УДК 517.9

С. М. Торба (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРЯМІ ТА ОБЕРНЕНІ ТЕОРЕМИ НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АБСТРАКТНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ*

We consider an approximate method of the solution of the Cauchy problem for an operator-differential equation based on the exponent decomposition in the orthogonal Lager polynomials. For the initial value of finite smoothness with respect to the operator A, we prove direct and inverse theorems of the theory of approximation in the mean and present examples of the unimprovability of corresponding estimates in these theorems. We establish the exponential rate of convergence for exponential-type entire vectors and the subexponential rate of convergence for the Gevrey classes. We also establish the characterization of both classes of vectors in terms of convergence rate in the mean approximation.

Рассмотрен приближенный метод решения задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения, основанный на разложении экспоненты по ортогональным многочленам Лагера. Для начального значения конечной гладкости относительно оператора A доказаны прямая и обратная теоремы теории приближения в среднем, приведены примеры неулучшаемости соответствующих оценок в этих теоремах. Для целых векторов экспоненциального типа установлена экспоненциальная скорость сходимости, для классов Жевре — субэкспоненциальная, а также характеризация соответствующих классов в терминах скорости сходимости в среднем приближения.

1. Вступ. У роботі М. Л. Горбачука і В. В. Городецького [1] запропоновано наближений поліноміальний метод розв'язання задачі Коші для диференціально-операторного рівняння в гільбертовому просторі, в основу якого покладено розклад деяких класичних функцій у ряд за ортогональними поліномами Лагера і отримано оцінки похибки наближення в залежності від ступеня гладкості початкових даних. О. І. Кашпіровський і Ю. В. Митник [2] запропонували поліноміальний метод наближення, що ґрунтується на розкладі функцій за деякими іншими класами ортогональних многочленів.

У роботах Д. З. Арова, І. П. Гаврилюка, В. Л. Макарова, В. Б. Василика і В. Л. Рябічева [3 – 6] та в монографії І. П. Гаврилюка, В. Л. Макарова [7] запропоновано інший підхід до розв'язання таких задач, так званий метод перетворення Келі, який не є поліноміальним, і отримано поточкові й інтегральні оцінки (прямі теореми).

У цій роботі розглядається аналогічний підхід, що використовує резольвенту від оператора. Для векторів скінченної гладкості відносно оператора A, для цілих векторів експоненціального типу та для жевреєвських векторів доведено прямі теореми про швидкість збіжності інтегрального відхилу наближеного розв'язку. Крім того, для цих класів доведено обернену теорему. Для класу векторів скінченної гладкості відносно оператора A встановлено, що пряму теорему в деякому сенсі не можна покращити; це покращує результати І. П. Гаврилюка, В. Л. Макарова та В. Л. Рябічева. Більш того, показано, що між оцінками прямої та оберненої теорем є деякий „зазор", більший за $\ln n$, і наведено приклад, чому його неможливо зменшити. Для класів нескінченно гладких векторів $C^\infty(A)$, цілих векторів експоненціального типу $\mathrm{Exp}_A \mathfrak{H}$ та для класів жевреєвських векторів $G_{\{\beta\}}$ та $G_{(\beta)}$ прямі та обернені теореми дають повну характеризацію відповідних класів у термінах швидкості прямування до нуля інтегрального відхилу.

2. Прямі теореми наближення. Нехай A — самоспряжений додатно визначений оператор, що діє в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Для оператора A розглядається задача Коші

$$x'(t) + Ax(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad x(0) = x_0. \tag{1}$$

Відомо [8], що розв'язок задачі Коші має вигляд

* Підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № 14.1/003).

$$x(t) = e^{-tA}x_0.$$

Мета даної роботи — дослідити швидкість збіжності наближення розв'язку $x(t)$, побудованого за допомогою розкладу функції e^{-at} в ряд за многочленами Лагера

$$L_n(t, \alpha) = \frac{1}{n!}t^{-\alpha}e^t(t^{\alpha+n}e^{-t})^{(n)}.$$

Ввважатимемо в подальшому, що $\alpha = 0$. На підставі розкладу експоненти [9, с. 257]

$$e^{-at} = \frac{1}{a+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{a+1}\right)^n L_n(t, 0), \qquad a > -\frac{1}{2},$$

та операторного числення для самоспряженого оператора A можна записати формальний вираз для операторної експоненти

$$e^{-At} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n(A+I)^{-(n+1)}L_n(t, 0), \tag{2}$$

що діє в $\mathfrak{H}$. Подібний до (2) підхід, у якому замість виразу $A(A+I)^{-1}$ використовується перетворення Келі $(\gamma I + A)^{-1}(\gamma I - A)$, розглядається в монографії [7] та в багатьох статтях [3 – 6]. Заміною $\tilde{A} = \gamma^{-1}A - I$ один із них зводиться до іншого. Використовуючи результати [7], бачимо, що ряд (2) при $t > 0$ збігається для всіх $x \in \mathfrak{H}$, при $t = 0$ достатньою умовою збіжності є $x \in \mathcal{D}(A^{\sigma})$, $\sigma > 0$. Для збіжності ряду (2) разом з формальною похідною досить вимагати, щоб $\sigma \geq 1$ при $t > 0$ та $\sigma > 1$ при $t = 0$.

Розглянемо точний розв'язок

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n(A+I)^{-(n+1)}L_n(t, 0)x_0 \tag{3}$$

і за наближення візьмемо часткову суму ряду (3)

$$x_N(t) = \sum_{n=0}^{N} A^n(A+I)^{-(n+1)}L_n(t, 0)x_0. \tag{4}$$

Вираз (4) можна інтерпретувати таким чином: розглядається послідовність стаціонарних задач

$$(A+I)y_{p+1} = Ay_p, \qquad p = 0, 1, \ldots, \qquad y_0 = (A+I)^{-1}x_0,$$

завдяки чому нестаціонарне рівняння (1) „дискретизується" і зводиться до послідовності стаціонарних рівнянь з незмінними правою та лівою частинами, і за якими записується наближений розв'язок

$$x_N(t) = \sum_{n=0}^{N} L_n(t, 0)y_n. \tag{5}$$

Основна властивість многочленів Лагера — це їх ортогональність за вагою e^{-t}, $t > 0$. Відповідно, слушно розглянути інтегральний відхил наближення[1]

[1] Поточкові оцінки наближення досліджено в монографії [7], а відповідні обернені теореми планується розглянути в одній із наступних статей.

$$z_N^2(t) \;=\; \int_0^\infty \left\| x(t) - x_N(t) \right\|^2 e^{-t}\, dt. \tag{6}$$

Припустимо, що вектор x_0 має деякий ступінь гладкості відносно оператора A. Тоді має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $x_0 \in \mathcal{D}(A^\sigma)$, $\sigma \geq 0$. *Тоді*[2]

$$z_N^2 \;<\; \frac{(2\sigma+1)^{2\sigma+1}}{2^{2\sigma+2} e^{2\sigma+1}} \left(\frac{1}{N^{2\sigma+1}} + o\left(\frac{1}{N^{2\sigma+1}} \right) \right) \left\| A^\sigma x_0 \right\|^2. \tag{7}$$

Доведення. Використовуючи (5), (6), спектральне зображення самоспряженого оператора та ортонормованість многочленів Лагера з вагою e^{-t}, записуємо

$$z_N^2 \;=\; \int_0^\infty \left(\sum_{k=N+1}^\infty \frac{A^k}{(A+I)^{k+1}} L_k(t,0) x_0, \sum_{k=N+1}^\infty \frac{A^k}{(A+I)^{k+1}} L_k(t,0) x_0 \right) e^{-t}\, dt \;=$$

$$=\; \sum_{k=N+1}^\infty \left(\frac{A^k}{(A+I)^{k+1}} x_0, \frac{A^k}{(A+I)^{k+1}} x_0 \right) \;=$$

$$=\; \sum_{k=N+1}^\infty \left(\frac{A^{k-\sigma}}{(A+I)^{k+1}} y_0, \frac{A^{k-\sigma}}{(A+I)^{k+1}} y_0 \right) \;=$$

$$=\; \sum_{k=N+1}^\infty \int_0^\infty \frac{\lambda^{2k-2\sigma}}{(\lambda+1)^{2k+2}}\, d(E_\lambda y_0, y_0) \;=\; \int_0^\infty \sum_{k=N+1}^\infty \frac{\lambda^{2k-2\sigma}}{(\lambda+1)^{2k+2}}\, d(E_\lambda y_0, y_0),$$

де $y = A^\sigma x_0$. Підраховуючи суму під знаком інтеграла, знаходимо

$$z_N^2 \;=\; \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^{2N+2} \frac{1}{\lambda^{2\sigma}} \frac{1}{2\lambda+1}\, d(E_\lambda y_0, y_0). \tag{8}$$

Позначимо підінтегральний вираз через $\varphi(\lambda)$. Нескладний аналіз при умові $2N > \sigma$ показує, що $\varphi(\lambda)$ зростає при $\lambda < \lambda_{\max}$ та спадає при $\lambda > \lambda_{\max}$, де $\lambda_{\max}$ задовольняє оцінки

$$\frac{1}{4\sigma+2}\left(4N+3-4\sigma-\sqrt{2\sigma+1}\right) \;<\; \lambda_{\max} \;<\; \frac{1}{4\sigma+2}\left(4N+3-4\sigma+\sqrt{2\sigma+1}\right).$$

Підставляючи у $\varphi(\lambda)$ відповідно ліву чи праву оцінку для $\lambda_{\max}$ та використовуючи нерівність $\left(1-\frac{1}{x}\right)^x < e^{-1}$, $x \geq 1$, знаходимо оцінку максимального значення:

$$\varphi(\lambda) \;<\; \frac{(2\sigma+1)^{2\sigma+1}}{2^{2\sigma+2} e^{2\sigma+1}} \left(\frac{1}{N^{2\sigma+1}} + o\left(\frac{1}{N^{2\sigma+1}} \right) \right).$$

Повертаючись до (8), отримуємо

[2] Пряму теорему наближення доведено в [6] та в дисертації В. Л. Рябічева, але інший метод доведення дозволив покращити сталу з $\dfrac{(\sigma+1)^{2(1+\sigma)}}{2\sigma+1}$ до $\dfrac{(\sigma+1/2)^{2(1+\sigma)}}{(2\sigma+1)e^{2\sigma+1}}$, тому цю теорему та її доведення наведено в даній роботі.

$$z_N^2 \;<\; \frac{(2\sigma+1)^{2\sigma+1}}{2^{2\sigma+2}e^{2\sigma+1}}\left(\frac{1}{N^{2\sigma+1}}+o\left(\frac{1}{N^{2\sigma+1}}\right)\right)\left\|A^{\sigma}x_0\right\|^2.$$

Теорему доведено.

У монографії [7] наведено приклад оператора, для якого

$$z_N^2 \;\geq\; \frac{c}{N^{2\sigma+1}\ln^{1+\varepsilon}N},$$

тобто непокращуваність оцінки (7) у класі $\mathcal{D}(A^{\sigma})$ з точністю до $\ln^{1+\varepsilon}N$. Але з прикладу не можна встановити, чи буде справедливою оцінка з $\ln N$. Покажемо, що має місце сильніший факт, тобто оцінку (7) взагалі не можна покращити. А саме, має місце така теорема.

Теорема 2. *Нехай* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— необмежена неспадна послідовність додатних чисел. Тоді існують такий самоспряжений оператор* A *та вектор* $x_0 \in \mathcal{D}(A^{\sigma})$, *що не існує сталої* $c>0$ *такої, що*

$$z_N^2 \;\leq\; \frac{c}{N^{2\sigma+1}c_N}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Доведення. Побудуємо послідовність індексів $n_1 < n_2 < \ldots$ таким чином: n_{i+1} — деякий індекс такий, що $n_{i+1} > n_i$ та

$$c_{n_{i+1}} \;>\; (i+1)^3.$$

Такий індекс існує завдяки монотонності та необмеженості $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нехай $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормований базис у $\mathfrak{H}$. Дію оператора A визначимо так:

$$Ae_n \;=\; ne_n.$$

Під областю визначення розумітимемо $\mathcal{D}(A)=\{x\in\mathfrak{H}\,|\,Ax\in\mathfrak{H}\}$. Легко бачити, що заданий таким чином оператор A є самоспряженим.

Тепер побудуємо вектор $x_0\in\mathcal{D}(A^{\sigma})$. Покладемо

$$x_0 \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i^{\sigma}i}\,e_{n_i}\;\in\;\mathfrak{H}, \qquad y_0 \;:=\; A^{\sigma}x_0 \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\,e_{n_i}\;\in\;\mathfrak{H}, \tag{9}$$

для збіжності рядів використовується ортонормованість $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Отже, $x_0\in\mathcal{D}(A^{\sigma})$. Формула (8) для вектора x_0 та оператора A зводиться до формули

$$z_N^2 \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{n_i}{n_i+1}\right)^{2N+2}\frac{1}{n_i^{2\sigma}}\,\frac{1}{2n_i+1}\left|(y_0,e_{n_i})\right|^2.$$

При $N=n_i$, використовуючи нерівність $\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{n}\geq e^{-1}$, маємо

$$z_N^2 \;\geq\; \left(\frac{n_i}{n_i+1}\right)^{2N+2}\frac{1}{n_i^{2\sigma}}\,\frac{1}{2n_i+1}\left|(y_0,e_{n_i})\right|^2 \;\geq\; \frac{\tilde{c}e^{-2}}{2N^{2\sigma+1}}\,\frac{1}{i^2}, \tag{10}$$

де $\tilde{c}$ не залежить від i.

Припустимо, що

$$\exists c > 0: \quad z_N^2 \le \frac{c}{c_N N^{2\sigma+1}}. \tag{11}$$

Але тоді з нерівностей (10) та (11) випливає, що для всіх i

$$\frac{i^2}{c_{n_i}} \ge \frac{\tilde{c}e^{-2}}{2c} > 0,$$

а це суперечить вибору індексів n_i таким чином, щоб виконувалась умова $\frac{i^2}{c_{n_i}} < \frac{1}{i}$.

Теорему доведено.

3. Обернені теореми наближення. Для векторів $x_0 \in \mathcal{D}(A^\sigma)$, $\sigma > 0$, в попередньому пункті отримано оцінку (7) прямування до нуля інтегрального відхилу наближення. Виникає питання: чи ця оцінка є найкращою? Теорема 2 показує, що на всій множині $\mathcal{D}(A^\sigma)$ її покращити не можна. В цьому пункті доведемо обернену теорему, тобто за умови дещо сильнішої за (7) оцінки, наприклад умови

$$z_N^2 < \frac{c}{N^{2\sigma+1}\ln^{1+\varepsilon} N},$$

обов'язково буде виконано вкладення

$$x_0 \in \mathcal{D}(A^\sigma).$$

Розглянемо послідовність дійсних чисел $\{c_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ таку, що:

1) $c_N > 0$;

2) c_N монотонно зростають (не спадають);

3) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c_{2^k}} < \infty$.

Як приклад, такою послідовністю може бути $c_N = c\ln^{1+\varepsilon} N$, $c_N = \ln N(\ln\ln N)^{1+\varepsilon}$ тощо. Справедливою є така теорема.

Теорема 3. *Нехай для деякого* $x_0 \in \mathfrak{H}$, *послідовності* $\{c_N\}_{N\in\mathbb{N}}$, *що задовольняє умови* 1 – 3, *та деякого* $\sigma > 0$ *виконується*

$$z_N^2 < \frac{1}{c_N}\frac{1}{N^{2\sigma+1}}.$$

Тоді $x_0 \in \mathcal{D}(A^\sigma)$.

Доведення. Для того щоб довести теорему, досить побудувати таку послідовність функцій $\varphi_n(\lambda)$, що:

$\varphi_n(\lambda)$ монотонно зростають при $n \to \infty$;

$\int_0^\infty \varphi_n(\lambda)\, d(E_\lambda x_0, x_0) \le C \quad \forall N \in \mathbb{N}$;

$\exists c' : c'\lambda^{2\sigma} \le \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\lambda)$.

Після цього, використовуючи лему Фату, пересвідчуємося, що функція

$$\varphi(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\lambda)$$

є інтегровною, за теоремою Лебега інтегровною відносно міри $d(E_\lambda x_0, x_0)$ є також функція $c_1\lambda^{2\sigma}$, а інтегровність останньої еквівалентна належності x_0 до $\mathcal{D}(A^\sigma)$.

Покажемо як будується шукана послідовність $\varphi_n(\lambda)$. Розглянемо $z_N^2 N^{2\sigma+1}$. За умовою теореми

$$z_N^2 N^{2\sigma+1} \le \frac{1}{c_N}. \tag{12}$$

Як і при доведенні теореми 1, маємо спектральне зображення

$$z_N^2 N^{2\sigma+1} = \int_0^\infty N^{2\sigma+1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2N+2}\frac{1}{2\lambda+1}\,d(E_\lambda x_0, x_0).$$

Позначимо через $\psi_n(\lambda)$ підінтегральний вираз і розглянемо послідовність функцій

$$\varphi_n(\lambda) = \max\{\psi_k(\lambda)\}_{k=1}^n.$$

Очевидно, що $\varphi_n(\lambda)$ монотонно зростають при $n\to\infty$. Доведемо, що

$$\exists C > 0 \quad \forall N\in\mathbb{N}: \int_0^\infty \varphi_n(\lambda)d(E_\lambda x_0, x_0) \le C.$$

Для цього зауважимо, що

$$\varphi_n(\lambda) < 2^{2\sigma+1}\left(\sum_{k=0}^{[\log_2 n]}\psi_{2^k}(\lambda)\right). \tag{13}$$

Справді, для будь-якого $k\le n$ позначимо через $r = [\log_2 k]$ найбільше ціле число таке, що $2^r \le k$. Тоді матимемо

$$\frac{\psi_k(\lambda)}{\psi_{2^r}(\lambda)} \le \left(\frac{k}{2^r}\right)^{2\sigma+1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2k-2\cdot 2^r} < 2^{2\sigma+1},$$

оскільки за означенням $k<2\cdot 2^r$. Відповідно, кожне з $\psi_k(\lambda)$, $2^r\le k<2^{r+1}$, не перевищує $2^{2\sigma+1}\psi_{2^r}(\lambda)$, що доводить (13). З (12) та (13) знаходимо

$$\int_0^\infty \varphi_n(\lambda)d(E_\lambda x_0, x_0) < 2^{2\sigma+1}\sum_{k=0}^{[\log_2 n]}\int_0^\infty \psi_{2^k}(\lambda)d(E_\lambda x_0, x_0) \le 2^{2\sigma+1}\sum_{k=0}^{[\log_2 n]}\frac{1}{c_{2^k}} < C$$

завдяки третій умові на послідовність c_k. Перші дві умови на послідовність φ_n виконано. Доведемо, що виконується й третя, тобто існує стала $\tilde c>0$ така, що

$$\tilde c\lambda^{2\sigma} \le \varphi(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(\lambda), \qquad \lambda \ge \lambda_0 > 2$$

(досить вимагати, щоб умова виконувалася не для всіх $\lambda>0$, а лише для досить великих λ). Для цього розглянемо деяке λ', покладемо

$$n_0 = \left[\frac{2\sigma+1}{2}\lambda'\right]$$

та оцінимо $\psi_{n_0}(\lambda')$. Маємо

$$\psi_{n_0}(\lambda') \;=\; \left[\frac{2\sigma+1}{2}\,\lambda'\right]^{2\sigma+1}\left(\frac{\lambda'}{\lambda'+1}\right)^{2\left[\frac{2\sigma+1}{2}\lambda'\right]+2}\frac{1}{2\lambda'+1} \;\geq\; \frac{\sigma^{2\sigma+1}}{4e^{2\sigma+1}}\,\lambda'^{2\sigma},$$

а тому й

$$\varphi(\lambda) \;\geq\; \varphi_{n_0}(\lambda) \;\geq\; \psi_{n_0}(\lambda) \;\geq\; \frac{\sigma^{2\sigma+1}}{4e^{2\sigma+1}}\,\lambda'^{2\sigma},$$

що і потрібно було довести.

Виникає питання: а чи всі умови в теоремі 3 є суттєвими? Можливо, інший метод доведення дозволить довести обернену теорему з оцінкою, що з точністю до сталої збігається з (7)? Покажемо, що це не так. Для цього розглянемо послідовність $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, що задовольняє такі умови: 1 та 2, як у теоремі 3, та умови

3′) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{c_{2^i}} = \infty,$

4) $\exists C_0 > 0 \quad \forall i: \ \dfrac{c_{2^{i+1}}}{c_{2^i}} \leq C_0.$

Умови 1, 2, 3′, 4 задовольняють багато послідовностей, наприклад, $c_n =$ $=$ const, $c_n = \ln n$ або $c_n = \ln n \ln\ln n$.

Має місце така теорема.

Теорема 4. *Нехай послідовність* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *задовольняє умови* 1, 2, 3′ *та* 4. *Тоді існують самоспряжений оператор* A *та вектор* x_0 *такі, що* $x_0 \notin \mathcal{D}(A^{\sigma})$, *але*

$$z_N^2 \;\leq\; \frac{c}{c_N N^{2\sigma+1}}$$

для деякого $c > 0$.

Доведення. Нехай $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормований базис у $\mathfrak{H}$. Оператор A виберемо такий, як і в доведенні теореми 2. За початковий візьмемо вектор x_0, заданий рядом

$$x_0 \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{c_{2^i}}}\,\frac{1}{2^{\sigma i}}\,e_{2^i}.$$

Легко бачити, що $x_0 \in \mathfrak{H}$, але $x_0 \notin \mathcal{D}(A^{\sigma})$, оскільки ряд

$$A^{\sigma}x_0 \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{c_{2^i}}}\,e_{2^i}$$

є розбіжним у $\mathfrak{H}$ завдяки умові 3′ на послідовність $\{c_n\}$.

Як і при доведенні теореми 2, можемо записати

$$z_N^2 \;=\; \sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^i+1}\right)^{2N+2}\frac{1}{2^{i+1}+1}\,\frac{1}{2^{2i\sigma}}\,\frac{1}{c_{2^i}}. \tag{14}$$

Нехай $\sigma\cdot 2^{n_0} \leq N < \sigma\cdot 2^{n_0+1}$. Оцінку суми (14) проведемо окремо для $i \geq n_0$ та $i < n_0$. При $i = n \geq n_0$ $\left(1-\dfrac{1}{2^n+1}\right)^{2N+2} < 1$, отже,

$$\left(\frac{2^n}{2^n+1}\right)^{2N+2}\frac{1}{2^{n+1}+1}\frac{1}{2^{2n\sigma}} < \frac{1}{2^{n-n_0}}\frac{\sigma}{N}\frac{1}{2^{2\sigma(n-n_0)}}\frac{(2\sigma)^{2\sigma}}{N^{2\sigma}} =$$

$$= \frac{1}{2^{(2\sigma+1)(n-n_0)}}\frac{2^{2\sigma}\sigma^{2\sigma+1}}{N^{2\sigma+1}}.$$

Враховуючи монотонність послідовності $\{c_n\}$, знаходимо

$$\sum_{i=n_0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^i+1}\right)^{2N+2}\frac{1}{2^{i+1}+1}\frac{1}{2^{2i\sigma}}\frac{1}{c_{2^i}} <$$

$$< \frac{1}{c_{2^{n_0}}}\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{(2^{2\sigma+1})^{n-n_0}}\frac{2^{2\sigma}\sigma^{2\sigma+1}}{N^{2\sigma+1}} \le \frac{\tilde{c}}{c_{2^{n_0}}}\frac{1}{N^{2\sigma+1}}, \qquad \tilde{c} = \frac{2^{2\sigma}\sigma^{2\sigma+1}}{2^{2\sigma+1}-1}. \tag{15}$$

Залишилось оцінити суму доданків з $i<n_0$. Використаємо оцінки

$$\frac{1}{c_{2^i}} = \frac{1}{c_{2^{n_0}}}\frac{c_{2^{n_0}}}{c_{2^{n_0-1}}}\cdots\frac{c_{2^{i+1}}}{c_{2^i}} \le \frac{C_0^{n_0-i}}{c_{2^{n_0}}} \tag{16}$$

згідно з властивістю 4 послідовності $\{c_n\}$.

Для першого множника використаємо оцінку

$$\left(1-\frac{1}{2^i+1}\right)^{2N+2} < \left(1-\frac{1}{2^i+1}\right)^{2^{n_0-i}\sigma(2^i+1)} < (e^{-\sigma})^{2^{n_0-i}}. \tag{17}$$

Остання необхідна оцінка є такою:

$$\frac{1}{2^{i+1}+1}\frac{1}{2^{2i\sigma}} = \frac{\sigma 2^{n_0-i}}{\sigma 2^{n_0+1}+\sigma 2^{n_0-i}}\frac{(2\sigma)^{2\sigma}2^{(n_0-i)2\sigma}}{\sigma^{2\sigma}2^{(n_0+1)2\sigma}} < \frac{2^{2\sigma}\sigma^{2\sigma+1}2^{(n_0-i)(2\sigma+1)}}{N^{2\sigma+1}}. \tag{18}$$

Поєднуючи (16) – (18), приходимо до оцінки

$$\sum_{i=1}^{n_0-1}\left(\frac{2^i}{2^i+1}\right)^{2N+2}\frac{1}{2^{i+1}+1}\frac{1}{2^{2i\sigma}}\frac{1}{c_{2^i}} < \frac{2^{2\sigma}\sigma^{2\sigma+1}}{c_{2^{n_0}}N^{2\sigma+1}}\sum_{i=1}^{n_0-1}(e^{-\sigma})^{2^i}C_0^i(2^{2\sigma+1})^i. \tag{19}$$

Завдяки збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-\sigma})^{2^n}C_0^n(2^{2\sigma+1})^n$, з (15) та (19) отримуємо

$$\exists\,\tilde{C} > 0: \ z_N^2 \le \frac{\tilde{C}}{c_{2^{n_0}}N^{2\sigma+1}} \le \frac{\tilde{C}C_0}{c_{2^{n_0+1}}N^{2\sigma+1}} \le \frac{\tilde{C}C_0}{c_N N^{2\sigma+1}},$$

де в останніх двох нерівностях використано властивості 2, 4 послідовності $\{c_n\}$. Остання величина і є шуканою.

Теорему доведено.

4. Прямі та обернені теореми наближення в класах нескінченно диференційовних векторів оператора *A*. Перейдемо до розгляду випадку нескінченної гладкості початкового вектора x_0,

$$x_0 \in C^\infty(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}(A^n).$$

Як показано в [10], якщо A — замкнений щільно визначений оператор, що має принаймні одну регулярну точку, то $\overline{C^\infty(A)} = \mathfrak{H}$. Відповідно, у випадку, що розглядається в даній статті, множина векторів нескінченної гладкості є щільною, а задача наближення — змістовною.

Теореми 1 та 3 дозволяють отримати наступну характеризацію векторів з $C^{\infty}(A)$ у термінах швидкості прямування до нуля інтегрального відхилу.

Твердження. *Вектор* $x_0 \in C^{\infty}(A)$ *тоді і лише тоді, коли*

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad \lim_{N \to \infty} z_N^2 N^{2k+1} = 0.$$

Для отримання конкретних прямих та обернених теорем для нескінченно гладких початкових векторів виділимо вужчі підкласи в $C^{\infty}(A)$. Дотримуючись [10], для $\beta \geq 0$ позначимо

$$C_{\alpha}\langle n^{n\beta}\rangle(A) = \{x \in C^{\infty}(A) \,|\, \exists c > 0: \|A^n\| \leq c\alpha^n n^{n\beta}\}.$$

У подальшому в позначенні будемо нехтувати оператором і писати просто $C_{\alpha}\langle n^{n\beta}\rangle$. $C_{\alpha}\langle n^{n\beta}\rangle$ — банаховий простір відносно норми

$$\|x\|_{C_{\alpha}\langle n^{n\beta}\rangle} = \sup_n \frac{\|A^n x\|}{\alpha^n n^{n\beta}}.$$

Відповідно, розглядаються

$$C_{\{n^{n\beta}\}} = \bigcup_{\alpha > 0} C_{\alpha}\langle n^{n\beta}\rangle = \lim_{\alpha \to \infty} \operatorname{ind} C_{\alpha}\langle n^{n\beta}\rangle$$

та

$$C_{(n^{n\beta})} = \bigcap_{\alpha > 0} C_{\alpha}\langle n^{n\beta}\rangle = \lim_{\alpha \to \infty} \operatorname{proj} C_{\alpha}\langle n^{n\beta}\rangle$$

— індуктивна та проективна границі банахових просторів.

У конкретних випадках, наприклад для простору $C([a, b])$ або $L_2([a, b])$, A — оператора диференціювання, множини $C_{\{n^{n\beta}\}}$ та $C_{(n^{n\beta})}$ ретельно вивчено у багатьох працях. Наприклад, $C_{\{n^n\}}\left(\frac{d}{dx}\right)$ та $C_{(n^n)}\left(\frac{d}{dx}\right)$ — простори відповідно аналітичних і цілих функцій, $C_{\{1\}}\left(\frac{d}{dx}\right)$ — простір цілих функцій експоненціального типу, $C_{\{n^{n\beta}\}}\left(\frac{d}{dx}\right)$ та $C_{(n^{n\beta})}\left(\frac{d}{dx}\right)$, $\beta > 1$, — класи Жевре типу Рум'є і Бьорлінга застосовуються при дослідженні багатьох важливих задач.

Спочатку розглянемо випадок $\beta = 0$. У такому випадку простір $\operatorname{Exp}_A \mathfrak{H} :=$ $:= C_{\{1\}}(A)$ називається простором цілих векторів експоненціального типу[3]. Як випливає з результатів роботи [11], для самоспряженого оператора цей простір є щільним у $\mathfrak{H}$. Крім того, в [12] наведено характеризацію просторів $C_{\alpha}\langle 1\rangle$: для довільного $\alpha > 0$

$$C_{\alpha}\langle 1\rangle(A) = E([0, \alpha])\mathfrak{H}, \tag{20}$$

де $E(\Delta)$ — спектральна міра оператора A.

Має місце наступна теорема.

Теорема 5. *Вектор* $x_0 \in C_{\alpha}\langle 1\rangle$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$z_N^2 \leq c(x_0, \gamma)e^{-2\gamma N}, \qquad N \geq \frac{\alpha}{2}, \tag{21}$$

де $\gamma = \ln((1+\alpha)/\alpha)$.

[3] При $\beta = 0$ простір $C_{(1)}(A) = \operatorname{Ker} A$ є тривіальним і тому не розглядається.

Зауважимо, що у статті [6] теорему 5 отримано у частковому випадку $\alpha = 1/\sqrt{2}$, а зворотну частину, крім фіксованого α, ще й за умови дискретності спектра оператора A та зв'язку найменшого власного значення з α.

Доведення. Нехай $x_0 \in C_\alpha\langle 1\rangle$. Тоді формулу (8) з огляду на умову (20) зводимо до такої (скрізь у подальшому у (8) покладемо $\sigma = 0$):

$$z_N^2 = \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2N+2} \frac{1}{2\lambda+1}\, d(E_\lambda x_0, x_0) =$$

$$= \int_0^\alpha \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2N+2} \frac{1}{2\lambda+1}\, d(E_\lambda x_0, x_0). \tag{22}$$

Позначимо через $\varphi(\lambda)$ підінтегральний вираз. Знайдемо максимум величини $\varphi(\lambda)$ на проміжку $[0, \alpha]$. В доведенні теореми 1 показано, що функція $\varphi(\lambda)$ монотонно зростає до $\lambda_{\max}$, де $\lambda_{\max}$ задовольняє оцінки

$$2N+1 < \lambda_{\max} < 2N+2.$$

Отже, при $N \geq \alpha/2$ максимум функції $\varphi(\lambda)$ на відрізку $[0, \alpha]$ досягається при $\lambda = \alpha$, і можемо записати

$$\varphi(\lambda) \leq \varphi(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{2N+2} \frac{1}{2\alpha+1} = \frac{e^{-(2N+2)\gamma}}{2\alpha+1} = ce^{-2N\gamma}, \tag{23}$$

де $\gamma = \ln\dfrac{1+\alpha}{\alpha}$, а $c = \dfrac{e^{-2\gamma}}{2\alpha+1}$.

З (22) та (23) отримуємо шукане

$$z_N^2 \leq ce^{-2N\gamma} \int_0^\alpha d(E_\lambda x_0, x_0) = c\|x_0\|^2 e^{-2N\gamma}.$$

Нехай тепер для x_0 виконано оцінку (21). Доведемо, що $x_0 \in C_\alpha\langle 1\rangle$. Припустимо, що на деякому проміжку $(l, l+\varepsilon)$

$$\int_l^{l+\varepsilon} d(E_\lambda x_0, x_0) = M > 0. \tag{24}$$

Виходячи з (8), записуємо оцінку

$$z_N^2 \geq \int_l^{l+\varepsilon} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2N+2} \frac{1}{2\lambda+1}\, d(E_\lambda x_0, x_0). \tag{25}$$

При $N > (l+\varepsilon)/2$ внаслідок монотонного зростання $\varphi(\lambda)$ на $(0, 2N)$ маємо оцінку

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2N+2} \frac{1}{2\lambda+1} \geq \left(\frac{l}{l+1}\right)^{2N+2} \frac{1}{2l+1} = \frac{e^{-2\gamma_l} e^{-2N\gamma_l}}{2l+1},$$

де $\gamma_l = \ln\dfrac{l+1}{l}$. З (24), (25) та останньої оцінки знаходимо

$$z_N^2 \geq \frac{Me^{-2\gamma_l}}{2l+1} e^{-2N\gamma_l}. \tag{26}$$

Оскільки, за припущенням, для всіх N виконано (21), то, порівнюючи (21) з (26), приходимо до висновку, що

$$-\gamma_l \le -\gamma \quad \Leftrightarrow \quad l \le \alpha. \tag{27}$$

Завдяки вибору ε як довільного додатного з (27) випливає, що $x_0 \in E\big([0,\alpha]\big)\mathfrak{H}$, тобто (за критерієм (20)) $x_0 \in C_\alpha\langle 1\rangle$.

Теорему доведено.

При $\alpha > 0$ вираз $\ln\dfrac{1+\alpha}{\alpha}$ набуває всіх можливих значень від 0 до $+\infty$, тому з теореми 5 випливає такий наслідок.

Наслідок. *Наближення $x_N(t)$ має експоненціальну швидкість збіжності у середньому до $x(t)$ тоді і лише тоді, коли x_0 є цілим вектором експоненціального типу оператора A.*

Перейдемо тепер до просторів $C_{\{n^{n\beta}\}}$ та $C_{(n^{n\beta})}$, $\beta > 0$. Для цього використаємо характеризацію належності вектора до простору $C_\alpha\langle n^{n\beta}\rangle$ у термінах збіжності спектральних інтегралів. Наведемо необхідні відомості, використовуючи результати з [10]. При $\beta > 0$ послідовність $\{n^{n\beta}\}_{n\in\mathbb{N}}$ має властивість

$$\forall\alpha > 0 \quad \exists c = c(\alpha) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}:\ n^{n\beta} \ge c\alpha^n. \tag{28}$$

Умова (28) забезпечує вкладення $\mathrm{Exp}_A \subset C_\alpha\langle n^{n\beta}\rangle$ при довільному $\alpha > 0$ і, відповідно, нетривіальність останніх просторів.

Розглянемо $\rho(\lambda) = \exp(\beta e^{-1}\lambda^{1/\beta})$. За функцією $\rho(\lambda)$ будується сім'я гільбертових просторів

$$\mathfrak{H}_t\langle\rho\rangle = \mathcal{D}\big(\rho(tA)\big), \qquad (f,g)_{\mathfrak{H}_t\langle\rho\rangle} = \big(\rho(tA)f, \rho(tA)g\big).$$

Як показано в роботі [10], норми у просторах $C_\alpha\langle n^{n\beta}\rangle$ та $\mathfrak{H}_t\langle\rho\rangle$ пов'язані між собою співвідношеннями

$$\forall t > 0 \quad \forall s > 1: \quad \|x\|^2_{\mathfrak{H}_t\langle\rho\rangle} \le m_0^2 c^2(s)\|x\|^2_{C_{(ts)^{-1}}\langle n^{n\beta}\rangle} \tag{29}$$

та

$$\|x\|^2_{C_t\langle n^{n\beta}\rangle} \le m_0^{-2}\|x\|^2_{\mathfrak{H}_{t^{-1}}\langle\rho\rangle}. \tag{30}$$

Наступна теорема дає характеризацію класів Жевре типу Рум'є $G_{\{\beta\}}(A)$ та типу Бьорлінга $G_{(\beta)}(A)$, $\beta > 0$:

Теорема 6. *Вектор $x_0 \in G_{\{\beta\}}(A)$ тоді і лише тоді, коли*

$$\exists c > 0 \quad \exists c' > 0: \quad z_N^2 \le c'\exp(-2cN^{1/(\beta+1)});$$

$x_0 \in G_{(\beta)}(A)$ тоді і лише тоді, коли

$$\forall c > 0 \quad \exists c'' > 0: \ z_N^2 \le c''\exp(-2cN^{1/(\beta+1)}).$$

Для доведення теореми 6 сформулюємо і доведемо дві леми.

Лема 1. *Нехай $x_0 \in C_\alpha\langle n^{n\beta}\rangle$. Тоді*

$$\forall t > \alpha \quad \exists c > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall N > N_0: \quad z_N^2 \le c\exp(-2c_t N^{1/(\beta+1)}),$$

де $c_t = t^{-1/(\beta+1)}e^{-\beta/(\beta+1)}(1+\beta)$.

Доведення. Нехай $x_0 \in C_\alpha\langle n^{n\beta}\rangle$. Виберемо $s = \dfrac{t+\alpha}{2}$, тоді $\alpha < s < t$. Як випливає з (29),

$$\int\limits_0^\infty \rho^2(s^{-1}\lambda)\, d(E_\lambda x_0, x_0) < \infty,$$

де $\rho(\lambda) = \exp(\beta e^{-1}\lambda^{1/\beta})$. Звідси робимо висновок, що визначений елемент $y_0 = \rho(s^{-1}A)x_0 \in \mathfrak{H}$. Отже, як і при доведенні співвідношення (8), можемо записати

$$z_N^2 = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2N+2} \frac{1}{2\lambda+1}\, \frac{1}{\rho^2(s^{-1}\lambda)}\, d(E_\lambda y_0, y_0). \tag{31}$$

Позначимо через $\psi(\lambda)$ підінтегральний вираз і знайдемо його максимум по λ. Рівняння $\psi'(\lambda) = 0$ зводиться до рівняння

$$e^{-1}(s^{-1}\lambda)^{1/\beta} = \frac{s^{-1}\lambda\rho'(s^{-1}\lambda)}{\rho(s^{-1}\lambda)} = \frac{N+1}{\lambda+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\lambda+1} - \frac{1}{2}. \tag{32}$$

Для дослідження рівняння (32) скористаємося тим, що у лівій частині міститься монотонно зростаюча функція, водночас права частина містить суму, яка монотонно спадає при $\lambda \to +\infty$. Приходимо до висновку, що рівняння (32) має єдиний корінь $\lambda_{\max}$. Оцінимо проміжок $[\lambda_1, \lambda_2]$, якому належить $\lambda_{\max}$.

Розглянемо

$$\lambda_1 := (N - 1/2N^{\beta\gamma}e^{\beta\gamma}s^\gamma - N^\gamma e^{-\beta\gamma}s^{-\gamma})^{\beta\gamma}e^{\beta\gamma}s^\gamma, \tag{33}$$

$$\lambda_2 := N^{\beta\gamma}e^{\beta\gamma}s^\gamma, \tag{34}$$

де $\gamma = \dfrac{1}{\beta+1}$. При цьому $\beta\gamma = \dfrac{\beta}{\beta+1} < 1$. Підставляючи λ_1 у рівняння (32), знаходимо

$$\frac{N+1}{\lambda_1+1} - \frac{\lambda_1}{2\lambda_1+1} = \frac{N - 1/2N^{\beta\gamma}e^{\beta\gamma}s^\gamma}{\lambda_1+1} + \frac{1/2N^{\beta\gamma}e^{\beta\gamma}s^\gamma + 1}{\lambda_1+1} - \frac{\lambda_1}{2\lambda_1+1} >$$

$$> \frac{N - 1/2N^{\beta\gamma}e^{\beta\gamma}s^\gamma}{\lambda_1}(1 - N^{-\beta\gamma}e^{-\beta\gamma}s^{-\gamma}) >$$

$$> (N - 1/2N^{\beta\gamma}e^{\beta\gamma}s^\gamma - N^\gamma e^{-\beta\gamma}s^{-\gamma})^\gamma e^{-\beta\gamma}s^{-\gamma} = e^{-1}(s^{-1}\lambda_1)^{1/\beta}.$$

Для другої точки маємо

$$\frac{N+1}{\lambda_2+1} - \frac{\lambda_2}{2\lambda_2+1} = \frac{N}{\lambda_2} + \left(\frac{N+1}{\lambda_2+1} - \frac{N}{\lambda_2}\right) - \frac{\lambda_2}{2\lambda_2+1} =$$

$$= \frac{N}{N^{\beta\gamma}e^{\beta\gamma}s^\gamma} + \frac{\lambda_2 - N}{\lambda_2(\lambda_2+1)} - \frac{\lambda_2}{2\lambda_2+1} < N^\gamma e^{-\beta\gamma}s^{-\gamma} = e^{-1}(s^{-1}\lambda_2)^{1/\beta},$$

оскільки з (34) випливає, що при $N > e^\beta s$ виконується $N > \lambda_2$. Отже, $\lambda_{\max} \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

Підставляючи у вираз $\psi(\lambda)$ відповідно λ_1 та λ_2, знаходимо

$$\psi(\lambda) < \left(1 - \frac{1}{\lambda_2+1}\right)^{2N+2} \frac{1}{2\lambda_1+1}\exp(-2e^{-1}\beta(s^{-1}\lambda_1)^{1/\beta}). \tag{35}$$

Перший множник оцінюємо таким чином:

$$\left(1-\frac{1}{\lambda_2+1}\right)^{2N+2} < \exp\left(-\frac{2N+2}{\lambda_2+1}\right) <$$

$$< \exp\left(-\frac{2N}{\lambda_2}+\frac{2N}{\lambda_2^2}\right) < c_1\exp\left(-2(Nt^{-1})^{\gamma}e^{-\beta\gamma}\right),$$

оскільки $s<t$ і, відповідно, $s^{-1}>t^{-1}$. Аналогічно

$$\frac{1}{2\lambda_1+1}\exp\left(-2e^{-1}\beta(s^{-1}\lambda_1)^{1/\beta}\right) < c_2\exp\left(-2(Nt^{-1})^{\gamma}\beta e^{-\beta\gamma}\right),$$

а отже (враховуючи (31)),

$$z_N^2 < c_1c_2\|\rho(sA)x_0\|^2\exp\left(-2(Nt^{-1})^{1/(\beta+1)}e^{-\beta/(\beta+1)}(1+\beta)\right).$$

Лему доведено.

Лема 1 є прямою теоремою наближення. Доведемо тепер лему, яка є оберненою теоремою наближення.

Лема 2. *Нехай*

$$\exists c > 0,\ c_1 > 0: \quad z_N^2 \le \frac{c_1}{N^2}\exp(-2cN^{1/(\beta+1)}). \tag{36}$$

Тоді $x_0\in C_\alpha\langle n^{n\beta}\rangle$, *де* α *визначається виразом*

$$\alpha = e^{-\beta}(1+\beta)^{1+\beta}c^{-(1+\beta)}. \tag{37}$$

Доведення. Схема доведення аналогічна схемі доведення теореми 3. Побудуємо послідовність функцій $\varphi_n(\lambda)$ таку, що:

$\varphi_n(\lambda)$ монотонно зростають при $n\to\infty$;

$\int\limits_0^\infty \varphi_n(\lambda)\,d(E_\lambda x_0, x_0)\le C \quad \forall N\in\mathbb{N}$;

$\exists c'$: $c'\exp\left(2e^{-1}\beta(\alpha^{-1}\lambda)^{1/\beta}\right)\le \lim_{n\to\infty}\varphi_n(\lambda)$, де α задається виразом (37).

Після цього вкладення $x_0\in C_\alpha\langle n^{n\beta}\rangle$ випливає з (30). Покажемо, як побудувати шукану послідовність. Розглянемо $z_N^2N^{\beta/(\beta+1)}\exp(2cN^{1/(\beta+1)})$. За умовою теореми

$$z_N^2N^{\beta/(\beta+1)}\exp(2cN^{1/(\beta+1)}) \le \frac{c_1}{N^{(\beta+2)/(\beta+1)}}. \tag{38}$$

Як і при доведенні теореми 3, маємо спектральне зображення

$$z_N^2N^{\beta/(\beta+1)}\exp(2cN^{1/(\beta+1)}) =$$

$$= \int\limits_0^\infty\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)\frac{1}{2\lambda+1}N^{\beta/(\beta+1)}\exp(2cN^{1/(\beta+1)})\,d(E_\lambda x_0, x_0).$$

Позначимо через $\psi_n(\lambda)$ підінтегральний вираз і розглянемо послідовність функцій

$$\varphi_n(\lambda) = \max\{\psi_k(\lambda)\}_{k=1}^n.$$

Очевидно, що $\varphi_n(\lambda)$ монотонно зростають при $n\to\infty$. Обмеженість інтегралів

$$\int_0^\infty \varphi_n(\lambda)\, d(E_\lambda x_0, x_0) \;\le\; C, \qquad n \in \mathbb{N},$$

випливає з очевидної оцінки

$$\varphi_n(\lambda) \;=\; \max\{\psi_k(\lambda)\}_{k=1}^n \;\le\; \sum_{k=1}^n \psi_k(\lambda),$$

умови (38) та збіжності ряду $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{(2+\beta)/(1+\beta)}}$. Отже, перші дві умови для послідовності φ_n виконано. Доведемо й третю. З умови (37) знаходимо

$$c \;=\; \alpha^{-\gamma} e^{-\beta\gamma}(1+\beta), \qquad \gamma \;=\; \frac{1}{\beta+1}.$$

Розглянемо довільне $\lambda > 1$. Позначимо

$$N \;=\; [\lambda^{(\beta+1)/\beta} e^{-1} \alpha^{-1/\beta}] + 1,$$

де $[\cdot]$ позначає цілу частину числа. Тоді, використовуючи властивість цілої частини $[x] + 1 > x$, отримуємо

$$\exp(2cN^{1/(\beta+1)}) \;=\; \exp\big(2(N\alpha^{-1})^{\gamma} e^{-\beta\gamma}(1+\beta)\big) \;>$$

$$>\; \exp\big(2(\lambda\alpha^{-1})^{1/\beta} e^{-1}(1+\beta)\big), \tag{39}$$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{2N+2} \;=\; \exp\left(-\ln\frac{\lambda+1}{\lambda}(2N+2)\right).$$

Використовуючи нерівності $\ln(1+1/\lambda) < 1/\lambda$ при $\lambda > 1$ та $[x] \le x$, з останнього виразу одержуємо

$$\exp\left(-\ln\frac{\lambda+1}{\lambda}(2N+2)\right) \;\ge\; \exp\big(-2(\lambda\alpha^{-1})^{1/\beta} e^{-1}\big) \tag{40}$$

і останню оцінку

$$\frac{N^{\beta/(\beta+1)}}{2\lambda+1} \;>\; \frac{(\lambda^{(\beta+1)/\beta} e^{-1} \alpha^{-1/\beta})^{\beta/(\beta+1)}}{2\lambda+1} \;>\; \tilde{c} \;>\; 0. \tag{41}$$

Враховуючи (39) – (41), приходимо до висновку, що

$$\varphi(\lambda) \;=\; \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\lambda) \;\ge\; \varphi_N(\lambda) \;\ge\; \psi_N(\lambda) \;>\; \tilde{c}\exp\big(2e^{-1}\beta(\lambda\alpha^{-1})^{1/\beta}\big),$$

а це й гарантує вкладення $x_0 \in C_\alpha\langle n^{n\beta}\rangle$.

Лему доведено.

***Доведення теореми* 6.** При $t \in (0, \infty)$ вираз $c_t = t^{-1/(\beta+1)} e^{-\beta/(\beta+1)}(1+\beta)$ набуває всіх можливих значень з $(0, \infty)$. Так само й $\alpha = e^{-\beta}(1+\beta)^{1+\beta} c^{-(1+\beta)}$ набуває всіх додатних дійсних значень при $c \in (0, \infty)$.

Крім того, неважко помітити, що з нерівності

$$z_N^2 \;\le\; c_1 \exp(-2cN^{1/(\beta+1)})$$

випливає

$$\forall\, c' > c, \;\; \exists\, c_1' > 0: \quad z_N^2 \;\le\; \frac{c_1'}{N^2}\exp(-2c'N^{1/(\beta+1)}),$$

а тому теорема 6 випливає з лем 1 та 2.

1. *Горбачук М. Л., Городецкий В. В.* О полиномиальном приближении решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 4. – С. 500 – 502.
2. *Кашпіровський О. І., Митник Ю. В.* Апроксимація розв'язків операторно-диференціальних рівнянь за допомогою операторних поліномів // Там же. – 1998. – **50**, № 11. – С. 1506 – 1516.
3. *Arov D. Z., Gavrilyuk I. P.* A method for solving initial value problems for linear differential equations in Hilbert space based on the Cayley transform // Numer. Func. Anal. and Optim. – 1993. – **14**, № 5, 6. – P. 456 – 473.
4. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* The Cayley transform and the solution of an initial value problem for a first order differential equation with an unbounded operator coefficient in Hilbert space // Ibid. – 1994. – **15**, № 5, 6. – P. 583 – 598.
5. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Representation and approximation of the solution of an initial value problem for a first order differential equation in Banach space // J. Anal. and Appl. (ZAA). – 1996. – **15**, № 2. – P. 495 – 527.
6. *Макаров В. Л., Василик В. Б., Рябичев В. Л.* Неулучшаемые по порядку оценки скорости сходимости метода преобразования Кэли для приближения операторной экспоненты // Кибернетика и систем. анализ. – 2002. – № 4. – С. 180 – 185.
7. *Гаврилюк И. П., Макаров В. Л.* Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2004. – 500 с.
8. *Gorbachuk M. L., Gorbachuk V. I.* Boundary-value problems for operator-differential equations. – Dordrecht: Kluwer, 1991. – 364 p.
9. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
10. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, вып. 3. – С. 55 – 90.
11. *Радыно Я. В.* Пространства векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. – 1983. – **27**, № 9. – С. 215 – 229.
12. *Горбачук М. Л.* Про аналітичні розв'язки диференціально-операторних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 5. – С. 596 – 607.

Одержано 16.03.2007