Выражения для последующих моментов s_{-n} получаются посредством итераций.

6. Особенно простой вид имеют формулы, выражающие s_{-n} через $\{s_k\}_0^{\infty}$ в случае, когда носитель меры $d\sigma$ ограничен. Его самую правую точку b можно найти по формуле

$$b = \lim_{n \to \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n}. \tag{25}$$

Получить эту формулу можно следующим образом. Функция $F(z) = \int_0^b \frac{d\sigma(t)}{t - z}$ аналитична вне отрезка $[0, b]$ вещественной оси, причем, будучи точкой роста функции $\sigma(t)$, точка b является особой точкой функции $F(z)$. Заменив z на

$1/z$, получим, что $1/b$ — особая точка функции $\int_0^b \frac{d\sigma(t)}{1-tz}$. В круге $|z| < 1/b$ эта функция разлагается в степенной ряд $\sum_0^\infty s_k z^k$ с радиусом сходимости $1/b$, откуда и следует (25). Предел в правой части существует, так как $\begin{vmatrix} s_n & s_{n+1} \\ s_{n+1} & s_{n+2} \end{vmatrix} > 0$, т. е. последовательность $\{s_{n+1}/s_n\}$ — возрастающая.

Положим

$$c_k = b^{-k} s_k, \quad \Delta^0 c_k = c_k, \quad \Delta^n c_k = \Delta^{n-1} c_k - \Delta^{n-1} c_{k+1},$$
$$n = 1, 2, \ldots, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Легко видеть, что

$$c_k = \int_0^1 t^k d\tau(t), \quad d\tau(t) = d\sigma(bt), \quad \Delta^n c_k = \int_0^1 t^k (1-t)^n d\tau(t) \geq 0.$$

В [10] было показано, что

$$c_{-m} := \int_0^1 t^{-m} d\tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} \Delta^n c_0 \tag{26}$$

и c_{-m} существует тогда и только тогда, когда ряд в правой части сходится. При этом $s_{-m} = b^m c_{-m}$. Из (26) легко сделать вывод, что в рассматриваемом случае моменты всех отрицательных порядков существуют тогда и только тогда, когда для любого натурального m

$$\Delta^n c_0 = o(n^{-m}), \quad n \to \infty.$$

1. *Стильтьес Т.* Исследования о непрерывных дробях. – Харьков; Киев: ГОНТИ Украины, 1938. – 120 с.
2. *Крейн М. Г.* Об одном обобщении исследований Стильтьеса // Докл. АН СССР. – 1952. – **42**, № 6. – С. 881 – 884.
3. *Jones W. B., Thron W. J., Waadeland H.* A strong Stieltjes moment problem // Trans. Amer. Math. Soc. – 1980. – **261**. – P. 503 – 528.
4. *Njåstad O.* Solutions of the strong Stieltjes moment problem // Meth. Appl. Anal. – 1995. – **2**, № 3. – P. 320 – 347.
5. *Кац И. С., Нудельман А. А.* Сильная проблема моментов Стильтьеса // Алгебра и анализ. – 1996. – **8**, вып. 6. – С. 26 – 56.
6. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 552 с.
7. *Кац И. С., Крейн М. Г.* О спектральных функциях струны: Доп. II к кн. „Дискретные и непрерывные граничные задачи" / Ф. Аткинсон. – М.: Мир, 1968. – С. 648 – 737.
8. *Кац И. С.* Степенные моменты отрицательных порядков главной спектральной функции струны // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 9. – С. 1209 – 1222.
9. *Крейн М. Г.* О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции // Докл. АН СССР. – 1953. – **43**, № 4. – С. 617 – 620.
10. *Нудельман А. А.* О применении вполне и абсолютно монотонных последовательностей к проблеме моментов // Успехи мат. наук. – 1953. – **8**, № 6. – С. 119 – 124.

Получено 15.01.2007