УДК 512.552.4

Н. Д. Попова, Ю. С. Самойленко, О. В. Стрілець
(Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО РІСТ ДЕФОРМАЦІЙ АЛГЕБР, ПОВ'ЯЗАНИХ З ГРАФАМИ КОКСТЕРА

We consider the class of algebras that are deformations of quotient algebras of group algebras of Coxeter groups. For algebras from this class, the linear basis is found using the "diamond lemma". The description of all finite-dimensional algebras is given and the growth of infinite-dimensional algebras is calculated.

Исследован класс алгебр, являющихся деформациями фактор-алгебр групповых алгебр групп Кокстера. Для исследуемого класса алгебр с помощью „леммы о композиции" найден линейный базис, приведено описание всех конечномерных алгебр в этом классе, а для бесконечномерных подсчитан их рост.

Вступ. Одним із важливих та плідних напрямків математичної творчості М. Г. Крейна було дослідження глибоких алгебраїчних фактів та розробка їх нескінченновимірних узагальнень.

У цій роботі ми досліджуємо певний клас алгебр, що є деформаціями фактор-алгебр групових алгебр груп Кокстера. Для досліджуваного класу алгебр за допомогою „леми про композицію" в термінах „нормальних слів" знайдено лінійний базис. Як наслідок, отримано необхідні та достатні умови для того, щоб така алгебра була скінченновимірною. Для скінченновимірних алгебр знайдено їх розмірності, а для нескінченномірних підраховано їх ріст.

Останні 30 років, великою мірою в зв'язку з застосуваннями в математичній фізиці, велику увагу приділяють дослідженню алгебр, що є деформаціями групових алгебр, та теорії їх зображень. Зокрема, частину цих досліджень присвячено деформаціям груп, породжених відбиттями, та відповідних групових алгебр, або їх фактор-алгебр.

Наприклад, роботи [1 – 10] присвячено дослідженню груп кіс B_n, алгебр Гекке $H_n(q)$ та алгебр Темперлі – Ліба $TL_{n,\tau}$. Групи кіс можна розглядати як групи, породжені n твірними g_i, $i = 1, \ldots, n$, та співвідношеннями

$$g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \qquad g_i g_j = g_j g_i, \quad |i - j| > 1.$$

Легко бачити, що якщо до цих співвідношень додати співвідношення $g_i^2 = e$, $i = 1, \ldots, n$ (тобто вимагати, щоб g_i були відбиттями), то отримаємо групу перестановок S_n. Алгебра Гекке $H_n(q)$, $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$, є фактор-алгеброю групової алгебри $\mathbb{C}B_n$ по співвідношенню

$$(g_i - qe)\left(g_i + \frac{1}{q}e\right) = 0,$$

отже, вона є деформацією групової алгебри групи перестановок $\mathbb{C}S_n = H_n(1) = H_n(-1)$. При $q^2 \neq -1$ можна перейти до нових твірних

$$p_i = \frac{g_i - qe}{-q - 1/q},$$

співвідношення в яких будуть мати вигляд

$$p_i^2 = p_i, \tag{1}$$

$$p_i p_{i+1} p_i - \tau p_i = p_{i+1} p_i p_{i+1} - \tau p_{i+1}, \tag{2}$$

$$p_i p_j = p_j p_i, \quad |i - j| > 1, \tag{3}$$

де $\tau = \dfrac{q^2}{(q^2+1)^2}$.

Алгебра Темперлі – Ліба $TL_{n,\tau}$ є фактор-алгеброю алгебри $H_n(q)$ по співвідношеннях

$$p_i p_{i+1} p_i - \tau p_i = p_{i+1} p_i p_{i+1} - \tau p_{i+1} = 0. \tag{4}$$

Розглянемо групу Кокстера, що задана n відбиттями s_i та множиною натуральних чисел m_{ij} ($m_{ii} = 1$, $m_{ij} > 1$, якщо $i \neq j$), за допомогою яких задаються співвідношення

$$(s_i s_j)^{m_{ij}} = e. \tag{5}$$

Для $i \neq j$ введемо k_{ij} та σ_{ij} за допомогою формули $m_{ij} = 2k_{ij} + \sigma_{ij}$, де $k_{ij} \in \mathbb{N}$, $\sigma_{ij} \in \{0, 1\}$. Тоді співвідношення (5) можна переписати у вигляді

$$s_i^2 = e, \qquad (s_i s_j)^{k_{ij}} s_i^{\sigma_{ij}} = (s_j s_i)^{k_{ij}} s_j^{\sigma_{ij}}. \tag{6}$$

Якщо в груповій алгебрі групи Кокстера перейти до проекторів

$$p_i = \frac{s_i + e}{2},$$

то співвідношення (6) наберуть вигляду

$$p_i^2 = p_i,$$

$$\left(\left(p_i - \frac{1}{2}e\right)\left(p_j - \frac{1}{2}e\right)\right)^{k_{ij}} \left(p_i - \frac{1}{2}e\right)^{\sigma_{ij}} =$$

$$= \left(\left(p_j - \frac{1}{2}e\right)\left(p_i - \frac{1}{2}e\right)\right)^{k_{ij}} \left(p_j - \frac{1}{2}e\right)^{\sigma_{ij}}. \tag{7}$$

Твердження 1 показує, що співвідношення (7) після розкриття дужок та скорочень будуть мати вигляд $f_{ij}(p_i p_j) p_i^{\sigma_{ij}} = f_{ij}(p_j p_i) p_j^{\sigma_{ij}}$, де f_{ij} — певні поліноми степеня k_{ij}, причому якщо $m_{ij} = 2$, то $f_{ij}(x) = x$, отже, p_i та p_j комутують, а у випадку $m_{ij} = 3$ отримаємо співвідношення, аналогічні співвідношенням (2).

Множина чисел m_{ij}, $i \neq j$, фактично визначає граф Кокстера $\mathbb{G}$ (див. означення в пункті 1). Нехай g є відображенням множини ребер графа Кокстера в множину поліномів з $\mathbb{R}[x]$

$$g\colon \gamma_{ij} \mapsto g_{ij}, \quad \deg g_{ij} \leqslant k_{ij} - 1.$$

Тоді алгебри Темперлі – Ліба $TL_{\mathbb{G},g}$ можна означити за допомогою твірних та співвідношень

$$TL_{\mathbb{G},g} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, \ldots, p_n \,|\, p_i^2 - p_i = 0; \quad p_i p_j = p_j p_i, \quad \text{якщо} \quad m_{ij} = 2;$$

$$(p_i p_j)^{k_{ij}} p_i^{\sigma_{ij}} - g_{ij} (p_i p_j) p_i^{\sigma_{ij}} = 0,$$

$$\text{якщо} \quad m_{ij} > 2, \quad m_{ij} = 2k_{ij} + \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} \in \{0, 1\}\Big\rangle. \tag{8}$$

Очевидно, що так означені алгебри є деформаціями фактор-алгебр групових алгебр груп Кокстера.

У цій роботі ми розглянемо алгебри $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$, які є фактор-алгебрами алгебр $TL_{\mathbb{G},g}$ по співвідношеннях $p_i p_j = p_j p_i = 0$, для тих пар (i, j), для яких $m_{ij} = 2$.

Зауважимо, що якщо всі $m_{ij} \leqslant 3$, то граф Кокстера $\mathbb{G}$ є звичайним графом. Алгебри $TL_{\Gamma,\tau}$ та $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$, де Γ — звичайний граф, а τ — відображення з множини ребер графа в $\mathbb{R}$, досліджувались у роботах [11 – 13].

У пункті 1 наведено необхідні означення, зокрема означення графа Кокстера та алгебри Темперлі – Ліба $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$. У пункті 2 отримано опис лінійного базису алгебри $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$. У пункті 3 знайдено всі скінченновимірні алгебри серед алгебр $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$, підраховано їх розмірності. Для нескінченномірних алгебр знайдено їх ріст.

1. Графи Кокстера та алгебри $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$, пов'язані з ними. *Графом Кокстера* $\mathbb{G}$ називають скінченний неорієнтований граф $\mathbb{G} = (V, R)$ (де $V = \{1, \ldots, n\}$ — множина з $|\mathbb{G}| = n$ вершин, R — множина ребер $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$, $i, j \in V$, $i \neq j$) без кратних ребер і петель, всі ребра R якого поділяються на декілька типів

$$R = \bigsqcup_{s=3}^{\infty} R_s.$$

Позначимо через $s_{\mathbb{G}} \geqslant 3$ такий номер s, що $R_{s_{\mathbb{G}}} \neq \varnothing$ та $R_s = \varnothing$, якщо $s > s_{\mathbb{G}}$. Відповідні ребра будемо називати R_3-ребрами, R_4-ребрами і т. п.

Шлях довжини m у графі $\mathbb{G}$

$$l = l(i_0) = (i_0, i_1, \ldots, i_m), \quad \gamma_{i_{k-1}, i_k} \in R,$$

будемо називати *шляхом без повернень*, якщо $i_k \neq i_j$ для довільних $k \neq j$, тобто якщо він є ін'єктивним. Шлях $l = (i_0)$ розглядатимемо як шлях без повернень довжини 0. Якщо всі ребра шляху належать множині R_3, то будемо називати такий шлях R_3-*шляхом*.

Підграфом $\mathbb{G}'$ графа Кокстера $\mathbb{G}$ будемо називати граф Кокстера

$$\mathbb{G}' = \left(V', R' = \bigsqcup_{s=3}^{\infty} R'_s\right)$$

такий, що $V' \subset V$, та якщо $i, j \in V'$ і $\gamma_{ij} \in R_s$, то $\gamma_{ij} \in R'_s$.

Підграф Кокстера $\mathbb{G}'$ графа Кокстера $\mathbb{G}$ будемо називати *R_3-зв'язним*, якщо будь-які дві його вершини пов'язані R_3-шляхом. R_3-зв'язний підграф $\mathbb{G}'$ будемо називати *компонентою R_3-зв'язності* графа $\mathbb{G}$, якщо не існує більшого R_3-зв'язного підграфа графа $\mathbb{G}$, підграфом якого є $\mathbb{G}'$.

Перед тим як навести означення алгебри $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$, доведемо твердження, з якого буде випливати, що ця алгебра є деформацію фактор-алгебри групової алгебри групи Кокстера.

Твердження 1. *Нехай p та q — проектори, що не комутують, α — довільне число. Тоді для довільного $k \in \mathbb{N}$ та довільного $\sigma \in \{0,1\}$ має місце рівність*

$$((p+\alpha)(q+\alpha))^k (p+\alpha)^\sigma = f(pq)p^\sigma + r(p,q),$$

де $f \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f = k$, $r(p,q) = r(q,p)$, крім того, $f(0) = 0$, якщо $\sigma = 0$.

Доведення. Позначимо $A_{k,\sigma}(p,q) = ((p+\alpha)(q+\alpha))^k (p+\alpha)^\sigma$. Для доведення твердження достатньо показати, що

$$A_{k,\sigma}(p,q) = f_1(pq)p^\sigma + f_2(qp)q^\sigma + f_0(pq)p^{1-\sigma} + f_0(qp)q^{1-\sigma} + \beta, \qquad (9)$$

де β — деяке число, а f_1, f_2, f_0 — поліноми з $\mathbb{R}[x]$ такі, що $\deg f_1 = k$, $\deg f_2 = k-1$, $\deg f_0 = k - 1 + \sigma$ і, крім того, $f_1(0) = f_2(0) = 0$, якщо $\sigma = 0$, та $f_0(0) = 0$ у випадку $\sigma = 1$. Дійсно, якщо виконується рівність (9), то покладемо

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

$$r(p,q) = f_2(pq)p^\sigma + f_2(qp)q^\sigma + f_0(pq)p^{1-\sigma} + f_0(qp)q^{1-\sigma} + \beta.$$

Очевидно, що $\deg f = k$.

Рівність (9), очевидно, виконується для $k = 1$, $\sigma = 0, 1$.

Нехай рівність (9) виконується для певного k та $\sigma = 0$. Тоді

$$A_{k+1,0}(q,p) = (q+\alpha)A_{k,0}(p,q)(p+\alpha).$$

Розкриваючи дужки, отримуємо

$$qA_{k,0}(p,q)p = qf_1(pq)p + f_2(qp) + qf_0(pq)p + f_0(qp)qp + \beta qp,$$

$$qA_{k,0}(p,q)\alpha = \alpha(qf_1(pq) + f_2(qp) + qf_0(pq)p + f_0(qp)q + \beta q),$$

$$\alpha A_{k,0}(p,q)p = \alpha(f_1(pq)p + f_2(qp) + f_0(pq)p + f_0(qp)qp + \beta p),$$

$$\alpha A_{k,0}(p,q)\alpha = \alpha^2(f_1(pq) + f_2(qp) + f_0(pq)p + f_0(qp)q + \beta).$$

Тоді, покладаючи $\beta' = \alpha^2\beta$,

$$f_1'(x) = [f_1(x)x + f_2(x) + 2f_0(x)x] + 2\alpha(f_2(x) + f_0(x)x) + \alpha^2 f_2(x) + \beta x =$$

$$= f_1(x)x + 2(\alpha+1)f_0(x)x + (\alpha+1)^2 f_2(x) + \beta x,$$

$$f_2'(x) = \alpha^2 f_1(x),$$

$$f_0'(x) = \alpha(f_1(x) + (1+\alpha)f_0(x) + \beta),$$

знаходимо

$$A_{k+1,0}(q,p) = f_1'(qp) + f_2'(pq) + f_0'(pq)p + f_0'(qp)q + \beta',$$

причому $\deg f_1' = k+1$, $\deg f_2' = k$, $\deg f_0' = k$ і, крім того, $f_1'(0) = (\alpha+1)^2 f_2(0) = 0$, $f_2'(0) = \alpha^2 f_1(0) = 0$.

Нехай тепер рівність (9) виконується для певного k та $\sigma = 1$. Тоді

$$A_{k+1,1}(q,p) = (q+\alpha)A_{k,1}(p,q)(q+\alpha).$$

Розкриваючи дужки, отримуємо

$$qA_{k,1}(p,q)q = qf_1(pq)pq + f_2(qp)q + qf_0(pq) + f_0(qp)q + \beta q,$$

$$qA_{k,1}(p,q)\alpha = \alpha(qf_1(pq)p + f_2(qp)q + qf_0(pq) + f_0(qp) + \beta q),$$

$$\alpha A_{k,1}(p,q)q = \alpha(f_1(pq)pq + f_2(qp)q + f_0(pq) + f_0(qp)q + \beta q),$$

$$\alpha A_{k,1}(p,q)\alpha = \alpha^2(f_1(pq)p + f_2(qp)q + f_0(pq) + f_0(qp) + \beta).$$

Тоді, покладаючи $\beta' = \alpha^2\beta$,

$$f_1'(x) = [f_1(x)x + f_2(x) + 2f_0(x)] + 2\alpha(f_2(x) + f_0(x)) + \alpha^2 f_2(x) + (2\alpha+1)\beta =$$

$$= f_1(x)x + 2(\alpha+1)f_0(x) + (\alpha+1)^2 f_2(x) + (2\alpha+1)\beta,$$

$$f_2'(x) = \alpha^2 f_1(x),$$

$$f_0'(x) = \alpha(f_1(x)x + (1+\alpha)f_0(x)),$$

знаходимо

$$A_{k+1,1}(q,p) = f_1'(qp)q + f_2'(pq)p + f_0'(pq) + f_0'(qp) + \beta',$$

причому $\deg f_1' = k+1$, $\deg f_2' = k$, $\deg f_0' = k+1$ і, крім того, $f_0'(0) = \alpha(1+\alpha)f_0(0) = 0$.

Твердження доведено.

Нехай g — деяке відображення, яке кожному ребру $\gamma_{ij} \in R_s$, $s = 2k+\sigma \geqslant 3$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \{0,1\}$, ставить у відповідність поліном g_{ij} такий, що $\deg g_{ij} \leqslant k-1$ та $g_{ij}(0) = 0$, якщо σ дорівнює нулеві,

$$g : R \to \mathbb{R}[x] \colon \gamma_{ij} \mapsto g_{ij}(x) = \sum_{m=1-\sigma}^{k-1} \tau_{ij}^{(m)} x^m \in \mathbb{R}[x].$$

Визначимо також поліном $\tilde{g}_{ij}(x)$ як такий, що збігається з $g_{ij}(x)$ у випадку $\sigma = 1$ та є розв'язком рівняння $g_{ij}(x) = x\tilde{g}_{ij}(x)$ у випадку $\sigma = 0$.

Алгебра $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ визначається за допомогою n твірних та співвідношень, які задаються графом

$$TL_{\mathbb{G},g,\perp} = \mathbb{C}\Big\langle p_1, \ldots, p_n \,|\, p_i^2 - p_i = 0; \quad p_i p_j = 0, \quad \text{якщо} \quad \gamma_{ij} \notin R;$$

$$(p_i p_j)^k p_i^\sigma - g_{ij}(p_i p_j) p_i^\sigma = 0, \quad \text{якщо} \quad \gamma_{ij} \in R_s, \quad s = 2k + \sigma \geqslant 3, \sigma \in \{0, 1\} \Big\rangle. \tag{10}$$

Тобто алгебра $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ є фактор-алгеброю вільної алгебри F_n, породженої n твірними, по ідеалу I, який породжений множиною лівих частин співвідношень (10). Цю множину далі будемо позначати U. Букви впорядковуємо за зростанням індексу: $p_1 < \ldots < p_n$. На словах розглядаємо однорідно-лексикографічний порядок. З кожним елементом $v \in F_n$ пов'язуємо його старше слово $\hat{v}$. Слово w називають *нормальним* (за модулем ідеалу I), якщо воно не є старшим словом жодного елемента ідеалу I (див. [14]). Через N позначимо лінійну оболонку нормальних слів. Тоді за теоремою [14, с. 31] та наслідком з неї на N можна визначити операцію множення таку, що алгебра N буде ізоморфною алгебрі $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$. Далі будемо ототожнювати алгебру $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ з алгеброю N.

2. Про лінійний базис в алгебрах $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$. Для доведення наступного твердження ми скористаємося „лемою про композицію". З поняттями композиції, редукції, базису Грьобнера можна ознайомитися, наприклад, в [14].

Твердження 2. *Лінійний базис алгебри $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ складається зі слів, які не містять слів*

$$p_i^2 \quad \forall i \in V, \qquad p_i p_j \quad \forall \gamma_{ij} \notin R,$$

$$(p_i p_j)^k p_i^\sigma \quad \forall \gamma_{ij} \in R_s, \quad s = 2k + \sigma \geqslant 3, \quad \sigma \in \{0, 1\},$$

в якості підслів.

Доведення. Старше слово будь-якого з елементів множини U не є підсловом старшого слова будь-якого іншого елемента множини U. Покажемо, що множина U є замкненою відносно композиції, тоді U є мінімальним базисом Грьобнера ідеалу I, отже, нормальні слова є лінійним базисом $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$.

Легко перевірити, що результат будь-якої композиції з елементом $p_i^2 - p_i$, $i \in V$, редукується до нуля. Результат композиції елементів $p_i p_j$ та $p_j p_l$, $\gamma_{ij}, \gamma_{jl} \notin R$, також редукується до нуля.

Наведемо результати всіх можливих композицій з елементом

$$(p_i p_j)^k p_i^\sigma - g_{ij}(p_i p_j) p_i^\sigma, \qquad \gamma_{ij} \in R_s, \quad s = 2k + \sigma \geqslant 3, \quad \sigma \in \{0, 1\}.$$

1. Для $\gamma_{li} \notin R$ маємо композицію $p_l \cdot p_i \cdot p_j (p_i p_j)^{k-1} p_i^\sigma$:

$$p_l \left[(p_i p_j)^k p_i^\sigma - g_{ij}(p_i p_j) p_i^\sigma \right] - p_l p_i \left[p_j (p_i p_j)^{k-1} p_i^\sigma \right] =$$

$$= -p_l g_{ij}(p_i p_j) p_i^\sigma \to -\tau_{ij}^{(0)} p_l p_i^\sigma = \to 0,$$

бо якщо $\tau_{ij}^{(0)} \neq 0$, то $\sigma = 1$.

2. Якщо $\sigma = 0$, то для $\gamma_{jl} \notin R$ маємо композицію $(p_i p_j)^{k-1} p_i \cdot p_j \cdot p_l$, а якщо $\sigma = 1$, то для $\gamma_{il} \notin R$ маємо композицію $(p_i p_j)^k \cdot p_i \cdot p_l$:

$$\left[(p_i p_j)^k p_i^\sigma - g_{ij}(p_i p_j) p_i^\sigma\right] p_l - (p_i p_j)^k p_i^\sigma p_l = -g_{ij}(p_i p_j) p_i^\sigma p_l \to 0,$$

бо якщо $\sigma = 0$, то $g_{ij}(p_i p_j) p_l \to \tau_{ij}^{(0)} p_l = 0$.

3. Для $\gamma_{ij} \in R_s$ та k_1, k_2 таких, що $k = k_1 + k_2$, $k_1 \geqslant 1$, $k_2 \geqslant 1 - \sigma$, маємо композицію $(p_i p_j)^{k_1} \cdot (p_i p_j)^{k_2} p_i^\sigma \cdot p_j^\sigma (p_i p_j)^{k_1 - \sigma} p_i^\sigma$:

$$\left[(p_i p_j)^{k_1} (p_i p_j)^{k_2} p_i^\sigma - g_{ij}(p_i p_j) p_i^\sigma\right] p_j^\sigma (p_i p_j)^{k_1 - \sigma} p_i^\sigma -$$

$$-(p_i p_j)^{k_1} \left[(p_i p_j)^{k_2} p_i^\sigma p_j^\sigma (p_i p_j)^{k_1 - \sigma} p_i^\sigma - g_{ij}(p_i p_j) p_i^\sigma\right] =$$

$$= (p_i p_j)^{k_1} g_{ij}(p_i p_j) p_i^\sigma - g_{ij}(p_i p_j) p_i^\sigma p_j^\sigma (p_i p_j)^{k_1 - \sigma} p_i^\sigma =$$

$$= (p_i p_j)^{k_1} g_{ij}(p_i p_j) p_i^\sigma - g_{ij}(p_i p_j)(p_i p_j)^{k_1} p_i^\sigma \to 0.$$

4. Для $\gamma_{ji} \in R_s$ та довільних k_1, k_2 таких, що $k = k_1 + k_2 + 1$, $k_1 \geqslant 0$, $k_2 \geqslant 0$, маємо композицію $(p_i p_j)^{k_1} p_i \cdot p_j (p_i p_j)^{k_2} p_i^\sigma \cdot p_i^{1-\sigma} (p_j p_i)^{k_1} p_j^\sigma$:

$$\left[(p_i p_j)^{k_1} p_i p_j (p_i p_j)^{k_2} p_i^\sigma - g_{ij}(p_i p_j) p_i^\sigma\right] p_i^{1-\sigma} (p_j p_i)^{k_1} p_j^\sigma -$$

$$-(p_i p_j)^{k_1} p_i \left[(p_j p_i)^{k_2} p_j p_i (p_j p_i)^{k_1} p_j^\sigma - g_{ij}(p_j p_i) p_j^\sigma\right] =$$

$$= (p_i p_j)^{k_1} p_i g_{ij}(p_j p_i) p_j^\sigma - g_{ij}(p_i p_j) p_i (p_j p_i)^{k_1} p_j^\sigma =$$

$$= (p_i p_j)^{k_1} g_{ij}(p_i p_j) p_i p_j^\sigma - g_{ij}(p_i p_j)(p_i p_j)^{k_1} p_i p_j^\sigma = 0.$$

5. Якщо $\sigma = 0$ ($k \geqslant 2$), то для $\gamma_{jl} \in R_{s'}$, де $s' = 2k' + \sigma' \geqslant 3$, $\sigma' \in \{0, 1\}$, маємо композицію $(p_i p_j)^{k-1} p_i \cdot p_j \cdot p_l (p_j p_l)^{k'-1} p_j^{\sigma'}$:

$$\left[(p_i p_j)^{k-1} p_i p_j - g_{ij}(p_i p_j)\right] p_l (p_j p_l)^{k'-1} p_j^{\sigma'} -$$

$$-(p_i p_j)^{k-1} p_i \left[p_j p_l (p_j p_l)^{k'-1} p_j^{\sigma'} - g_{jl}(p_j p_l) p_j^{\sigma'}\right] =$$

$$= (p_i p_j)^{k-1} p_i g_{jl}(p_j p_l) p_j^{\sigma'} - g_{ij}(p_i p_j) p_l (p_j p_l)^{k'-1} p_j^{\sigma'} =$$

$$= (p_i p_j)^{k-1} p_i p_j \tilde{g}_{jl}(p_l p_j) p_l^{1-\sigma'} - \tilde{g}_{ij}(p_i p_j) p_i p_j p_l (p_j p_l)^{k'-1} p_j^{\sigma'} =$$

$$= (p_i p_j)^k \tilde{g}_{jl}(p_l p_j) p_l^{1-\sigma'} - \tilde{g}_{ij}(p_i p_j) p_i (p_j p_l)^{k'} p_j^{\sigma'} \to$$

$$\to g_{ij}(p_i p_j) \tilde{g}_{jl}(p_l p_j) p_l^{1-\sigma'} - \tilde{g}_{ij}(p_i p_j) p_i g_{jl}(p_j p_l) p_j^{\sigma'} =$$

$$= \tilde{g}_{ij}(p_i p_j) p_i p_j \tilde{g}_{jl}(p_l p_j) p_l^{1-\sigma'} - \tilde{g}_{ij}(p_i p_j) p_i p_j \tilde{g}_{jl}(p_l p_j) p_l^{1-\sigma'} = 0.$$

Ми скористалися означенням $\tilde{g}_{ij}$, а також тим, що у випадку $\sigma' = 1$

$$g_{jl}(p_j p_l) p_j = p_j g_{jl}(p_l p_j) = p_j \tilde{g}_{jl}(p_l p_j),$$

а у випадку $\sigma' = 0$

$$g_{jl}(p_jp_l) = p_j\tilde{g}_{jl}(p_lp_j)p_l,$$

отже, має місце формула

$$g_{jl}(p_jp_l)p_j^{\sigma'} = p_j\tilde{g}_{jl}(p_lp_j)p_l^{1-\sigma'}.$$

6. Якщо $\sigma = 1$ ($k \geqslant 1$), то для $\gamma_{il} \in R_{s'}$, де $s' = 2k' + \sigma' \geqslant 3$, $\sigma' \in \{0, 1\}$, маємо композицію $(p_ip_j)^k \cdot p_i \cdot p_l(p_ip_l)^{k'-1}p_i^{\sigma'}$:

$$\left[(p_ip_j)^k p_i - g_{ij}(p_ip_j)p_i\right] p_l(p_ip_l)^{k'-1}p_i^{\sigma'} -$$

$$-(p_ip_j)^k \left[p_ip_l(p_ip_l)^{k'-1}p_i^{\sigma'} - g_{il}(p_ip_l)p_i^{\sigma'}\right] =$$

$$= (p_ip_j)^k g_{il}(p_ip_l)p_i^{\sigma'} - g_{ij}(p_ip_j)p_ip_l(p_ip_l)^{k'-1}p_i^{\sigma'} =$$

$$= (p_ip_j)^k p_i\tilde{g}_{il}(p_lp_i)p_l^{1-\sigma'} - g_{ij}(p_ip_j)(p_ip_l)^{k'}p_i^{\sigma'} \to$$

$$\to g_{ij}(p_ip_j)p_i\tilde{g}_{il}(p_lp_i)p_l^{1-\sigma'} - g_{ij}(p_ip_j)g_{il}(p_ip_l)p_i^{\sigma'} =$$

$$= g_{ij}(p_ip_j)g_{il}(p_ip_l)p_i^{\sigma'} - g_{ij}(p_ip_j)g_{il}(p_ip_l)p_i^{\sigma'} = 0.$$

Ми знову скористалися тим, що має місце формула

$$g_{il}(p_ip_l)p_i^{\sigma'} = p_i\tilde{g}_{il}(p_lp_i)p_l^{1-\sigma'}.$$

Інших композицій не існує.

Твердження доведено.

3. Про розмірність та ріст алгебри $\boldsymbol{TL_{\mathbb{G},g,\perp}}$. Для формулювання наступного твердження введемо позначення

$$\hat{R}_r = \bigsqcup_{s=r}^{\infty} R_s.$$

Теорема 1. *Нехай $\mathbb{G}$ — дерево. Тоді*:

0) *якщо* $|\hat{R}_4| = 0$, *то* $\dim TL_{\mathbb{G},g,\perp} = |\mathbb{G}|^2 + 1$;

1) *якщо* $|\hat{R}_4| = |R_{s_\mathbb{G}}| = 1$, *то* $\mathbb{G}$ *складається з двох* R_3*-зв'язних компонент* $\mathbb{G}_1$ *та* $\mathbb{G}_2$, *і*

$$\dim TL_{\mathbb{G},g,\perp} = \begin{cases} m|\mathbb{G}|^2 + 1, & \text{якщо} \quad s_\mathbb{G} = 2m+1, \\ (m-1)|\mathbb{G}|^2 + |\mathbb{G}_1|^2 + |\mathbb{G}_2|^2 + 1, & \text{якщо} \quad s_\mathbb{G} = 2m; \end{cases}$$

2) *якщо* $|\hat{R}_4| \geqslant 2$, *то* $\dim TL_{\mathbb{G},g,\perp} = \infty$; *у випадку* $|\hat{R}_4| = 2$, *якщо* $|\hat{R}_6| = 0$, *то алгебра має поліноміальний ріст, а якщо* $|\hat{R}_6| \geqslant 1$, *то вона містить вільну алгебру з двома твірними;*

3) *якщо* $|\hat{R}_4| \geqslant 3$, *то* $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ *містить вільну алгебру з двома твірними.*

Доведення. Наслідком твердження 2 є той факт, що кожному R_3-шляху без повернень $l = (i_1, i_2, \ldots, i_m)$ взаємно однозначно відповідає нормальне слово $\Pi_l = p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_m}$. Зрозуміло, що якщо $l = l_1 \sqcup l_2$ — знов R_3-шлях без повернень, то $\Pi_l = \Pi_{l_1} \Pi_{l_2}$.

0. У випадку $|\hat{R}_4| = 0$ граф Кокстера $\mathbb{G}$ є звичайним графом. Алгебри $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$, де Γ — звичайне дерево, досліджувались у роботі [12]. Зокрема, в цій роботі показано, що $\dim TL_{\Gamma,\tau,\perp} = |\Gamma|^2 + 1$.

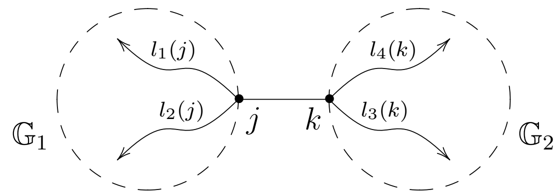
1. Нехай $\hat{R}_4 = R_{s_\mathbb{G}} = \{\gamma_{jk}\}$, $s_\mathbb{G} = 2m + \sigma \geqslant 4$, тоді всі нормальні слова довжини 1 та більше мають вигляд

$$\Pi_l, \quad |\mathbb{G}|^2 \text{ елементів};$$

$$\begin{cases} \Pi_{\overline{l_1(j)}} p_k (p_j p_k)^{r_1} \Pi_{l_2(j)}, & |\mathbb{G}_1|^2 \text{ елементів} \\ \Pi_{\overline{l_3(k)}} (p_j p_k)^{r_1} p_j \Pi_{l_4(k)}, & |\mathbb{G}_2|^2 \text{ елементів} \end{cases} \quad \text{при фіксованому } r_1,$$

$$\begin{cases} \Pi_{\overline{l_1(j)}} (p_k p_j)^{r_2} \Pi_{l_3(k)}, & |\mathbb{G}_1||\mathbb{G}_2| \text{ елементів} \\ \Pi_{\overline{l_4(k)}} (p_j p_k)^{r_2} \Pi_{l_2(j)}, & |\mathbb{G}_2||\mathbb{G}_1| \text{ елементів} \end{cases} \quad \text{при фіксованому } r_2,$$

де l — довільний шлях без повернень (всього існує $|\mathbb{G}|^2$ таких шляхів), $l_1(j)$, $l_2(j)$ — довільні R_3-шляхи, що починаються в точці j (всього існує $|\mathbb{G}_1|$ таких шляхів), $l_3(k)$, $l_4(k)$ — довільні R_3-шляхи, що починаються в точці k (всього існує $|\mathbb{G}_2|$ таких шляхів).



При цьому

$$3 \leqslant 2r_1 + 3 < s_\mathbb{G} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant r_1 < (s_\mathbb{G} - 3)/2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant r_1 \leqslant m - 2,$$

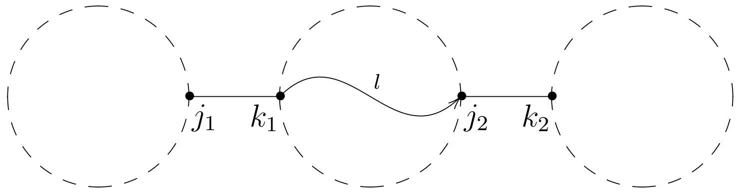
$$4 \leqslant 2r_2 + 2 < s_\mathbb{G} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant r_2 < (s_\mathbb{G} - 2)/2 \quad \Rightarrow \quad 1 \leqslant r_2 \leqslant m - 2 + \sigma.$$

Отже, алгебра є скінченновимірною і має розмірність

$$\dim TL_{\mathbb{G},g,\perp} = 1 + |\mathbb{G}|^2 + (m-1)(|\mathbb{G}_1|^2 + |\mathbb{G}_2|^2) + 2(m - 2 + \sigma)(|\mathbb{G}_1||\mathbb{G}_2|) =$$
$$= 1 + |\mathbb{G}|^2 + (m-2)(|\mathbb{G}_1| + |\mathbb{G}_2|)^2 + |\mathbb{G}_1|^2 + |\mathbb{G}_2|^2 + 2\sigma|\mathbb{G}_1||\mathbb{G}_2| =$$
$$= 1 + (m-1)|\mathbb{G}|^2 + |\mathbb{G}_1|^2 + |\mathbb{G}_2|^2 + 2\sigma|\mathbb{G}_1||\mathbb{G}_2|.$$

2. Якщо $|\hat{R}_4| \geqslant 2$, то існує єдиний шлях без повернень l такий, що його початок належить одному з ребер з множини $\hat{R}_4$, а кінець — іншому, причому ці два ребра не збігаються. Позначимо ці два ребра через γ_{j_1,k_1} та γ_{j_2,k_2} відповідно. Будемо

також вважати, що початком l є k_1, а кінцем — j_2 (не виключено випадок $k_1 = j_2$). Тоді $(p_{j_1}\Pi_l p_{k_2}\Pi_{\bar{l}})^n$ є нормальним словом для довільного n. Отже, алгебра є нескінченномірною.



У випадку, коли $\hat{R}_4$ в точності збігається з $\{\gamma_{j_1,k_1}, \gamma_{j_2,k_2}\}$, а $|\hat{R}_6| = 0$, є три можливості: або $|R_4| = 2$, або $|R_4| = 1$ та $|R_5| = 1$, або $|R_5| = 2$. Легко бачити, що в будь-якому з цих випадків кількість нормальних слів, які не містять в якості підслова $p_{j_1}\Pi_l p_{k_2}\Pi_{\bar{l}}$, є скінченною, а всі слова, що містять підслово $p_{j_1}\Pi_l p_{k_2}\Pi_{\bar{l}}$, мають вигляд

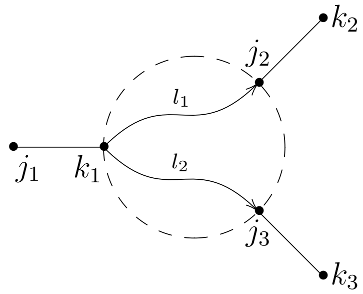
$$w_1(p_{j_1}\Pi_l p_{k_2}\Pi_{\bar{l}})^n w_2,$$

де w_1 та w_2 вже не містять підслова $p_{j_1}\Pi_l p_{k_2}\Pi_{\bar{l}}$. Отже, відповідні алгебри мають лінійний ріст.

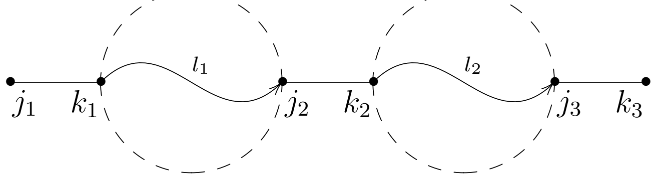
Якщо ж $|\hat{R}_6| \geqslant 1$ (будемо вважати, що $\gamma_{j_2,k_2} \in R_6$), то слова $p_{j_1}\Pi_l p_{k_2}\Pi_{\bar{l}}$ та $p_{j_1}\Pi_l p_{k_2} p_{j_2} p_{k_2}\Pi_{\bar{l}}$ породжують вільну алгебру.

3. Якщо $\hat{R}_4 = \{\gamma_{j_1,k_1}, \gamma_{j_2,k_2}, \gamma_{j_3,k_3}\}$, то існує шлях без повернень l_1 такий, що його початок належить одному з ребер з множини $\hat{R}_4$, а кінець — одному з двох інших, причому ці два ребра не збігаються та не є суміжними. Будемо вважати, що початком l_1 є k_1, а кінцем — j_2 (не виключено випадок $k_1 = j_2$). Далі існують дві можливості:

а) існує шлях без повернень l_2, початком якого є k_1, а кінцем j_3 (не виключено випадок $k_1 = j_3$);



б) існує шлях без повернень l_2, початком якого є k_2, а кінцем — j_3 (не виключено випадок $j_3 = k_2$).



У першому випадку пара нормальних слів $p_{j_1}\Pi_{l_1}p_{k_2}\Pi_{\overline{l_1}}$ та $p_{j_1}\Pi_{l_2}p_{k_3}\Pi_{\overline{l_2}}$ породжують вільну алгебру, в другому випадку вільну алгебру породжують пара слів $p_{j_1}\Pi_{l_1}p_{k_2}\Pi_{\overline{l_1}}$ та $p_{j_1}\Pi_{l_1}\Pi_{l_2}p_{k_3}\Pi_{\overline{l_2}}\Pi_{\overline{l_1}}$.

Теорему доведено.

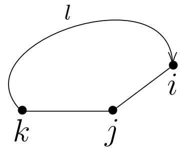
Теорема 2. *Нехай $\mathbb{G}$ — зв'язний граф Кокстера.*

0. *Якщо $\mathbb{G}$ містить цикл та $|\hat{R}_4| = 0$, то $\dim TL_{\mathbb{G},g,\perp} = \infty$, причому, якщо цикл в точності один, алгебра має лінійний ріст, якщо ж $\mathbb{G}$ містить два цикли, алгебра містить вільну алгебру з двома твірними.*

1. *Якщо $\mathbb{G}$ містить цикл та $|\hat{R}_4| \geqslant 1$, то $TL_{\mathbb{G},g,\perp}$ містить вільну алгебру з двома твірними.*

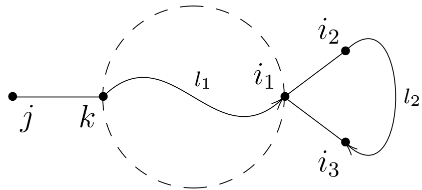
Доведення. 0. Як і в попередній теоремі, у випадку $|\hat{R}_4| = 0$ граф Кокстера $\mathbb{G}$ є звичайним графом. Алгебри $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$, де Γ — звичайний зв'язний граф, що містить цикл, досліджувались у роботах [12, 15]. Зокрема, було показано, що якщо Γ — зв'язний граф з одним циклом, то $TL_{\Gamma,\tau,\perp}$ має лінійний ріст, якщо ж циклів більше, то алгебра вже містить вільну алгебру з двома твірними.

1. Якщо ребро $\gamma_{j,k} \in \hat{R}_4$ належить циклу, то існує шлях l, початком якого є k, а кінець i поєднано ребром з j (i не збігається з k).



У цьому випадку нормальні слова $x_1 = p_j\Pi_l$ та $x_2 = p_j\Pi_l p_j p_k p_j \Pi_{\overline{l}}$ породжують вільну алгебру.

Якщо ж ребро $\gamma_{j,k} \in \hat{R}_4$ не належить циклу, то існує шлях l_1, початком якого є k, а кінець i_1 належить циклу. Крім того, існує шлях l_2, початок i_2 та кінець i_3 якого поєднані ребрами з i_1 (i_2 та i_3 не збігаються).



У цьому випадку вільну алгебру породжують нормальні слова $x_1 = p_j\Pi_{l_1}\Pi_{l_2}\Pi_{\overline{l_1}}$ та $x_2 = p_j\Pi_{l_1}\Pi_{\overline{l_2}}\Pi_{\overline{l_1}}$.

Теорему доведено.

1. *Artin E.* Theorie de Zopfe // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. – 1925. – **4**. – P. 47 – 72.
2. *Green R. M.* Tabular algebras and their asymptotic versions // J. Algebra. – 2002. – **252**. – P. 27 – 64.
3. *Green R. M., Losonczy J.* Canonical bases for Hecke algebra quotients // Math. Res. Lett. – 1999. – **6**. – P. 213 – 222.
4. *Jones V.* Index for subfactors // Invent. math. – 1983. – **72**. – P. 1 – 25.
5. *Jones V.* A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras // Bull. Amer. Math. Soc. – 1985. – **12**. – P. 103 – 112.

6. *Jones V. F. R.* Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials // Ann. Math. – 1987. – **126**. – P. 335 – 388.
7. *Jones V. F. R.* In and around the origin of quantum groups. – 2004. – 37 p. – Preprint.
8. *Kazhdan D., Lusztig G.* Representation of Coxeter groups and Hecke algebras // Invent. math. – 1979. – **53**. – P. 165 – 184.
9. *Lusztig G.* Affine Hecke algebras and their graded version // J. Amer. Math. Soc. – 1989. – **2**, № 3. – P. 598 – 635.
10. *Temperley H. N. V., Lieb E. H.* Relations between 'percolations' and 'colouring' problems and other graph theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the percolation problem // Proc. Roy. Soc. London A. – 1971. – **322**. – P. 251 – 280.
11. *Popova N.* On one algebra of Temperley – Lieb type // Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine. – 2002. – **43**, Pt 2. – P. 486 – 489.
12. *Vlasenko M.* On the growth of an algebra generated by a system of projections with fixed angles // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2004. – **10**, № 1. – P. 98 – 104.
13. *Wenzl H.* On sequences of projections // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. – 1987. – **9**, № 1. – P. 5 – 9.
14. *Уфнаровский В. А.* Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Соврем. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1990. – **57**. – P. 5 – 177.
15. *Власенко М. А., Попова Н. Д.* О конфигурациях подпространств гильбертова пространства с фиксированными углами между ними // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 5. – P. 606 – 615.

Одержано 25.01.2007