УДК 917.956.226

Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИЛЬНО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ*

We prove the existence and uniqueness of a classical solution of the elliptic singular boundary-value problem in angular domain. We construct the corresponding Green function and derive coercive estimates of the solution in the weighted Hölder classes.

Доведено існування та єдиність класичного розв'язку еліптичної сингулярної граничної задачі в кутовій області. Побудовано відповідну функцію Гріна та отримано коерцитивні оцінки розв'язку у вагових класах Гельдера.

Изучается сингулярная краевая задача, в которой особенности появляются за счет вырождения эллиптического уравнения по независимым переменным на границе области и за счет нерегулярности границы области, в которой рассматривается задача. Изучению граничных задач для вырождающихся уравнений в гладких областях, а также граничных задач для равномерно эллиптических уравнений в областях с нерегулярной границей посвящено большое количество работ (см., например, [1 – 7]). К настоящему времени нет достаточно общей теории, в которой бы одновременно рассматривались сингулярности обоих видов. Авторам известны лишь несколько работ, посвященных этим вопросам. Среди них отметим работу [7], в которой рассматривается слабое решение задачи, возникающей в теории упругости, в весовых классах Соболева. Рассматриваемая в данной работе задача возникает в теории нелинейной фильтрации. Результатом исследования являются коэрцитивные оценки для классического решения задачи в весовых классах Гельдера. Отметим, что, насколько известно авторам, до настоящего времени нет результатов о разрешимости или коэрцитивных оценках решений подобных задач в классах гладких функций.

1. Постановка задачи и основной результат. На плоскости (ξ_1, ξ_2) введем полярные координаты (r, φ). Пусть $D = \{(r, \varphi) : r > 0,\ 0 < \varphi < \theta\}$, где θ — фиксированная величина, $0 < \theta < \pi$. В области D рассматривается граничная задача

$$Mu \equiv r^{\gamma}\varphi\Delta u + br^{\gamma-1}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial \xi_2}\cos\varphi\right) = g(\xi), \quad \xi \in D, \tag{1.1}$$

$$u\big|_{\varphi=\theta} = 0, \qquad \lim_{\xi_2 \to 0} \xi_2 \Delta u = 0,$$

где Δ — оператор Лапласа, γ, b — положительные постоянные, $\gamma < 2$, $g(\xi)$ — заданная функция.

Задача (1.1) является краевой задачей для сильно вырождающегося эллиптического уравнения в области с угловой точкой. Кроме того, наш интерес к изучению этой задачи в классах гладких функций определяется применением полученных результатов к теории краевых задач для уравнения нелинейной фильтрации.

Рассмотрим начально-краевую задачу со свободной границей для уравнения

---

* Частично поддержана грантом INTAS 03-51-5007.

нелинейной фильтрации, записанного в терминах функции давления $p(\xi, t)$ (см. [8]) в области $D(t)$, $\partial D(t) = \{\varphi = \theta\} \bigcup \Gamma(t)$, $D(0) = D$, $\Gamma(0) = \{\varphi = 0\}$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - mp\Delta p - \frac{m}{m-1}|\nabla p|^2 = 0, \qquad \xi \in D(t),$$

$$p(\xi, t)|_{\varphi=\theta} = 0, \qquad p(\xi, t)|_{\Gamma(t)} = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{m}{m-1}|\nabla p|^2 = 0, \qquad \xi \in \Gamma(t) \qquad (\Rightarrow \quad p\Delta p \to 0, \quad \xi \to \Gamma(t)),$$

$$p(\xi, 0) = p_0(\xi),$$

где $m > 1$, $\Gamma(t)$ — свободная (неизвестная) граница. После сведения задачи (1.2) к задаче в фиксированной области, в качестве которой выбрана $D_T = D \times \times (0, T)$, и линеаризации задачи на начальной функции вида $p_0(\xi) = r^\gamma \times \times \sin(\pi\phi/\theta)$ приходим к изучению модельной задачи для уравнения $-u_t + Mu = = g(\xi, t)$. Задача (1.1) — стационарный вариант указанной задачи.

Заменой переменных $x = \varphi$, $y = -\ln r$ задача (1.1) преобразуется к задаче в бесконечной полосе:

$$Lu \equiv x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + b\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y) \equiv g(x, y)e^{-\kappa y}, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u|_{x=\theta} = 0, \qquad \lim_{x \to 0} x\Delta u = 0, \quad \kappa = 2 - \gamma, \tag{1.3}$$

$$\Omega = \{(x, y) \colon x \in (0, \theta), \ y \in (-\infty, \infty)\}.$$

Введем банахово пространство $H^{2+\alpha}_{\gamma, D}$ такое, что для $u(\xi) \in H^{2+\alpha}_{\gamma, D}$ конечна норма

$$\|u\|^{(2+\alpha)}_{\gamma, D} = \left|r^{\gamma-2}u\right|_{0,D} + \sum_{i=1}^{2}\left|r^{\gamma-1}D_i u\right|_{0,D} + \sum_{i,j=1}^{2}\left|r^{\gamma}\varphi D_i D_j u\right|_{0,D} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2}\sup_{\xi, \bar{\xi} \in \bar{D}} r^{\gamma-1+\alpha}\frac{\left|D_i u(\xi) - D_i u(\bar{\xi})\right|}{\left|\xi - \bar{\xi}\right|^\alpha} + \sum_{i,j=1}^{2}\sup_{\xi, \bar{\xi} \in \bar{D}} r^{\gamma+\alpha}\varphi\frac{\left|D_i D_j u(\xi) - D_i D_j u(\bar{\xi})\right|}{\left|\xi - \bar{\xi}\right|^\alpha},$$

где $|v(\xi)|_{0,D} = \sup_{\xi \in \bar{D}}|v(\xi)|$, r и φ в этом определении выбираются как минимальные из значений, соответствующих $\xi(r, \phi)$ и $\bar{\xi}(\bar{r}, \bar{\phi})$.

Пусть $H^\alpha_{\alpha, D}$ — весовое пространство Гельдера с нормой

$$|u|^{(\alpha)}_{\alpha, D} = |u|_{0,D} + \sup_{\xi, \bar{\xi} \in \bar{D}} r^\alpha\frac{\left|u(\xi) - u(\bar{\xi})\right|}{\left|\xi - \bar{\xi}\right|^\alpha}$$

и $H^\alpha_D = H^\alpha_{0,D}$ — обычное пространство Гельдера. В задаче (1.3) будем использовать весовое пространство $E^{2+\alpha}_\Omega$ с нормой

$$|||u|||^{(2+\alpha)}_\Omega = |u|_{0,\Omega} + \sum_{i=1}^{2}|D_i u|_{0,D} + \sum_{i,j=1}^{2}\left|xD_i D_j u\right|_{0,D} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2}\langle D_i u\rangle^{(\alpha)}_\Omega + \sum_{i,j=1}^{2}\sup_{(x,y),(\bar{x},\bar{y}) \in \bar{\Omega}}\tilde{x}\frac{\left|D_i D_j u(x, y) - D_i D_j u(\bar{x}, \bar{y})\right|}{|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})|^\alpha},$$

где $\langle v\rangle^{(\alpha)}_\Omega$ — константа Гельдера функции $v(x, y)$, $|(x, y) - (\bar{x}, \bar{y})|$ — расстояние между двумя точками в Ω, $\tilde{x} = \min\{x, \bar{x}\}$.

Теорема 1.1. *Пусть в задаче* (1.1) $g(\xi)\in H^{\alpha}_{\alpha,D}$, $\alpha\in(0,1)$, $\theta<b/2\kappa$, $\kappa = 2-\gamma>0$, $|g(\xi)|\le B_1(1+|\xi|)^{-B_2}$, $B_1>0$, $B_2>\kappa$. *Тогда существует единственное решение* $u(x,y)$ *задачи* (1.1) *и для функции* $u(x,y)$ *выполняется неравенство*

$$\|u\|^{(2+\alpha)}_{\gamma,D} \le C|g|^{(\alpha)}_{\alpha,D}. \tag{1.4}$$

При доказательстве теоремы 1.1 будет использована следующая теорема.

Теорема 1.2. *Пусть* $f(x,y)\in H^{\alpha}_{\Omega}$. *Существует единственное ограниченное решение* $u(x,y)$ *задачи* (1.3). *Для функции* $u(x,y)$ *выполняется неравенство*

$$|\|u\||^{(2+\alpha)}_{\Omega} \le C|f|^{(\alpha)}_{\Omega}. \tag{1.5}$$

Постоянные в неравенствах (1.4) и (1.5) не зависят от u.

2. Доказательство теоремы 1.2. ***2.1. Функция Грина задачи* (1.3).** Пусть функция $f(x,y)$ в задаче (1.3) достаточно быстро убывает к нулю при $|y|\to\infty$. Выполним в задаче (1.3) преобразование Фурье по y, обозначая Фурье-образы функций u и f через $\tilde u(x,\lambda)$ и $\tilde f(x,\lambda)$ соответственно, например,

$$\tilde u(x,\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y)e^{-i\lambda y}dy.$$

Тогда задача (1.3) преобразуется к виду

$$x\tilde u_{xx} - x\lambda^2\tilde u + b\tilde u_x = \tilde f, \qquad x\in(0,\theta), \tag{2.1}$$
$$\tilde u|_{x=\theta} = 0, \qquad x\tilde u_{xx} \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Однородное уравнение в (2.1) имеет два линейно независимых решения [9] (8.491(6)):

$$r_1(x,\lambda) = x^{q/2}I_{-q/2}(|\lambda|x),$$
$$r_2(x,\lambda) = x^{q/2}K_{-q/2}(|\lambda|x),$$

где $I_{-q/2}$ и $K_{-q/2}$, $q=1-b$, — функции Бесселя. Определим функцию

$$R(x,\lambda) = r_1(x,\lambda) - M(\lambda)r_2(x,\lambda),$$

где $M(\lambda) = \left.\dfrac{r_1(x,\lambda)}{r_2(x,\lambda)}\right|_{x=\theta}$, так что $R(x,\lambda)=0$ при $x=\theta$. Заметим также, что $\lim\limits_{x\to 0} x r_{1xx} = 0$.

Решения $r_1(x,\lambda)$ и $R(x,\lambda)$ позволяют стандартным способом построить функцию Грина задачи (2.1) в виде

$$S(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} A_1(\xi,\lambda)r_1(x,\lambda), & x<\xi,\\ A_2(\xi,\lambda)R(x,\lambda), & x>\xi,\end{cases}$$

где A_1 и A_2 удовлетворяют условиям (при $x=\xi$):

$$A_2R(\xi,\lambda) - A_1r_1(\xi,\lambda) = 0,$$
$$A_2R'_x(\xi,\lambda) - A_1r'_{1x}(\xi,\lambda) = \frac{1}{\xi}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$S(x,\xi,\lambda) = S_1(x,\xi,\lambda) + S_2(x,\xi,\lambda), \tag{2.2}$$

где

$$S_1(x,\xi,\lambda) = -x^{q/2}\xi^{-q/2} I_{-q/2}(|\lambda|x) I_{-q/2}(|\lambda|\xi)\frac{K_{-q/2}(|\lambda|\theta)}{I_{-q/2}(|\lambda|\theta)},$$

$$S_2(x,\xi,\lambda) = x^{q/2}\xi^{-q/2}\begin{cases} I_{-q/2}(|\lambda|x)K_{-q/2}(|\lambda|\xi), & x<\xi,\\ I_{-q/2}(|\lambda|\xi)K_{-q/2}(|\lambda|x), & x>\xi.\end{cases}$$

С помощью функции Грина решение задачи (2.1) можно представить в виде

$$\tilde{u}(x,\lambda) = \int_0^\theta S(x,\xi,\lambda)\tilde{f}(\xi,\lambda)\,d\xi.$$

Тогда после обратного преобразования Фурье получим решение задачи (1.3) в виде

$$u(x,y) = \int_0^\theta d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y-\eta) f(\xi,\eta)\,d\eta, \tag{2.3}$$

где в соответствии с представлением (2.2)

$$G(x,\xi,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(x,\xi,\lambda)e^{i\lambda y}\,d\lambda = G_1(x,\xi,y) + G_2(x,\xi,y), \tag{2.4}$$

причем, так как функции S_1 и S_2 в (2.2) четны по λ, то

$$G_1(x,\xi,y) = Cx^{q/2}\xi^{-q/2}\int_0^\infty I_{-q/2}(\lambda x) I_{-q/2}(\lambda\xi)\frac{K_{-q/2}(\lambda\theta)}{I_{-q/2}(\lambda\theta)}\cos\lambda y\,d\lambda, \tag{2.5}$$

$$G_2(x,\xi,y) = Cx^{q/2}\xi^{-q/2}\begin{cases} \int_0^\infty I_{-q/2}(\lambda x)K_{-q/2}(\lambda\xi)\cos\lambda y\,d\lambda, & x<\xi,\\ \int_0^\infty I_{-q/2}(\lambda\xi)K_{-q/2}(\lambda x)\cos\lambda y\,d\lambda, & x>\xi.\end{cases} \tag{2.6}$$

Здесь через C обозначаются все встречающиеся абсолютные постоянные. Сходимость интеграла (2.3) следует из оценок ядра G, которые приведены ниже.

Интеграл в (2.6) можно упростить, используя известную формулу [9, с. 746]

$$\int_0^\infty K_\nu(ax) I_\nu(bx)\cos cx\,dx = \frac{1}{2\sqrt{ab}} Q_{\nu-1/2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}\right),$$

где $Q_\nu(z)$ — функция Лежандра 2-го рода, $\mathrm{Re}\,a > |\mathrm{Re}\,b|$, $c>0$, $\mathrm{Re}\,\nu > -1/2$. Поскольку параметры в определении функции $S_2(x,\xi,\lambda)$ удовлетворяют всем условиям для справедливости этой формулы, то

$$G_2(x,\xi,y) = Cx^{q/2-1/2}\xi^{-q/2-1/2} Q_{-q/2-1/2}\left(\frac{x^2+\xi^2+y^2}{2x\xi}\right). \tag{2.7}$$

2.2. Оценки функции Грина $G(x,\xi,y)$. Будем использовать следующие известные асимптотики функций Бесселя (см., например, [9]):

$$I_\nu(z) \sim C\frac{e^z}{\sqrt{z}}, \qquad K_\nu(z) \sim C\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}, \quad |z|>1, \tag{2.8}$$

$$I_\nu(z) \sim Cz^\nu, \qquad K_\nu(z) \sim Cz^{-|\nu|}, \quad |z|<1. \tag{2.9}$$

Отметим, что $I_{-q/2}(\lambda\theta)$ не имеет нулей при $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$. Нам потребуются также следующие асимптотики функции $Q_\nu(z)$.

Лемма 2.1. *Для* $z \in R$, $z \geq 1$,

$$Q_\nu(z) \sim C\begin{cases} |\ln(z-1)|, & z-1<1, \\ z^{-\nu-1}, & z-1 \geq 1, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\frac{d^i Q_\nu(z)}{dz^i} \sim C\begin{cases} (z-1)^{-i}, & z-1<1, \\ z^{-\nu-i-1}, & z-1 \geq 1, \end{cases} \quad i \geq 1. \tag{2.11}$$

Доказательство этой леммы непосредственно следует из представления [9, с. 1032]

$$Q_\nu(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{\left(z+\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{ch}\,\varphi\right)^{\nu+1}}, \quad \mathrm{Re}\,\nu > -1.$$

Лемма 2.2. *Для функции* $G_1(x,\xi,y)$ *справедливы оценки*

$$|G_1(x,\xi,y)| \leq C\left[\xi^{-q} + |\ln(2\theta - x - \xi)| + 1\right], \tag{2.12}$$

$$|G_1(x,\xi,y)| \leq C(\xi^{-q}+1)\left(\frac{1}{|y|^{1-q}} + \frac{1}{|y|^2}\right), \quad |y| \geq 1. \tag{2.13}$$

Для производных функции $G_1(x,\xi,y)$ справедливы следующие оценки.

Лемма 2.3. *Имеют место неравенства*

$$\left|\frac{\partial G_1(x,\xi,y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial G_1(x,\xi,y)}{\partial y}\right| \leq$$

$$\leq C(\xi^{-q}+1)\min\left\{\frac{1}{|2\theta - x - \xi| + |y|}, \frac{1}{|2\theta - x - \xi| + |y|^{2-q} + |y|^2}\right\} \leq$$

$$\leq C(\xi^{-q}+1)\min\left\{\frac{1}{|x-\xi| + |y|}, \frac{1}{|x-\xi| + |y|^{2-q} + |y|^2}\right\}, \tag{2.14}$$

$$\sum_{i+j=2,\, i,j\geq 0}\left|\frac{\partial^2 G_1(x,\xi,y)}{\partial x^i \partial y^j}\right| \leq C\frac{\xi^{-q}+1}{|x-\xi|^2 + |y|^{3-q} + |y|^2}, \tag{2.15}$$

$$\sum_{i+j=3,\, i,j\geq 0}\left|\frac{\partial^3 G_1(x,\xi,y)}{\partial x^i \partial y^j}\right| \leq C\frac{\xi^{-q}+1}{\left(|x-\xi|^2 + |y|^2 + |y|^{2(4-q)/3}\right)^{3/2}}. \tag{2.16}$$

***Доказательство леммы* 2.2.** Непосредственно из определения G_1 следует, что

$$|G_1(x,\xi,y)| \leq C\left(\frac{x}{\xi}\right)^{q/2}\int_0^\infty I_{-q/2}(\lambda x) I_{-q/2}(\lambda\xi)\frac{K_{-q/2}(\lambda\theta)}{I_{-q/2}(\lambda\theta)}d\lambda \equiv CJ.$$

Пусть $\xi < x$. Тогда представим J в виде $(x, \xi < \theta)$:

$$J = \int_0^{1/\theta} + \int_{1/\theta}^{1/x} + \int_{1/x}^{1/\xi} + \int_{1/\xi}^{\infty} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

В каждом из интервалов интегрирования, соответствующих интегралам J_k, функции Бесселя, содержащиеся под интегралом J, имеют определенные асимптотики. Поэтому, используя (2.8), (2.9), имеем

$$|J_1| \leq C\left(\frac{x}{\xi}\right)^{q/2} \int\limits_0^{1/\theta} (\lambda x)^{-q/2} (\lambda\xi)^{-q/2} \frac{(\lambda\theta)^{-|q/2|}}{(\lambda\theta)^{-q/2}} d\lambda \leq C\xi^{-q},$$

где учтено, что $q = 1 - b < 1$,

$$|J_2| \leq C\left(\frac{x}{\xi}\right)^{q/2} \int\limits_{1/\theta}^{1/x} (\lambda x)^{-q/2} (\lambda\xi)^{-q/2} \frac{(\lambda\theta)^{-1/2} e^{-\lambda\theta}}{(\lambda\theta)^{-1/2} e^{\lambda\theta}} d\lambda \leq$$

$$\leq C\xi^{-q} \int\limits_{1/\theta}^{1/x} \lambda^{-q} e^{-2\lambda\theta} d\lambda \leq C\xi^{-q}.$$

Аналогично

$$|J_3| \leq C\left(\frac{x}{\xi}\right)^{q/2} \int\limits_{1/x}^{1/\xi} (\lambda x)^{-1/2} e^{\lambda x} (\lambda\xi)^{-q/2} e^{-2\lambda\theta} d\lambda \leq$$

$$\leq C\xi^{-q} x^{q/2-1/2} \int\limits_{1/x}^{1/\xi} \lambda^{-1/2-q/2} e^{-(2\theta-x)\lambda} d\lambda.$$

Поскольку $x \leq \theta$ и $\lambda \geq 1/x$, то $e^{-(2\theta-x)\lambda} \leq e^{-(\theta/2)(1/x)} e^{-(\theta/2)\lambda}$, и поэтому

$$|J_3| \leq C\xi^{-q} (x^{q/2-1/2} e^{-(\theta/2)(1/x)}) \int\limits_{1/x}^{1/\xi} \lambda^{-1/2-q/2} e^{-\lambda\theta/2} d\lambda \leq C\xi^{-q}.$$

Наконец,

$$|J_4| \leq C\xi^{-q/2-1/2} x^{q/2-1/2} \int\limits_{1/\xi}^{\infty} \lambda^{-1} e^{-(2\theta-x-\xi)\lambda} d\lambda.$$

В последнем интеграле, если $x < \theta/2$ или $\xi < \theta/2$, то вследствие того, что $\lambda > 1/\xi > 1/x$, имеем $e^{-(2\theta-x-\xi)\lambda} \leq e^{-\lambda\theta/2} \leq e^{-\theta\lambda/4} e^{-\theta/8\xi} e^{-\theta/8x}$ и

$$|J_4| \leq C \int\limits_{1/\xi}^{\infty} \lambda^{-1} e^{-\theta\lambda/4} d\lambda \leq C.$$

Если же $x > \theta/2$ и $\xi > \theta/2$, то $\xi^{-q/2-1/2} x^{q/2-1/2} \leq C$ и

$$|J_4| \leq C \int\limits_{1/\xi}^{\infty} \lambda^{-1} e^{-(2\theta-x-\xi)\lambda} d\lambda = \{(2\theta - x - \xi)\lambda = v\} =$$

$$= C \int\limits_{(2\theta-x-\xi)/\xi}^{\infty} v^{-1} e^{-v} dv \leq C(|\ln(2\theta - x - \xi)| + 1), \quad \xi \in (\theta/2, \theta],$$

где в фигурных скобках указана выполненная замена переменных. Аналогично рассматривается случай $x < \xi$, что и приводит в результате к оценке (2.12).

Рассмотрим теперь поведение $G_1(x, \xi, y)$ при „больших” y, т. е. при $|y| > 1$. Представим G_1 в виде

$$G_1 = \int\limits_0^{\infty} S_1(x, \xi, \lambda)\eta(\lambda)\cos\lambda y\, d\lambda + \int\limits_0^{\infty} S_1(x, \xi, \lambda)[1 - \eta(\lambda)]\cos\lambda y\, d\lambda \equiv F_1 + F_2,$$

где

$$\eta(\lambda) \in C^\infty, \qquad \eta(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in [0, 1/\theta], \\ 0, & \lambda > 1/\theta + 1. \end{cases}$$

Рассмотрим F_1. Пусть сначала $-q/2$ не равно целому числу. Тогда справедлива формула [9, с. 984]

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}.$$

В силу этого соотношения и свойств функции $I_\nu(z)$ на интервале, где $\eta(\lambda) \neq 0$, имеем

$$S_1(x, \xi, \lambda) = C\left(\frac{x}{\xi}\right)^{q/2} (\lambda x)^{-q/2} (\lambda\xi)^{-q/2} \left[f_1(\lambda) + \lambda^q f_2(\lambda) \right] =$$

$$= C\xi^{-q} \left[\lambda^{-q} f_1(\lambda) + f_2(\lambda) \right] \equiv s_1 + s_2.$$

Здесь $f_k(\lambda) = a_0^{(k)} + a_2^{(k)}\lambda^2 + a_4^{(k)}\lambda^4 + \ldots$ — функции класса C^∞, $f_k'(0) = 0$. Обозначим

$$F_1^{(k)} = \int_0^\infty s_k(x, \xi, \lambda) \eta(\lambda) \cos \lambda y \, d\lambda, \qquad F_1 = F_1^{(1)} + F_1^{(2)}.$$

Для оценки $F_1^{(1)}$ применим лемму Эрдейи [10, с. 97], содержащую оценку вида

$$\left| \int_0^a \lambda^{\beta - 1} f(\lambda) e^{ir\lambda^\alpha} d\lambda \right| \leq C r^{-\beta/\alpha},$$

где $f(\lambda) \in C^\infty$ и обращается в нуль в точке a вместе со своими производными. В рассматриваемом случае $f(\lambda) = C\xi^{-q} f_1(\lambda)\eta(\lambda)$, $\alpha = 1$, $\beta = 1 - q > 0$, $a = 1 + \theta^{-1}$, так что согласно указанной лемме

$$\left| F_1^{(1)} \right| \leq C\xi^{-q} \frac{1}{|y|^{1-q}}.$$

Что же касается $F_1^{(2)}$, то, представляя $\cos \lambda y = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial \lambda} \sin \lambda y$ и интегрируя по частям два раза (с учетом $f_2'(0) = 0$), получаем оценку

$$\left| F_1^{(2)} \right| \leq C\xi^{-q} \frac{1}{|y|^2},$$

и, следовательно,

$$|F_1| \leq C\xi^{-q} \left(\frac{1}{|y|^{1-q}} + \frac{1}{|y|^2} \right).$$

Если же $-q/2 = n$, $n \geq 0$, целое, то, как следует из представления [9, с. 975]

$$K_n(z) = C I_n(z) \ln Cz + z^n g_1(z) + z^{-n} g_2(z), \qquad g_k(z) \in C^\infty,$$

$$S_1(x, \xi, \lambda) = C\xi^{-q} \left[\lambda^{2n} \ln C\lambda + \lambda^{2n} f_3(\lambda) + f_4(\lambda) \right] \equiv s_0 + s_1 + s_2, \ \ f_k \in C^\infty, \ \ f_k'(0) = 0.$$

Обозначим, как и ранее,

$$F_1^{(k)} = \int_0^\infty s_k(x, \xi, \lambda) \eta(\lambda) \cos \lambda y \, d\lambda, \qquad F_1 = F_1^0 + F_1^1 + F_1^2.$$

Интегралы $F_1^{(1)}$ и $F_1^{(2)}$ оцениваются так же, как и выше. Выполняя в $F_1^{(0)}$ при $n \geq 1$ двукратное интегрирование по частям, получаем $\left|F_1^0\right| \leq C\xi^{-q}|y|^{-2}$. Если же $n = 0$, то, интегрируя по частям один раз, убеждаемся, что $\left|F_1^{(0)}\right| \leq C\xi^{-q}|y|^{-1}$. Поскольку $n = -q/2$, то в любом случае имеем

$$|F_1| \leq C\xi^{-q}\left(\frac{1}{|y|^{1-q}} + \frac{1}{|y|^2}\right).$$

Далее, производя в F_2 двукратное интегрирование по частям, разбивая область интегрирования на интервалы точками $1/x$ и $1/\xi$ и используя в каждом из получающихся интегралов свою асимптотику функций Бесселя, посредством таких же оценок, как и выше, убеждаемся, что

$$|F_2| \leq C\left(1 + \xi^{-q}\right)\frac{1}{|y|^2}.$$

Вместе с оценкой для F_1 это дает неравенство (2.13).

Лемма 2.3 доказывается с помощью аналогичных рассуждений, при этом область интегрирования в определении $G_1(x, \xi, y)$ разбивается на интервалы, соответствующие различным асимптотикам функции S_1. Заметим, что главный вклад вносят интегралы по неограниченным областям $(1/x, \infty)$, $(1/\xi, \infty)$. Как и при доказательстве леммы 2.2, мы отдельно рассматриваем поведение по (x, ξ) и по y. При этом, например, для G_{1yy} получаем две оценки (при всех y, а не только при $|y| \geq 1$)

$$\left|G_{1yy}\right| \leq C(1 + \xi^{-q})\frac{1}{|2\theta - x - \xi|^2}, \qquad \left|G_{1yy}\right| \leq C(1 + \xi^{-q})\frac{1}{y^2},$$

из которых следует неравенство

$$\left|G_{1yy}\right| \leq C(1 + \xi^{-q})\frac{1}{|2\theta - x - \xi|^2 + y^2},$$

которое с учетом того, что при $x, \xi \in [0, \theta]$ $|2\theta - x - \xi| \geq |x - \xi|$, приводит к соответствующей оценке леммы 2.3. Остальные оценки этой леммы получаются аналогично, причем при оценках G_{1x}, G_{1xx}, G_{1xxy}, G_{1xyy} следует пользоваться представлениями

$$S_{1x}(x, \xi, \lambda) = C\left(\frac{x}{\xi}\right)^{q/2} I_{-q/2+1}(\lambda x) I_{-q/2}(\lambda\xi)\frac{K_{-q/2}(\lambda\theta)}{I_{-q/2}(\lambda\theta)}\lambda,$$

$$S_{1xx}(x, \xi, \lambda) = Cx^{-1}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{q/2} I_{-q/2+1}(\lambda x) I_{-q/2}(\lambda\xi)\frac{K_{-q/2}(\lambda\theta)}{I_{-q/2}(\lambda\theta)}\lambda +$$

$$+ C\left(\frac{x}{\xi}\right)^{q/2} I_{-q/2+2}(\lambda x) I_{-q/2}(\lambda\xi)\frac{K_{-q/2}(\lambda\theta)}{I_{-q/2}(\lambda\theta)}\lambda^2,$$

которые получаются при непосредственном дифференцировании функции S_1 и использовании известного соотношения [9]

$$zI_\nu'(z) - \nu I_\nu(z) = zI_{\nu+1}(z).$$

2.3. Оценки потенциала* (2.3) *в пространствах Гельдера. Пусть сначала $q < 0$. Тогда из оценок лемм 2.1 и 2.2 следует, что при любой гладкой ограниченной $f(x, y)$ потенциал (2.3) существует и определяет решение задачи (1.3) по построению. Используя леммы 2.3 и 2.1, легко проверить, что G_x и G_y интегрируемы по Ω, и поэтому

$$u_x(x,y) = \int_0^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_x(x,\xi,y-\eta) f(\xi,\eta)\,d\eta,$$

$$u_y(x,y) = \int_0^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_y(x,\xi,y-\eta) f(\xi,\eta)\,d\eta.$$

Получим далее представление для вторых производных потенциала, например, u_{yy}. Обозначим

$$v_\varepsilon = \int_0^{\theta} \chi_\varepsilon(x-\xi)\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_y(x,\xi,y-\eta) f(\xi,\eta)\,d\eta,$$

где $\chi_\varepsilon(z) = \chi(z/\varepsilon)$, $\chi \in C^\infty$, $\chi(z) = 0$ при $|z| \le 1$, $\chi(z) = 1$ при $|z| \ge 2$. Легко видеть, что v_ε равномерно сходится к $u_y(x,y)$ при $\varepsilon \to 0$. Имеем

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} = \int_0^{\theta} \chi_\varepsilon(x-\xi)\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}(x,\xi,y-\eta) f(\xi,\eta)\,d\eta =$$

$$= \int_0^{\theta} \chi_\varepsilon(x-\xi)\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}(x,\xi,y-\eta)[f(\xi,\eta) - f(\xi,y)]\,d\eta,$$

так как

$$\int_0^{\theta} \chi_\varepsilon(x-\xi)\,d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}(x,\xi,y-\eta)\,d\eta = 0$$

в силу того, что $G_\eta \to 0$ при $|\eta| \to \infty$. Используя оценки лемм 2.1 и 2.3, можно проверить, что $\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходится к

$$w = \int_0^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}(x,\xi,y-\eta)[f(\xi,\eta) - f(\xi,y)]\,d\eta.$$

Из равномерной сходимости v_ε и $\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial y}$ следует, что $w = \dfrac{\partial}{\partial y}(u_y) = u_{yy}$, т. е.

$$u_{yy} = \int_0^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}(x,\xi,y-\eta)[f(\xi,\eta) - f(\xi,y)]\,d\eta. \tag{2.17}$$

Отметим, что аналогичное представление справедливо и для u_y, так как $\int_{-\infty}^{\infty} G_y(x,\xi,y-\eta)\,d\eta = 0$:

$$u_y = \int_0^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_y(x,\xi,y-\eta)[f(\xi,\eta) - f(\xi,y)]\,d\eta. \tag{2.18}$$

Отсюда

$$u_{xy} = \int_0^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_{xy}(x,\xi,y-\eta)[f(\xi,\eta) - f(\xi,y)]\,d\eta. \tag{2.19}$$

Чтобы получить представление такого же типа для u_x, предположим сначала, что $f(x, y)$ имеет производную по x, и представим $u(x, y)$ в виде

$$u(x,y) = \int_0^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y-\eta)[f(\xi,\eta) - f(x,y)]d\eta \; +$$

$$+ \; f(x,y)\int_0^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y-\eta)\,d\eta .$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$u_x(x,y) = \int_0^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_x(x,\xi,y-\eta)[f(\xi,\eta) - f(x,y)]d\eta \; +$$

$$+ \; f(x,y)\int_0^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_x(x,\xi,y-\eta)\,d\eta .$$

Заметим, что функция $\int_0^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y-\eta)\,d\eta$ является решением задачи (1.3) при $f(x, y) \equiv 1$, причем эта функция не зависит от y. Легко проверить, что единственным таким решением является функция $v(x) = (x - \theta)/b$ и, следовательно,

$$v(x) = \int_0^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,y-\eta)\,d\eta = \frac{1}{b}(x-\theta)$$

и

$$v_x(x) = \int_0^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_x(x,\xi,y-\eta)\,d\eta = \frac{1}{b}.$$

Поэтому

$$u_x(x,y) = \int_0^{\theta} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G_x(x,\xi,y-\eta)[f(\xi,\eta) - f(x,y)]d\eta + \frac{1}{b}f(x,y). \tag{2.20}$$

Если же $f(x, y)$ не имеет производной по x и принадлежит только классу Гельдера, то представление (2.20) получается путем аппроксимации $f(x, y)$ гладкими функциями.

Используя леммы 2.1 – 2.3 и представления вида (2.17) – (2.20), можно доказать неравенство (1.5), оценивая каждое слагаемое в определении нормы $|||u|||_{\Omega}^{(2+\alpha)}$ отдельно. Рассмотрим, например, $u_{yy}(x, y)$, использовав представление (2.17). Представим u_{yy} в виде

$$u_{yy}(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y), \tag{2.21}$$

где u_1 и u_2 соответствуют представлению (см. (2.4)) $G(x,\xi,y) = G_1(x,\xi,y) + G_2(x,\xi,y)$ в (2.17).

Оценки производных ядра $G_1(x,\xi,y)$ аналогичны оценкам фундаментального решения уравнения Лапласа, как это следует из леммы 2.3. Поэтому оценки функции $u_1(x, y)$ устанавливаются таким же образом, как это сделано в [11] (гл. 3). В результате получаем

$$\langle u_1\rangle_\Omega^{(\alpha)} \le C\langle f\rangle_\Omega^{(\alpha)}, \qquad |u_1|_\Omega^{(\alpha)} \le |f|_\Omega^{(\alpha)},$$

а тем самым

$$|u_1|_{0,\Omega} + \sup \tilde{x}\,\frac{|u_1(x,y)-u_1(\bar{x},\bar{y})|}{|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})|^\alpha} \le |f|_\Omega^{(\alpha)}. \tag{2.22}$$

Рассмотрим теперь $u_2(x,y)$ и оценим сначала $|u_2(x,y)|$. Непосредственно дифференцируя функцию $G_2(x,\xi,y)$, имеем

$$G_{2yy}(x,\xi,y-\eta) = Cx^{q/2-3/2}\xi^{-q/2-3/2}Q'_{-q/2-1/2}(z) +$$

$$+ Cx^{q/2-5/2}\xi^{-q/2-5/2}Q''_{-q/2-1/2}(z)(y-\eta)^2 \equiv g_1 + g_2, \tag{2.23}$$

где

$$z = \frac{x^2+\xi^2+(y-\eta)^2}{2x\xi}. \tag{2.24}$$

Обозначим

$$v_k = \int_0^\theta d\xi \int_{-\infty}^{\infty} g_k(x,\xi,y-\eta)[f(\xi,\eta)-f(\xi,y)]d\eta, \qquad k = 1, 2. \tag{2.25}$$

Используя неравенство $|f(\xi,\eta)-f(\xi,y)| \le \langle f\rangle_\Omega^{(\alpha)}|\eta-y|^\alpha$, обозначая

$$a = \frac{x^2+\xi^2}{2x\xi} \tag{2.26}$$

и производя в интеграле по η в (2.25) замену переменных, определяемую (2.24), получаем

$$|v_1| \le C\langle f\rangle_\Omega^{(\alpha)}\int_0^\theta d\xi\, x^{q/2-1+\alpha/2}\xi^{-q/2-1+\alpha/2}\int_a^\infty \left|Q'_{-q/2-1/2}(z)\right|(z-a)^{\alpha/2-1/2}dz. \tag{2.27}$$

Пусть

$$I(a) = \int_a^\infty \left|Q'_{-q/2-1/2}(z)\right|(z-a)^{\alpha/2-1/2}dz = \{z-a=u\} =$$

$$= \int_0^\infty \left|Q'_{-q/2-1/2}(u+a)\right|u^{\alpha/2-1/2}du.$$

В случае $a\in[1,2]$ представим $I(a)$ в виде

$$I(a) = \int_0^1 \ldots du + \int_1^\infty \ldots du = I_1(a) + I_2(a)$$

и воспользуемся леммой 2.1. Тогда

$$|I_1(a)| \le C\int_0^1 (u+a-1)^{-1}u^{\alpha/2-1/2}du = \{u=(a-1)v\} =$$

$$= C(a-1)^{-1/2+\alpha/2}\int_0^{1/(a-1)}(v+1)^{-1}v^{\alpha/2-1/2}dv \le C(a-1)^{-1/2+\alpha/2},$$

$$|I_2(a)| \le C\int_1^\infty (u+a)^{q/2+1/2-2} u^{\alpha/2-1/2} du = \{u = av\} =$$

$$= Ca^{q/2+\alpha/2-1}\int_{1/a}^\infty (v+1)^{q/2-3/2} v^{\alpha/2-1/2} dv \le C.$$

Итак, при $a \in (1, 2]$

$$|I(a)| \le C(a-1)^{-1/2+\alpha/2}. \tag{2.28}$$

При $a \in (2, \infty)$ снова используем лемму 2.1 для оценки функции $Q'_{-q/2-1/2}(u+a)$ при $u+a > 2$. Имеем

$$|I(a)| \le C\int_0^\infty (u+a)^{q/2+1/2-2} u^{\alpha/2-1/2} du = \{u = av\} =$$

$$= Ca^{q/2+\alpha/2-1}\int_0^\infty (v+1)^{q/2-3/2} v^{\alpha/2-1/2} dv \le Ca^{q/2+\alpha/2-1}. \tag{2.29}$$

Производя теперь в правой части (2.27) замену переменных

$$\left\{\xi = xt,\ \ a(x,\xi) = \frac{1+t^2}{2t}\right\},$$

получаем

$$|v_1| \le C\langle f\rangle_\Omega^{(\alpha)} x^{-1+\alpha}\int_0^{\theta/x} t^{-q/2-1+\alpha/2} I\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)dt.$$

С учетом оценок (2.28), (2.29) для $I(a)$ представим последний интеграл в виде

$$\int_0^{\theta/x} = \int_0^{2-\sqrt{3}} + \int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} + \int_{2+\sqrt{3}}^{\theta/x} = i_1 + i_2 + i_3,$$

где некоторые интегралы i_k могут отсутствовать или быть определенными (в зависимости от θ/x) на меньших интервалах интегрирования и для i_k выполняется одна из оценок (2.28) или (2.29), что легко следует из свойств функции $\frac{1+t^2}{2t}$. Таким образом,

$$|i_1| \le C\int_0^{2-\sqrt{3}} t^{-q/2-1+\alpha/2}\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^{q/2-1+\alpha/2} dt \le C\int_0^{2-\sqrt{3}} t^{-q} dt \le C,$$

$$|i_2| \le C\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} t^{-q/2-1+\alpha/2}\left(\frac{1+t^2}{2t} - 1\right)^{-1/2+\alpha/2} dt \le C\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} |t-1|^{-1+\alpha} dt \le C,$$

$$|i_3| \le C\int_{2+\sqrt{3}}^{\theta/x} t^{-q/2-1+\alpha/2}\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)^{q/2-1+\alpha/2} dt \le C\int_{2+\sqrt{3}}^{\theta/x} t^{-2+\alpha} dt \le C.$$

В результате приходим к оценке

$$|v_1| \le C\langle f\rangle_\Omega^{(\alpha)} x^{-1+\alpha}. \tag{2.30}$$

Из аналогичной оценки $|v_2|$ с использованием леммы 2.1 получаем $|v_2| \le$ $\le C\langle f\rangle_{\Omega}^{(\alpha)} x^{-1+\alpha}$, откуда следует, что для u_2 в (2.21) выполняется неравенство

$$|u_2| \le C\langle f\rangle_{\Omega}^{(\alpha)} x^{-1+\alpha}. \tag{2.31}$$

Отсюда с учетом оценки (2.22) имеем

$$\left|x u_{yy}(x,y)\right| \le C\langle f\rangle_{\Omega}^{(\alpha)} x^{\alpha}, \tag{2.32}$$

т. е. оценку соответствующего слагаемого в норме $|||u|||_{\Omega}^{(2+\alpha)}$. Оценка (2.32) понадобится нам также для оценки константы Гельдера функции $u_2(x,y)$. При этом удобно доказывать отдельно гельдеровость $u_2(x,y)$ по переменной x и по переменной y. Пусть $y, \bar{y} \in R$, $\delta = |y-\bar{y}|$. Достаточно рассмотреть случай $\delta \le\le x/2$, поскольку иначе

$$|u_2(x,y) - u_2(x,\bar{y})| \le |u_2(x,y)| + |u_2(x,\bar{y})| \le C\langle f\rangle_{\Omega}^{(\alpha)} x^{-1} x^{\alpha} \le C\langle f\rangle_{\Omega}^{(\alpha)} x^{-1}\delta^{\alpha},$$

т. е. имеем требуемую оценку. Представим разность $u_2(x,y) - u_2(x,\bar{y})$ в следующем виде:

$$u_2(x,y) - u_2(x,\bar{y}) = \int\limits_{|x-\xi|<\delta} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{2yy}(x,\xi,y-\eta)[f(\xi,\eta) - f(\xi,y)]d\eta -$$

$$- \int\limits_{|x-\xi|<\delta} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{2\bar{y}\bar{y}}(x,\xi,\bar{y}-\eta)[f(\xi,\eta) - f(\xi,\bar{y})]d\eta +$$

$$+ \int\limits_{|x-\xi|>\delta} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[G_{2yy}(x,\xi,y-\eta) - G_{2\bar{y}\bar{y}}(x,\xi,\bar{y}-\eta)\right][f(\xi,\eta) - f(\xi,y)]d\eta +$$

$$+ \int\limits_{|x-\xi|>\delta} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{2\bar{y}\bar{y}}(x,\xi,\bar{y}-\eta)[f(\xi,\bar{y}) - f(\xi,y)]d\eta \equiv J_1 + J_2 + J_3 + J_4,$$

причем

$$J_4 = \int\limits_{|x-\xi|>\delta} d\xi [f(\xi,\bar{y}) - f(\xi,y)] \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{2\bar{y}\bar{y}}(x,\xi,\bar{y}-\eta)d\eta = 0.$$

Оценки интегралов J_1 и J_2 полностью аналогичны оценкам, приведенным при получении (2.31). Тогда

$$|J_1| + |J_2| \le C\langle f\rangle_{\Omega}^{(\alpha)} x^{-1}\delta^{\alpha}.$$

При оценке J_3 следует воспользоваться теоремой о среднем $(y_m \in [y,\bar{y}])$

$$|J_3| \le C\langle f\rangle_{\Omega}^{(\alpha)}\delta \int\limits_{|x-\xi|>\delta} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|G_{2yyy}(x,\xi,y_m-\eta)\right| |y-\eta|^{\alpha} d\eta \le$$

$$\le C\langle f\rangle_{\Omega}^{(\alpha)}\delta \int\limits_{|x-\xi|>\delta} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|G_{2yyy}(x,\xi,y_m-\eta)\right| |y_m-\eta|^{\alpha} d\eta +$$

$$+ C\langle f\rangle_{\Omega}^{(\alpha)}\delta^{1+\alpha} \int\limits_{|x-\xi|>\delta} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|G_{2yyy}(x,\xi,y_m-\eta)\right| d\eta \equiv J_3^{(1)} + J_3^{(2)},$$

так как $|y-\eta|^\alpha \le C(|y_m-\eta|^\alpha+\delta^\alpha)$. Используя при оценках $J_3^{(1)}$ и $J_3^{(2)}$ лемму 2.1 и те же рассуждения, что и выше, с учетом $\delta \le x/2$ получаем

$$|J_3| \le \left|J_3^{(1)}\right| + \left|J_3^{(2)}\right| \le C\langle f\rangle_\Omega^{(\alpha)} x^{-1}\delta^\alpha.$$

Следовательно,

$$|u_2(x,y)-u_2(x,\bar{y})| \le C\langle f\rangle_\Omega^{(\alpha)} x^{-1}|y-\bar{y}|^\alpha.$$

Путем аналогичных оценок для $0<x<\bar{x}$ можно получить

$$|u_2(x,y)-u_2(\bar{x},y)| \le C\langle f\rangle_\Omega^{(\alpha)} x^{-1}|x-\bar{x}|^\alpha.$$

Объединяя два последних неравенства и учитывая (2.22), находим оценку одного из слагаемых в определении нормы $|||u|||_\Omega^{(2+\alpha)}$:

$$\sup_{(x,y),(\bar{x},\bar{y})\in\overline{\Omega}} x\frac{\left|D_y^2u(x,y)-D_y^2u(\bar{x},\bar{y})\right|}{|(x,y)-(\bar{x},\bar{y})|^\alpha} \le C\langle f\rangle_\Omega^{(\alpha)}. \qquad (2.33)$$

Оценки остальных слагаемых в $|||u|||_\Omega^{(2+\alpha)}$ аналогичны (2.32), (2.33) с учетом того, что появляющиеся при дифференцировании функции $G_2(x,\xi,y-\eta)$ выражения $\partial z/\partial x = 1/\xi - z/x$ (см. (2.24)) нужно представлять в виде $1/\xi - z/x = (1/\xi - a/x)-(z-a)/x$ и оценивать каждое соответствующее слагаемое отдельно.

Мы предположили, что $q<0$, так как при $q=1-b\in[0,1)$ представление (2.3) справедливо только для функций f, достаточно быстро убывающих при $|y|\to\infty$, что следует из оценок в леммах 2.1, 2.2. Однако, как следует из лемм 2.1, 2.3, представления для производных функции $u(x,y)$ вида (2.17) – (2.20) сохраняются при ограниченной f и для $q\in[0,1)$. Поэтому в случае $q>0$ можно найти решение задачи (1.3) с произвольной $f\in H_\Omega^\alpha$ следующим образом. Пусть $f_\varepsilon(x,y)=f(x,y)e^{-\varepsilon|y|}$, $\varepsilon>0$, и $u_\varepsilon(x,y)$ — решение задачи (1.3) с $f=f_\varepsilon$. В силу равномерной по ε сходимости интегралов (2.17) – (2.20) нетрудно видеть, что производные функций $u_\varepsilon(x,y)$ при $\varepsilon\to0$ равномерно сходятся к соответствующим потенциалам с плотностью $f(x,y)$. Поэтому, учитывая граничное условие $u(\theta,y)=0$, можно определить решение задачи (1.3) при $q>0$, например, в виде

$$u(x,y) = \lim_{\varepsilon\to0} u_\varepsilon(x,y) = \lim_{\varepsilon\to0} -\int_x^\theta u_{\varepsilon x}(\zeta,y)\,d\zeta =$$

$$= -\int_x^\theta d\zeta\int_0^\theta d\xi\int_{-\infty}^{\infty} G_\zeta(\zeta,\xi,y-\eta)f(\xi,\eta)\,d\eta.$$

При этом, как легко видеть, для производных функции $u(x,y)$ справедливы представления вида (2.17), (2.20) и все оценки полностью аналогичны.

***2.4. О единственности решения задачи* (1.3).** Пусть дважды дифференцируемая функция $u(x,y)$ — решение однородной задачи (1.3) и $|u(x,y)| \le M\left(1+|y|^a\right)$, где $M>0$, $a\in[0,2)$. Покажем, что тогда $u(x,y)\equiv0$ в Ω.

Пусть $v(x,y)=e^{\lambda x}u(x,y)$, где число $\lambda>0$ достаточно мало и будет выбрано ниже. Функция $v(x,y)$ — решение задачи

$$Lv \equiv x\Delta v + (b-2\lambda x)v_x - (b-\lambda x)v = 0, \quad (x,y)\in\Omega, \qquad (2.34)$$

$$v(\theta, y) = 0, \qquad x\Delta v \to 0, \quad x \to 0, \tag{2.35}$$

причем $|v(x,y)| \le M_1\left(1+|y|^a\right)$, $M_1 = Me^{\lambda\theta}$. Выберем λ настолько малым, чтобы $b_1 \equiv b - 2\lambda\theta > 0$. Тогда тем более $\lambda(b-\lambda\theta) > 0$. Из вида оператора L следует, что если некоторая функция $w(x,y)$ удовлетворяет неравенству $Lw \ge 0$ и условиям (2.35), то $w(x,y)$ не может достигать положительного максимума внутри Ω. Кроме того, $w(x,y)$ не может достигать положительного максимума и при $x = 0$: в точке такого максимума $bw_x \le 0$, $-\lambda bw < 0$, $x\Delta w \to 0$, что противоречит неравенству $Lw \ge 0$. Таким образом, в частности, v не может достигать положительного максимума в $\overline{\Omega}$. В прямоугольнике $B_R = \{0 \le x \le \theta, |y| \le R\}$ рассмотрим функцию $F(x,y) = \theta^2/b_1 - \theta x/b_1 + y^2/2$, так что $x\Delta F \to 0$ при $x \to 0$ и

$$LF = x - \theta\frac{b-2\lambda x}{b_1} - \lambda(b-\lambda x)F \le 0, \quad (x,y)\in B_R, \tag{2.36}$$

так как $x \le \theta$, $b - 2\lambda x \ge b_1$, $b - \lambda x > 0$, $F \ge 0$ в Ω. Функция $v_\varepsilon(x,y) \equiv v(x,y) - \varepsilon F(x,y)$, $\varepsilon > 0$, имеет свойства: $v_\varepsilon = -\varepsilon F \le 0$ при $x = \theta$; $Lv_\varepsilon = Lv - \varepsilon LF \ge 0$ в Ω; $x\Delta v_\varepsilon \to 0$ при $x \to 0$;

$$v_\varepsilon = v - \varepsilon F \le M_1\left(1+|y|^a\right) - \varepsilon y^2/2 = M_1(1+R^a) - \varepsilon R^2/2 \le 0$$

при $|y| = R$ для всех $R \ge R(\varepsilon, M_1, a)$ (так как $a < 2$). Отсюда, согласно изложенному выше, следует, что v_ε не может достигать положительного максимума ни внутри B_R, ни на его границе. Поэтому $v_\varepsilon(x,y) \le 0$ в B_R, т. е. $v(x,y) \le \varepsilon F(x,y)$ в B_R. Поскольку $R \ge R(\varepsilon, M_1, a)$ произвольно, то $v(x,y) \le$ $\le \varepsilon F(x,y)$ в $\overline{\Omega}$, а так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $v(x,y) \le 0$ в $\overline{\Omega}$, и, следовательно, $u = e^{-\lambda x}v \le 0$ в $\overline{\Omega}$. Вследствие того что $u(x,y)$ удовлетворяет однородной задаче (1.3), аналогично $-u \le 0$ в $\overline{\Omega}$, т. е. $u(x,y) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Тем самым теорема 1.2 доказана.

3. Доказательство теоремы 1.1. Как показано в п. 1, путем замены переменной задача (1.1) сводится к задаче (1.3) с правой частью уравнения $f(x,y) =$ $= e^{-\kappa y}g(x,y)$. Наша цель сейчас состоит в получении оценки соответствующего решения $u(x,y)$ задачи (1.3) в терминах функции $g(x,y)$. Представим функцию $u(x,y)$ в виде $u = ve^{-\kappa y}$. Тогда, как легко проверить, $v(x,y)$ удовлетворяет задаче

$$x\Delta v - 2\kappa x v_y + bv_x + \kappa^2 xv = g, \quad (x,y)\in\Omega, \tag{3.1}$$

$$v|_{x=\theta} = 0, \qquad x\Delta v \to 0, \quad x \to 0. \tag{3.2}$$

Покажем, что $|v| \le C|g|_{0,\Omega}$ при $\theta < b/2\kappa$. Представим функцию $v(x,y)$ в виде $v = we^{-\lambda x}$, $\lambda > 0$. Тогда

$$\overline{L}w \equiv x\Delta w - 2\kappa x w_y + \overline{b}w_x - \overline{c}w \equiv \overline{L_0}w - \overline{c}w = ge^{\lambda x} \equiv \overline{g},$$

где

$$\overline{b} = b - 2\lambda x \ge b - 2\lambda\theta = b_1, \qquad \overline{c} = b\lambda - x(\kappa^2+\lambda^2) \ge b\lambda - \theta(\kappa^2+\lambda^2) \equiv c_1,$$

и $w(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям (3.2). Выберем теперь λ так, чтобы выполнялись неравенства $b_1 > 0$, $c_1 > 0$, что возможно при условии $\theta < b/2\kappa$. Отметим далее, что функция $w(x,y)$ имеет такое же поведение по y, как и функция $v = ue^{-\kappa y}$, т. е. поскольку $|||u|||_\Omega^{(2+\alpha)} \le C|f|_\Omega^{(\alpha)} \le C$ (в силу теоремы 1.2), функция $w \to 0$ при $y \to -\infty$ и $|w| \le De^{\kappa y}$, $D > 0$, при $y \to +\infty$.

Определим теперь функцию $m(x, y) = M + \varepsilon h(x, y)$, где $M = |\bar{g}|_{0,\Omega}/c_1$, $h(x, y) = (\theta - x + 1)e^{2\kappa y}$. Поскольку

$$\overline{L_0}h = \left\{x(\theta - x + 1)4\kappa^2 - 4\kappa^2 x(\theta - x + 1) - \bar{b}\right\}e^{2\kappa y} = -\bar{b}e^{2\kappa y} < 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

то

$$\bar{L}m(x, y) = \overline{L_0}m - \bar{c}m \le \varepsilon\overline{L_0}h - c_1 M < -|\bar{g}|_{0,\Omega}, \tag{3.3}$$

и если R достаточно велико, то $m(x, -R) > M > w(x, -R)$ и $m(x, R) > \varepsilon e^{2\kappa R} > w(x, R)$, что следует из свойств функции $w(x, y)$. Кроме того, $m(\theta, y) > M > 0 = w(\theta, y)$. В прямоугольнике B_R с достаточно большим R, как и выше, рассмотрим функцию $w(x, y) - m(x, y)$, для которой $w - m < 0$ на $\partial B_R \setminus \{x = 0\}$ и $\bar{L}(w - m) = \bar{L}w - \bar{L}m > \bar{g} + |\bar{g}|_{0,\Omega} \ge 0$ (в силу (3.3)). Аналогично предыдущему, используя неравенство $\bar{c} \ge c_1 > 0$, можно показать, что $w(x, y) - m(x, y)$ не может достигать положительного максимума ни внутри B_R, ни при $x = 0$. Следовательно, $w - m \le 0$ в B_R, а так как R велико и произвольно, то $w \le m$ в $\bar{\Omega}$. Далее, поскольку $\varepsilon > 0$ в определении $m(x, y)$ произвольно, $w(x, y) \le M = C|\bar{g}|_{0,\Omega}$ в $\bar{\Omega}$. Рассматривая теперь функцию $-w(x, y)$, точно так же получаем $-w(x, y) \le C|\bar{g}|_{0,\Omega}$, т. е. $|w| \le C|\bar{g}|_{0,\Omega}$, откуда

$$|v| \le C|\bar{g}|_{0,\Omega}. \tag{3.4}$$

Запишем теперь задачу (3.1), (3.2) в виде

$$x\Delta v + bv_x = g + 2x\kappa v_y - x\kappa^2 v \equiv \bar{f}, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{3.5}$$

$$v|_{x=\theta} = 0, \qquad \lim_{x \to 0} x\Delta v = 0. \tag{3.6}$$

Используя теорему 1.2, оценку (3.4) и интерполяционные неравенства

$$\left|xv_y\right|_{\Omega}^{(\alpha)} \le \varepsilon|||v|||_{\Omega}^{(2+\alpha)} + C_\varepsilon|v|_{0,\Omega},$$

$$|xv|_{\Omega}^{(\alpha)} \le \varepsilon|||v|||_{\Omega}^{(2+\alpha)} + C_\varepsilon|v|_{0,\Omega},$$

получаем, выбирая ε достаточно малым,

$$|||v|||_{\Omega}^{(2+\alpha)} \le C|g|_{\Omega}^{(\alpha)},$$

т. е.

$$|||ue^{\kappa y}|||_{\Omega}^{(2+\alpha)} \le C|g|_{\Omega}^{(\alpha)}. \tag{3.7}$$

Переходя теперь в неравенстве (3.7) к переменным

$$(\xi_1, \xi_2): (x, y) \to (\rho, \varphi) \to (\xi_1, \xi_2),$$

получаем оценку (1.4), что завершает доказательство теоремы 1.1.

Замечание. Из доказательства теоремы 1.1 следует, что для решения задачи (1.1) в дополнение к оценке (1.4) имеет место неравенство

$$|u|_{0,D} \le C\left|r^{\kappa}g\right|_{0,D}.$$

1. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1967. – **16**. – С. 209 – 292.
2. *Левендорский С. З., Панеях Б. Г.* Вырождающиеся эллиптические уравнения и краевые задачи // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления. Дифференц. уравнения с частными производными. – М.: ВИНИТИ, 1990. – **63**. – С. 131 – 200.
3. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 243 с.
4. *Grisvard P.* Elliptic problem in nonsmooth domain. – Pitman, 1985. – 600 p.
5. *Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.* Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singular perturbed domain // Operator Theory: Adv. and Appl. – Basel: Birkhauser, 2000. – 111/112.
6. *Goalaouic C., Shimakura N.* Regularite Holderienne de certains problemes aux limites ellipticues degeneres // Ann. Scuola norm. super. Pisa. Ser. IV. – 1983. – **10**, № 1. – P. 79 – 108.
7. *Gubelidze D.* On a generalized solution of the second order degenerate elliptic equation in an angular domain // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 2003. – **133**. – P. 37 – 61.
8. *Базалий Б. В., Краснощек Н. В.* Регулярность решения многомерной задачи со свободной границей для уравнения пористой среды // Мат. труды. – 2002. – **5**, № 2. – С. 38 – 91.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
10. *Федорюк М. В.* Метод перевала. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
11. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
12. *Базалий Б. В., Краснощек Н. В.* Регулярность решения задачи со свободной границей для уравнения $v_t = (v^m)_{xx}$ // Алгебра и анализ. – 2000. – **12**, вып. 2. – С. 1 – 21.

Получено 28.11.2005