УДК 517.9

Л. В. Фардигола, К. С. Халіна (Фіз.-техн. ін-т низьких температур, Харків)

ПРОБЛЕМИ КЕРОВАНОСТІ ДЛЯ РІВНЯННЯ СТРУНИ

Necessary and sufficient conditions of the null-controllability and approximate null-controllability are obtained for the string equation controlled by boundary conditions. Controls solving these problems are found explicitly. Moreover, bang-bang controls solving the approximate null-controllability problem are constructed with the use of the Markov trigonometric moment problem.

Получены необходимые и достаточные условия 0- и ε-управляемости для уравнения струны, управляемого краевыми условиями. Управления, решающие эти задачи, найдены в явном виде. Более того, с помощью тригонометрической проблемы моментов Маркова построены релейные управления, решающие задачу ε-управляемости.

0. Вступ. Проблеми керованості для гіперболічних рівнянь вивчаються зараз багатьма математиками (див., наприклад, бібліографію в [1]).

У цій роботі ми досліджуємо крайову керованість хвильового рівняння на скінченному відрізку за просторовою змінною за допомогою обмежених наперед заданою константою керувань. Слід відмітити, що в більшості робіт, в яких вивчалося таке рівняння, досліджується L^2-керованість, або, як узагальнення, L^p-керованість $(2 \le p \le \infty)$ [2 – 6]. Але лише L^∞-керування можна практично реалізувати. Більш того, з практичних міркувань такі керування мають бути обмежені наперед заданою константою (як в (0.3)). Окрім того, при зародженні теорії керування панували такі погляди, що лише керування в формі перемикача можна реалізувати практично. Пошук таких керувань для розв'язання проблем керованості є актуальною задачею і зараз. Саме тому в п. 2 будуть побудовані релейні керування, які розв'язують проблему ε-керованості для рівняння, що розглядається.

Проблеми крайової керованості для хвильового рівняння на півосі з керуваннями, обмеженими наперед заданою сталою, було вивчено в [9, 10].

Розглянемо хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad x \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \tag{0.1}$$

кероване крайовими умовами

$$w(0, t) = u_0(t), \qquad w(\pi, t) = u_\pi(t), \quad t \in (0, T), \tag{0.2}$$

де $T > 0$. Ми вважаємо, що керування u_j, $j = 0, \pi$, задовольняють умову

$$u_j \in \mathcal{B}(0, T) = \{ v \in L^\infty(0, T) \,\big|\, |v(t)| \le 1 \text{ майже скрізь на } (0, T) \}. \tag{0.3}$$

Усі функції, що розглядаються в рівнянні (0.1) та крайових умовах (0.2), визначені на скінченному відрізку. Далі скрізь будемо вважати, що такі функції визначені на $\mathbb{R}$ та набувають значення 0 на доповненні в $\mathbb{R}$ своєї області визначення.

Розглянемо функціональні простори, що використовуються в роботі. Нехай $\mathcal{S}$ — простір Шварца [7]:

$$\mathcal{S} = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \colon \forall m \in \mathbb{N}_0 \;\; \forall l \in \mathbb{N}_0 \;\; \exists C_{ml} > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \colon$$
$$\left| \varphi^{(m)}(x) (1 + |x|^2)^l \right| \le C_{ml} \},$$

де $\mathbb{N}_0 \in \mathbb{N} \cup 0$, та $\mathcal{S}'$ — простір узагальнених функцій над $\mathcal{S}$. Послідовність $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ називається збіжною в $\mathcal{S}$, якщо для будь-яких $m \in \mathbb{N}$ і $l \in \mathbb{N}$

існує C_{ml} таке, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ $\left|x^l \varphi_n^{(m)}(x)\right| \le C_{ml}$ та $x^l \varphi_n^{(m)}(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$ в $\mathbb{R}$. Під збіжністю в $\mathcal{S}'$ розуміється слабка збіжність. Нехай також

$$\mathcal{D}(a, b) = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \colon \operatorname{supp} \varphi \in (a, b) \},$$

$\mathcal{D}'(a, b)$ — простір узагальнених функцій над $\mathcal{D}(a, b)$ та $\mathcal{D}(-\infty, \infty) = \mathcal{D}$, $\mathcal{D}'(-\infty, \infty) = \mathcal{D}'$. Послідовність $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(a, b)$ називається збіжною в $\mathcal{D}(a, b)$, якщо для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [\alpha, \beta] \subset (a, b)$ та для будь-якого $m \in \mathbb{N}$ $\varphi_n^{(m)}(x) \rightrightarrows 0$ при $n \to \infty$ в $\mathbb{R}$. Під збіжністю в $\mathcal{D}'(a, b)$ розуміється слабка збіжність. Послідовність $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}$ називається δ-послідовністю, якщо $\operatorname{supp} \delta_n \subset [0, 1/n]$ та $\int_{-\infty}^\infty \delta_n(x) dx = 1$. Нехай $f \in \mathcal{D}'(a, b)$. Будемо говорити, що $f(a + 0) = \alpha \in \mathbb{R}$, якщо для кожної δ-послідовності $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ $(f(x), \delta_n(x - a)) \to \alpha$ при $n \to \infty$, та $f(b - 0) = \beta \in \mathbb{R}$, якщо для кожної δ-послідовності $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ $(f(x), \delta_n(b - x)) \to \beta$ при $n \to \infty$.

Позначимо через H_l^s наступні простори Соболева [8], (гл. 1):

$$H_l^s = \{ \varphi \in \mathcal{S}' \colon (1 + |x|^2)^{l/2} (1 + |D|^2)^{s/2} \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \},$$

$$H_l^s(a, b) = \{ \varphi \in \mathcal{D}'(a, b) \cap H_l^s : \exists \varphi(a + 0) \in \mathbb{R} \ \exists \varphi(b - 0) \in \mathbb{R} \},$$

$$\|\varphi\|_l^s = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| (1 + |x|^2)^{l/2} (1 + |D|^2)^{s/2} \varphi(x) \right|^2 dx \right)^{1/2},$$

де $D = -i d/dx$.

У просторі H_l^s разом з щойно введеною нормою будемо розглядати ще й норму

$$[\![\varphi]\!]_l^s = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| (1 + |D|^2)^{s/2} (1 + |x|^2)^{l/2} \varphi(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Відомо (див. [8], гл. 1), що для будь-яких s і l існує стала $K_l^s > 0$ така, що

$$\frac{1}{K_l^s} \|\varphi\|_l^s \le [\![\varphi]\!]_l^s \le K_l^s \|\varphi\|_l^s. \tag{0.4}$$

Нехай $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ — оператор перетворення Фур'є. Маємо

$$(\mathcal{F}\varphi)(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

та

$$(\mathcal{F}f, \varphi) = (f, \mathcal{F}^{-1}\varphi), \quad f \in \mathcal{S}', \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Відомо, що $\mathcal{F}\mathcal{S} = \mathcal{S}$, $\mathcal{F}\mathcal{S}' = \mathcal{S}'$. Окрім того (див. [8], гл. 1), $\mathcal{F} H_l^s = H_s^l$ та $\|\varphi\|_l^s = [\![\mathcal{F}\varphi]\!]_s^l$, $\varphi \in H_l^s$. У цій роботі ми завжди будемо вважати $l < -1/2$, $s \le 0$. Далі будемо використовувати також простори

$$\tilde{H}_l^s = \{ \varphi \in H_l^s \times H_l^{s-1} : \varphi \text{ — непарна, } 2\pi\text{-періодична} \},$$

$$\tilde{H}_l^s(a, b) = H_l^s(a, b) \times H_l^{s-1}(a, b)$$

з нормою $|||\varphi|||_l^s = \left(\left(\|\varphi_0\|_l^s \right)^2 + \left(\|\varphi_1\|_l^{s-1} \right)^2 \right)^{1/2}$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$, та

$$\hat{H}_s^l = H_s^l \times H_{s-1}^l$$

з нормою $[\![\![\varphi]\!]\!]_s^l = \left(\left([\![\varphi_0]\!]_s^l \right)^2 + \left([\![\varphi_1]\!]_{s-1}^l \right)^2 \right)^{1/2}$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$.

У п. 1 одержано критерії 0- та ε-керованості системи (0.1), (0.2) з обмеженнями на керування (0.3). Керування, що розв'язують проблему 0-керованості, знайдено в явному вигляді, але ці керування можуть бути досить складними для практичної реалізації. Тому головною метою п. 2 є побудова релейних керувань, що розв'язують проблему ε-керованості. Цю проблему зведено до системи тригонометричних проблем моментів Маркова. Окрім того, отримано оцінку точності влучення для побудованої системи релейних керувань, що розв'язують проблему ε-керованості.

1. Проблеми керованості. Розглянемо керовану систему (0.1), (0.2) з початковими умовами

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= w_0^0(x), \\ \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} &= w_1^0(x), \end{aligned} \qquad x \in (0, \pi), \tag{1.1}$$

де $w^0 = \begin{pmatrix} w_0^0 \\ w_1^0 \end{pmatrix} \in \tilde{H}_0^s[0, \pi]$.

Нехай $\Omega : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ — оператор непарного продовження, тобто $(\Omega f)(x) = f(x) - f(-x)$, $f \in \mathcal{S}'$, $\operatorname{supp} f \subset [0, +\infty)$. Розглянемо непарні 2π-періодичні продовження (по x) функцій, що зв'язані керованою системою (0.1), (0.2), (1.1):

$$W^0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \Omega w^0,$$

$$W(\cdot, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \Omega \begin{pmatrix} w(\cdot, t) \\ \dfrac{\partial w(\cdot, t)}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad t \in (0, T),$$

де $\mathcal{T}_h$ — оператор зсуву: $(\mathcal{T}_h \varphi)(x) = \varphi(x + h)$, $\varphi \in \mathcal{S}$, та $(\mathcal{T}_h f, \varphi) = (f, \mathcal{T}_{-h} \varphi)$, $f \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$.

Оскільки для будь-якого $N \in \mathbb{N}$

$$(c_l^N)^2 \le \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 + |x - \pi N k|^2 \right)^l \le (C_l^N)^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $c_l^N = (\pi N)^l \sqrt{2 S_l - 1}$, $C_l^N = \sqrt{3 + 2(\pi N)^{2l} S_l}$, $S_l = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2l}$, то

$$c_l^N |||g|||_0^s \le \left|\left|\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\pi N k} g \right|\right|\right|_l^s \le C_l^N |||g|||_0^s, \quad g \in H_0^s \times H_0^{s-1}. \tag{1.2}$$

Окрім того, $\|\Omega f\|_0^s \le \sqrt{2} \|f\|_0^s$, $f \in H_0^s$, $\operatorname{supp} f \in [0, +\infty)$. Тому $W^0 \in \tilde{H}_l^s$, $W(\cdot, t) \in \tilde{H}_l^s$, $t \in (0, T)$.

Як легко бачити, задачу (0.1), (0.2), (1.1) можна звести до задачі

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 & 0 \end{pmatrix} W - 2u_0(t) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta'(x+2\pi k) \end{pmatrix} +$$

$$+ 2u_\pi(t) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta'(x-\pi+2\pi k) \end{pmatrix}, \quad x\in\mathbb{R}, \quad t\in(0,T), \tag{1.3}$$

$$W(x,0) = W^0(x), \quad x\in\mathbb{R}, \tag{1.4}$$

де δ — функція Дірака.

Нехай $w^T = \begin{pmatrix} w_0^T \\ w_1^T \end{pmatrix} \in \tilde{H}_0^s[0,\pi]$, $W^T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \Omega w^T$. Розглянемо для задачі (1.3), (1.4) умови влучення

$$W(x,T) = W^T(x), \quad x\in\mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Нехай $T>0$, $w^0\in\tilde{H}_0^s[0,\pi]$. Позначимо через $\mathcal{R}_T(w^0)$ множину станів $w^T\in$ $\in\tilde{H}_0^s[0,\pi]$, для яких існує керування $u\in\mathcal{B}(0,T)$ таке, що задача (1.3) – (1.5) з $W^\beta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k}\Omega w^\beta$, $\beta = 0, T$, має єдиний розв'язок в $\tilde{H}_l^s$.

Означення 1.1. *Стан* $w^0\in\tilde{H}_0^s[0,\pi]$ *називається* 0*-керованим за час* T, *якщо* 0 *належить* $\mathcal{R}_T(w^0)$, *та* ε*-керованим за час* T, *якщо* 0 *належить замиканню* $\mathcal{R}_T(w^0)$ *в* $\tilde{H}_0^s[0,\pi]$.

Застосувавши до (1.3) – (1.5) перетворення Фур'є по x, одержимо

$$\frac{dv}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} v - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i\sigma \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi k\sigma i}(u_0(t) - e^{-\pi\sigma i}u_\pi(t)), \quad \sigma\in\mathbb{R}, \quad t\in(0,T), \tag{1.6}$$

$$v(\sigma,0) = v^0(\sigma), \tag{1.7}$$

$$v(\sigma,T) = v^T(\sigma), \tag{1.8}$$

де $v(\cdot,t) = \mathcal{F}W(\cdot,t)\in\hat{H}_s^l$, $v^0 = \mathcal{F}W^0\in\hat{H}_s^l$, $v^T = \mathcal{F}W^T\in\hat{H}_s^l$. Отже,

$$v^T(\sigma) = \Sigma(\sigma,T)\left[v^0(\sigma) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, i\sigma \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi k\sigma i} \int_0^T \Sigma(\sigma,-t) \begin{pmatrix} 0 \\ u_0(t) - e^{-\pi\sigma i}u_\pi(t) \end{pmatrix} dt\right],$$

де

$$\Sigma(\sigma,t) = \begin{pmatrix} \cos(\sigma t) & \dfrac{\sin(\sigma t)}{\sigma} \\ -\sigma\sin(\sigma t) & \cos(\sigma t) \end{pmatrix}.$$

Тому

$$W^T(x) = \mathcal{E}(x,T) * \left[W^0(x) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \begin{pmatrix} (\Omega u_0)(x) - (\Omega u_\pi)(x-\pi) \\ (\Omega(u_0'))(x) - (\Omega(u_\pi'))(x-\pi) \end{pmatrix}\right], \tag{1.9}$$

де

$$\mathcal{E}(x,T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\Sigma(\sigma,T) =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \delta(x+T) + \delta(x-T) & \frac{1}{2}(\operatorname{sign}(x+T) - \operatorname{sign}(x-T)) \\ -\delta'(x+T) + \delta'(x-T) & \delta(x+T) + \delta(x-T) \end{pmatrix}.$$

Тут і далі $*$ означає згортку по x.

Для $W^0 \in \tilde{H}_l^s$ позначимо

$$R_T(W^0) = \left\{ \mathcal{E}(x,T) * \left[W^0(x) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \begin{pmatrix} (\Omega u_0)(x) - (\Omega u_\pi)(x-\pi) \\ (\Omega(u_0'))(x) - (\Omega(u_\pi'))(x-\pi) \end{pmatrix} \right] \;\middle|\; u_0 \in \mathcal{B}(0,T) \wedge u_\pi \in \mathcal{B}(0,T) \right\}.$$

Тоді означення 1.1 еквівалентне наступному означенню.

Означення 1.2. *Стан* $W^0 \in \tilde{H}_l^s$ *називається* 0*-керованим за час* T, *якщо* 0 *належить* $R_T(W^0)$, *та* ε*-керованим за час* T, *якщо* 0 *належить замиканню* $R_T(W^0)$ *в* $\tilde{H}_l^s$.

Очевидно, справедливими є наступні твердження.

Твердження 1.1. *Стан* $w^0 \in \tilde{H}_0^s[0,\pi]$ *є* 0*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли стан* $W^0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k}\Omega w^0$, *що належить* $\tilde{H}_l^s$, *є* 0*-керованим за час* T.

Твердження 1.2. *Якщо стан* $w^0 \in \tilde{H}_0^s[0,\pi]$ *є* ε*-керованим за час* T, *то стан* $W^0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k}\Omega w^0$, *що належить* $\tilde{H}_l^s$, *є* ε*-керованим за час* T.

Визначимо $K \in \mathbb{N}$ таке, що $\pi(K-1) < T \le \pi K$, та позначимо

$$u_\alpha^k(t) = u_\alpha(t)\big(H(t-\pi(k-1)) - H(t-\pi k)\big), \qquad k = \overline{1,K}, \quad \alpha = 0,\pi, \tag{1.10}$$

де H — функція Хевісайда: $H(t) = 1$, якщо $t > 0$, та $H(t) = 0$, якщо $t \le 0$. Отже,

$$u_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{K} u_\alpha^k(t), \qquad \operatorname{supp} u_\alpha^k \subset [\pi(k-1), \pi k], \qquad k = \overline{1,K}, \quad \alpha = 0,\pi. \tag{1.11}$$

З (1.9) одержуємо

$$W^T(x) = \mathcal{E}(x,T) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \left\{ \Omega \begin{pmatrix} w_0^0(x) \\ w_1^0(x) \end{pmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} \Omega \sum_{k=1}^{K} (-1)^{k+1} \left\{ u_0^k\left(2\pi\left[\frac{k}{2}\right] + (-1)^{k+1}x\right) + u_\pi^k\left(2\pi\left[\frac{k}{2}\right] + (-1)^k(x-\pi)\right) \right\} \\ \left(\Xi \sum_{k=1}^{K} \left\{ u_0^k\left(2\pi\left[\frac{k}{2}\right] + (-1)^{k+1}x\right) - u_\pi^k\left(2\pi\left[\frac{k}{2}\right] + (-1)^k(x-\pi)\right) \right\} \right)' \end{pmatrix} \right\}, \tag{1.12}$$

де $\Xi : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ — оператор парного продовження: $(\Xi f)(x) = f(x) + f(-x)$, $f \in \mathcal{S}'$, $\operatorname{supp} f \subset [0, +\infty)$.

Позначимо $\overline{H}_0^s[-\pi,\pi] = \{ \varphi \in H_0^s : \operatorname{supp}\varphi \in [-\pi,\pi] \}$. Ясно, що $\overline{H}_0^s[-\pi,\pi]$ — компактний підпростір H_0^s.

Лема 1.1. *Нехай* $g \in \overline{H}_0^{s-1}[-\pi,\pi]$ *є непарною. Тоді існує* $\tilde{g} \in \overline{H}_0^s[-\pi,\pi]$ *парна і така, що* $\tilde{g}' = g$.

Доведення. Оскільки $g \in \mathcal{S}'$ та є фінітною $(\operatorname{supp} g \subset [-\pi, \pi])$, то за узагальненою теоремою Пелі – Вінера [11] (гл. 3) $G = \mathcal{F} g \in \mathcal{S}'$ є регулярним функціоналом, G зростає на $\mathbb{R}$ не швидше, ніж поліном, та продовжується до цілої функції порядку ≤ 1 та типу $\leq \pi$. З непарності g випливає непарність G. Тому $G(0) = 0$ та $\dfrac{G(s)}{is}$ є цілою функцією порядку ≤ 1 та типу $\leq \pi$, що зростає на $\mathbb{R}$ не швидше, ніж поліном. Отже, за тією ж теоремою $\tilde{g} = \mathcal{F}^{-1}\left(\dfrac{G(\sigma)}{i\sigma}\right) \in \mathcal{S}'$, $\operatorname{supp} g \subset [-\pi, \pi]$ та $\tilde{g}' = g$. Очевидно, що $\tilde{g}$ є парною. Маємо $G \in \overline{H}^0_{s-1}$. Отже,

$$\left[\!\left[\frac{G(\sigma)}{i\sigma} \right]\!\right]^0_s = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + |\sigma|^2\right)^s \left| \frac{G(\sigma)}{i\sigma} \right|^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq [\![G]\!]^0_{s-1} + 2^{(s+1)/2} \sup_{\sigma \in [-1,1]} |G'(\sigma)|.$$

Тому $\dfrac{G(\sigma)}{i\sigma} \in \overline{H}^0_s$, а $\tilde{g} \in \overline{H}^s_0[-\pi, \pi]$.

Лему доведено.

Позначимо через ∂ оператор $\partial \colon \overline{H}^s_0[-\pi, \pi] \to \overline{H}^{s-1}_0[-\pi, \pi]$ з областю визначення $D(\partial) = \{ \varphi \in \overline{H}^s_0[-\pi, \pi] : \varphi$ — парна$\}$. Тоді $\operatorname{Im}(\partial) = \{ \varphi \in \overline{H}^{s-1}_0[-\pi, \pi] : \varphi$ — непарна$\}$. Маємо $\|\partial g\|^{s-1}_0 = \|i\sigma \mathcal{F} g\|^0_{s-1} \leq \|\mathcal{F} g\|^0_s = \|g\|^s_0$, $g \in D(\partial)$, отже, ∂ — лінійний неперервний оператор. За лемою 1.1 цей оператор має обернений. Тоді $\partial^{-1} \colon \overline{H}^{s-1}_0[-\pi, \pi] \to \overline{H}^s_0[-\pi, \pi]$, $D(\partial^{-1}) = \operatorname{Im}(\partial)$, $\operatorname{Im}(\partial^{-1}) = D(\partial)$. За теоремою Банаха про обернений оператор ∂^{-1} є лінійним та неперервним, отже, для кожного $s \leq 0$ існує $M_s > 0$ таке, що

$$\|\partial^{-1} g\|^s_0 \leq M_s \|g\|^{s-1}_0, \quad g \in D(\partial^{-1}). \tag{1.13}$$

Легко бачити, що $M_s \geq 1$.

Лема 1.2. *Нехай* $g \in \tilde{H}^s_0[-\pi, \pi]$. *Тоді*

$$\left|\!\left|\!\left| \mathcal{E}(x, t) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \Omega g \right|\!\right|\!\right|^s_l \leq 2\sqrt{2} C_l^2 M_s |\!|\!| g |\!|\!|^s_0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.14}$$

де $C_l^2 > 0$ *— стала з нерівності* (1.2), *а* $M_s \geq 1$ *— стала з нерівності* (1.13).

Доведення. Враховуючи (1.2), маємо

$$\left|\!\left|\!\left| \mathcal{E}(x, t) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \Omega g \right|\!\right|\!\right|^s_l \leq C_l^2 |\!|\!| \mathcal{E}(x, t) * \Omega g |\!|\!|^s_0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Позначаючи $G = \mathcal{F} \Omega g$, одержуємо

$$|\!|\!| \mathcal{E}(x, t) * \Omega g |\!|\!|^s_0 = [\![\![\Sigma(\sigma, t) \mathcal{F}\, \Omega g]\!]\!]^0_s \leq$$

$$\leq \left[\!\left[\!\left[\begin{pmatrix} \cos(\sigma t) \\ -\sin(\sigma t) \end{pmatrix} G_0(\sigma) \right]\!\right]\!\right]^0_s + \left[\!\left[\!\left[\begin{pmatrix} \dfrac{\sin(\sigma t)}{\sigma} \\ \cos(\sigma t) \end{pmatrix} G_1(\sigma) \right]\!\right]\!\right]^0_s \leq$$

$$\leq \sqrt{2} \| G_0 \|^0_s = \left(\left(\left\| \frac{G_1(\sigma)}{i\sigma} \right\|^0_s \right)^2 + \left(\| G_1 \|^0_{s-1} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $\left\| \dfrac{G_1(\sigma)}{i\sigma} \right\|_s^0 = \left\| \partial^{-1}\Omega g_1 \right\|_0^s$, то, використовуючи (1.13), маємо

$$|||\mathcal{E}(x,t) * \Omega g|||_0^s \;\le\; 2\|g_0\|_0^s + \Big(2\big(M_s\|g_1\|_0^{s-1}\big)^2 + 2\big(\|g_1\|_0^{s-1}\big)^2\Big)^{-1/2} \;\le$$

$$\le\; 2\sqrt{2}M_s|||g|||_0^s, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Продовжуючи оцінку (1.15), звідси одержуємо (1.14).

Лему доведено.

Лема 1.3. *Нехай* $g\in \hat{H}_s^l$. *Тоді*

$$|||\mathcal{E}(x,t) * g|||_l^s \;=\; |||\,\Sigma(\sigma,t)\mathcal{F} g\,|||_s^l \;\le$$

$$\le\; \sqrt{4t^2+6}\,|||\,\mathcal{F} g\,|||_s^l \;=\; \sqrt{4t^2+6}\,|||g|||_l^s, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{1.16}$$

Доведення. Для кожного $t\in\mathbb{R}$ маємо

$$|||\mathcal{E}(x,t) * g|||_l^s \;=\; |||\,\Sigma(\sigma,t)\mathcal{F} g\,|||_s^l \;\le$$

$$\le\; \left|\left|\left| \begin{pmatrix} \cos(\sigma t) \\ -\sin(\sigma t)\end{pmatrix} \mathcal{F} g_0 \right|\right|\right|_s^l + \left|\left|\left| \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(\sigma t)}{\sigma} \\ \cos(\sigma t)\end{pmatrix} \mathcal{F} g_1 \right|\right|\right|_s^l \;\le$$

$$\le\; \sqrt{2}\,|\mathcal{F} g_0|_s^l + \left(\left(\left| \frac{\sin(\sigma t)}{\sigma}\mathcal{F} g_1 \right|_s^l\right)^2 + \left(|\mathcal{F} g_1|_{s-1}^l\right)^2\right)^{1/2}.$$

Враховуючи, що $\left(1+|\sigma|^2\right)\left|\dfrac{\sin(\sigma t)}{\sigma}\right|^2 \le 2(t^2+1)$, одержуємо (1.16).

Лему доведено.

Теорема 1.1. *Нехай* $T>0$, $w^0\in \tilde{H}_0^s[0,\pi]$, $K\in\mathbb{N}$ — *таке число, що* $\pi(K-1)<T\le\pi K$, *та існує* $\mu\in\mathbb{R}$ *таке, що*

$$\left|\partial^{-1}\Omega w_1^0(x) \pm \Omega w_0^0(x) + \mu\left[\frac{T}{\pi K}\right]\right| \;\le\; 2K \quad \text{майже скрізь на} \quad [-\pi,\pi], \tag{1.17}$$

$$\operatorname{supp}\{H(x)\partial^{-1}\Omega w_1^0(x) + w_0^0(x)\} \;\subset\; [0, T-\pi(K-1)], \tag{1.18}$$

$$\operatorname{supp}\{H(x)\partial^{-1}\Omega w_1^0(x) - w_0^0(x)\} \;\subset\; [\pi K - T, \pi]. \tag{1.19}$$

Тоді стан w^0 *є* 0*-керованим за час* T. *Окрім того, якщо*

$$\tilde{w}_1^0(x) \;=\; \partial^{-1}\Omega w_1^0(x)H(x) + \mu\left[\frac{T}{\pi K}\right]\big(H(t)-H(t-T)\big),$$

$$u_0^{2k+1}(t) \;=\; \frac{1}{2K}\left[\tilde{w}_1^0(t-2\pi k) + w_0^0(t-2\pi k)\right], \quad k \;=\; \overline{0,\,[(K-1)/2]},$$

$$u_0^{2k}(t) \;=\; \frac{1}{2K}\left[\tilde{w}_1^0(2\pi k - t) - w_0^0(2\pi k - t)\right], \quad k \;=\; \overline{1,\,[K/2]},$$

$$u_\pi^{2k+1}(t) \;=\; -\frac{1}{2K}\left[\tilde{w}_1^0(2\pi k+\pi-t) - w_0^0(2\pi k+\pi-t)\right], \quad k \;=\; \overline{0,\,[(K-1)/2]},$$

$$u_\pi^{2k}(t) \;=\; -\frac{1}{2K}\left[\tilde{w}_1^0(-2\pi k+\pi+t) + w_0^0(-2\pi k+\pi+t)\right], \quad k \;=\; \overline{1,\,[K/2]},$$

то керування

$$u_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{K} u_\alpha^k(t), \quad \alpha = 0, \pi,$$

задовольняють умови $\operatorname{supp} u_\alpha \subset [0, T]$, $\alpha = 0, \pi$, *та розв'язують проблему* 0-*керованості за час* T.

Доведення. З (1.17) випливає, що $u_\alpha \in \mathcal{B}(0, T)$, $\alpha = 0, \pi$. За формулою (1.12) $W^T = 0$, тобто стан W^0 є ε-керованим за час T (див. (1.18), (1.19)). На підставі твердження 1.1 робимо висновок, що стан w^0 є також 0-керованим за час T.

Теорему доведено.

Теорема 1.2. *Нехай* $T > 0$, $w^0 \in \tilde{H}_0^s[0, \pi]$, $K \in \mathbb{N}$ — *таке число, що* $\pi(K-1) < T \le \pi K$. *Тоді якщо стан* w^0 *є* 0-*керованим за час* T, *то умови* (1.17) – (1.19) *виконано*.

Доведення. За твердженням 1.2 стан $W^0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Omega w^0$ є ε-керованим за час T. Тому для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $W^n \in \mathbb{R}_T(W^0)$ таке, що $|||W^n|||_l^s < \frac{1}{n}$. Отже, існують $u_\alpha^n \in \mathcal{B}(0, T)$, $\alpha = 0, \pi$, такі, що

$$W^n = \mathcal{E}(x, T) * \left[W^0(x) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \begin{pmatrix} (\Omega u_0^n)(x) - (\Omega u_\pi^n)(x-\pi) \\ (\Omega(u_0^{n\prime}))(x) - (\Omega(u_\pi^{n\prime}))(x-\pi) \end{pmatrix} \right].$$

Застосовуючи лему 1.3 та формули (1.10) – (1.13), одержуємо

$$\Omega\{w_0^0(x) - \hat{u}_0^n(x)\} \to 0 \quad \text{та} \quad \{\partial^{-1}\Omega w_1^0(x) - \Xi \hat{u}_1^n(x)\} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{1.20}$$

в $\overline{H}_0^s[-\pi, \pi]$, а отже, і в $\mathcal{S}'$. Тут

$$\hat{u}_0^n(t) = \sum_{k=0}^{K} (-1)^{k+1} \left\{ u_0^{n,k}\left(2\pi\left[\frac{k}{2}\right] + (-1)^{k+1} t\right) + u_\pi^{n,k}\left(2\pi\left[\frac{k}{2}\right] + (-1)^k (t-\pi)\right)\right\},$$

$$\hat{u}_1^n(t) = \sum_{k=0}^{K} \left\{ u_0^{n,k}\left(2\pi\left[\frac{k}{2}\right] + (-1)^{k+1} t\right) - u_\pi^{n,k}\left(2\pi\left[\frac{k}{2}\right] + (-1)^k (t-\pi)\right)\right\},$$

$$u_\alpha^{n,p} = u_\alpha^n(H(x - \pi(p-1)) - H(x - \pi p)), \quad p = \overline{1, K}, \quad \alpha = 0, \pi.$$

Оскільки $u_\alpha^n \in \mathcal{B}(0, T)$, $\alpha = 0, \pi$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\left|\hat{u}_j^n(x)\right| \le 2K \quad \text{майже скрізь на} \quad [0, \pi], \quad j = 0, 1. \tag{1.21}$$

Використовуючи те, що $\mathcal{S}$ є щільним у $L^2(\mathbb{R})$ та $\operatorname{supp} \hat{u}_j^n \subset [0, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1$, з (1.20) одержуємо $\Omega \hat{u}_0^n(x) \to \Omega w_0^0(x)$ та $\Xi \hat{u}_1^n(x) \to \partial^{-1}\Omega w_1^0(x)$ при $n \to \infty$ в $(L^2(-\pi, \pi))'$. За теоремою Рісса $\Omega w_0^0 \in L^2(-\pi, \pi)$, $\partial^{-1}\Omega w_1^0 \in L^2(-\pi, \pi)$. Отже, з (1.20), (1.21) випливає (1.17) – (1.19).

Теорему доведено.

Таким чином, теореми 1.1 та 1.2 дають наступний критерій 0- та ε-керованості.

Висновок 1.1. *Нехай* $T > 0$, $w^0 \in \tilde{H}_0^s[0, \pi]$ *та* $K \in \mathbb{N}$ — *таке число, що* $\pi(K-1) < T \le \pi K$. *Тоді наступні твердження є рівносильними*:

i) *стан* w^0 *є* 0-*керованим за час* T;

ii) *стан* w^0 *є* ε-*керованим за час* T;

iii) *виконано три умови*:

$$\left| \partial^{-1}\Omega w_1^0(x) \pm \Omega w_0^0(x) + \mu \left[\frac{T}{\pi K}\right] \right| \le 2K \quad \textit{майже скрізь на } [-\pi, \pi]$$

$$\textit{для деякого} \quad \mu \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{supp}\{H(x)\partial^{-1}\Omega w_1^0(x) + w_0^0(x)\} \subset [0, T - \pi(K-1)],$$

$$\operatorname{supp}\{H(x)\partial^{-1}\Omega w_1^0(x) - w_0^0(x)\} \subset [\pi K - T, \pi].$$

Проілюструємо цей критерій прикладами.

***Приклад* 1.1.** Нехай $w_0^0(x) = 2\sin(x)$, $w_1^0(x) = 2\sin(2x)$ на $[0, \pi]$. Тоді для будь-якого $s \le 0$ $w^0 \in \tilde{H}_0^s[0, \pi]$. Маємо

$$\tilde{w}_1^0(x) = H(x)\partial^{-1}\Omega w_1^0(x) = H(x)\int_{-\infty}^{x}\Omega w_1^0(x)\,dx = 2\sin^2(x)[H(x) - H(x-\pi)].$$

Оскільки $\sup\left\{\left|\tilde{w}_1^0(x) \pm w_0^0(x)\right| : x \in [0, \pi]\right\} = 4$, то за теоремою 1.1 керування $u_0(t) = \frac{1}{2}(\sin t + \sin^2 t)$, $u_\pi(t) = \frac{1}{2}(\sin(\pi - t) + \sin^2(\pi - t))$, $t \in [0, 2\pi]$, розв'язують проблему 0-керованості системи (0.1), (0.2), (1.1) за час $T = 2\pi$. Оскільки $\operatorname{supp}(\tilde{w}_1^0(x) + w_0^0(x)) = \operatorname{supp}(\tilde{w}_1^0(x) - w_0^0(x)) = [0, \pi]$, то стан w^0 не є 0-керованим (ε-керованим) за час $T < 2\pi$.

***Приклад* 1.2.** Нехай

$$w_0^0(x) = x\left[H(x) - H\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{\pi}{4}\left[H\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - H\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)\right] +$$

$$+ (\pi - x)\left[H\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - H(x - \pi)\right],$$

$$w_1^0(x) = H(x) - 2H\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2H\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - H(x - \pi).$$

Тоді для будь-якого $s \le 0$ $w^0 \in \tilde{H}_0^s[0, \pi]$. Маємо

$$\tilde{w}_1^0(x) = H(x)\partial^{-1}\Omega w_1^0(x) = H(x)\int_{-\infty}^{x}\Omega w_1^0(x)\,dx =$$

$$= x\left[H(x) - H\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left[H\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - H\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)\right] +$$

$$+ (x - \pi)\left[H\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - H(x - \pi)\right].$$

Оскільки $\sup\left\{\left|\tilde{w}_1^0(x) \pm w_0^0(x)\right| : x \in [0, \pi]\right\} = \frac{\pi}{2}$, то за теоремою 1.1 керування

$$u_0(t) = u_\pi(t) = t\left[H(t) - H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4} - t\right)\left[H\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - H\left(t - \frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

розв'язують проблему 0-керованості системи (0.1), (0.2), (1.1) за час $T = \frac{3\pi}{4}$. Оскільки $\operatorname{supp}(\tilde{w}_1^0(x) + w_0^0(x)) = \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, $\operatorname{supp}(\tilde{w}_1^0(x) - w_0^0(x)) = \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$, то стан w^0 не є 0-керованим (ε-керованим) за час $T < \frac{3\pi}{4}$.

2. Релейні керування та тригонометрична проблема моментів Маркова. Розв'язок проблеми 0-керованості (керування), знайдений у п. 1, може бути досить складним для практичного використання. У цьому пункті ми будуємо релейні керування, що розв'язують проблему ε-керованості (релейним називається керування $u(t)$, $t \in (0, T)$, таке, що $|u(t)| = 1$ майже скрізь на $(0, T)$, $u(t) = 0$ майже скрізь на $\mathbb{R} \backslash (0, T)$ та число точок розриву є скінченним). Будемо розглядати систему тригонометричних проблем моментів Маркова, які побудовані за даними керованої системи, та доведемо, що деякі їхні розв'язки є релейними керуваннями, що розв'язують проблему ε-керованості.

Скрізь у цьому пункті будемо вважати, що $T > 0$, $w^0 \in \tilde{H}_0^s[0, \pi]$, $K \in \mathbb{N}$ — таке число, що $\pi(K-1) < T \le \pi K$. Окрім того, будемо вважати, що умову iii) висновку 1.1 виконано, та позначимо $\tilde{w}_1^0(x) = H(x)\partial^{-1}\Omega w_1^0(x) + \mu \left[\dfrac{T}{\pi K}\right](H(x) - H(x-T))$, $W^0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \Omega w^0$, $\tilde{W}_1^0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \Xi \tilde{w}_1^0(x)$.

Використовуючи твердження 1.1 та 1.2, ми можемо замість керованої системи (0.1), (0.2), (1.1) розглядати керовану систему (1.3) – (1.5), де $W(\cdot, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \Omega w(\cdot, t)$, $t \in (0, T)$, $W^T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \Omega w^T$.

Розглянемо звуження оператора непарного продовження $\tilde{\Omega} : \overline{H}_0^s[-\pi, \pi]$ з областю визначення $D(\tilde{\Omega}) = \overline{H}_0^s[0, \pi] \cap L^2(0, \pi)$. Маємо $\tilde{\Omega} f = \Omega f$, $f \in D(\tilde{\Omega})$. Тоді $\operatorname{Im}(\tilde{\Omega}) = \{\varphi \in H_0^s(-\pi, \pi) \cap L^2(-\pi, \pi) : \varphi$ — непарна$\}$. Легко побачити, що $\tilde{\Omega}$ взаємно однозначно відображує $D(\tilde{\Omega})$ на $\operatorname{Im}(\tilde{\Omega})$ та $(\tilde{\Omega}^{-1} g)(x) = g(x) H(x)$, $g \in \operatorname{Im}(\tilde{\Omega})$. Відмітимо, що неможливо для двох довільних функцій f_1 і f_2, що належать H_0^s, визначити $f_1 f_2$ (добуток цих двох функцій), але в розглядуваному випадку одна з функцій є фінітною та належить $L^2(\mathbb{R})$, а інша є обмеженою, тому наше означення $\tilde{\Omega}^{-1} g$ є коректним для $g \in D(\tilde{\Omega})$. Таким чином, $\tilde{\Omega}$ є оборотним лінійним оператором, $\tilde{\Omega}^{-1} : \overline{H}_0^s[-\pi, \pi] \to \overline{H}_0^s[0, \pi]$, $D(\tilde{\Omega}^{-1}) = \operatorname{Im}(\tilde{\Omega})$, $\operatorname{Im}(\tilde{\Omega}^{-1}) = D(\tilde{\Omega})$.

Лема 2.1. *Оператор* $\tilde{\Omega}^{-1}$ *є лінійним обмеженим, тобто для будь-якого* $s \le\le 0$ *існує* $P_s > 0$ *таке, що*

$$\left\| \tilde{\Omega}^{-1} g \right\|_0^s \le P_s \| g \|_0^s, \quad g \in \operatorname{Im}(\tilde{\Omega}) = D(\tilde{\Omega}^{-1}). \tag{2.1}$$

Доведення. Зазначимо, що оскільки H_0^s є банаховим простором [8] (гл. 1), то $\overline{H}_0^s[0, \pi]$ та $\overline{H}_0^s[-\pi, \pi]$ також є банаховими просторами. Доведемо, що $D(\tilde{\Omega}^{-1})$ та $\operatorname{Im}(\tilde{\Omega})$ є компактними лінійними підпросторами $\overline{H}_0^s[0, \pi]$ та $\overline{H}_0^s[-\pi, \pi]$ відповідно.

Нехай $[a, b]$ — сегмент $[0, \pi]$ або $[-\pi, \pi]$. Нехай також $\{g_n\}_{n=0}^\infty \subset \overline{H}_0^s[a, b] \cap L^2[a, b]$ та $g_n \to g$ при $n \to \infty$ в $\overline{H}_0^s[a, b]$. Покажемо, що $g \in L^2[a, b]$. Маємо $g_n \to g$ при $n \to \infty$ в $\mathcal{S}'$. Оскільки $\mathcal{S}$ є щільним в $L^2(\mathbb{R})$, то $g_n \to g$ при $n \to \infty$ в $(L^2(\mathbb{R}))'$. Тому за теоремою Рісса $g \in L^2[a, b]$. Отже, $D(\tilde{\Omega})$ є компактним лінійним підпростором $\overline{H}_0^s[0, \pi]$. Якщо додатково припустити, що у випадку $[a, b] = [-\pi, \pi]$ g_n є непарною ($n \in \mathbb{N}$), то g також є непарною. Тому $\operatorname{Im}(\tilde{\Omega})$ є компактним лінійним підпростором $\overline{H}_0^s[0, \pi]$. Маємо

$$\left\| \tilde{\Omega} g \right\|_0^s \le \sqrt{2} \| g \|_0^s, \quad g \in D(\tilde{\Omega}). \tag{2.2}$$

Застосовуючи теорему Банаха про обернений оператор, звідси одержуємо оцінку (2.1).

Лему доведено.

***Зауваження* 2.1.** Зазначимо, що з того, що $\operatorname{supp} f \subset [0, +\infty)$, взагалі кажучи, не випливає, що $\operatorname{supp} (1 + |D|^2)^s f \subset [0, +\infty)$. Тому одержати явну оцінку зверху для сталої P_s в (2.1) досить складно. Скориставшись лемою 2.1 та висновком 1.1, ми можемо уточнити твердження 1.2.

Твердження 2.1. *Стан* $w_0 \in \tilde{H}_0^s(0, \pi)$ *є* ε*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли стан* $W^0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \Omega w^0$, *що належить* $\tilde{H}_l^s$, *є* ε*-керованим за час* T.

Позначаючи

$$\hat{w}_0(x) = \frac{1}{2K} (\tilde{W}_1^0(x) + W_0^0(x))(H(x) - H(x - \pi K)),$$

$$\hat{w}_\pi(x) = \frac{1}{2K} (\tilde{W}_1^0(\pi - x) - W_0^0(\pi - x))(H(x) - H(x - \pi K))$$

та застосовуючи формулу (1.9), одержуємо

$$W^T(x) = \mathcal{E}(x, T) * \sum_{m=0}^{2K-1} \mathcal{T}_{2\pi m} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} (\hat{w}_0(x) - u_0(x)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k + \pi} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} (\hat{w}_\pi(x) - u_\pi(x)) \right\}. \tag{2.3}$$

З формули (1.2) випливає, що для будь-якого $g \in H_0^s$, $\operatorname{supp} g \subset [0, +\infty)$, маємо

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi K k} \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} g \right\|_l^s \le C_l^{2K} \left\| \Omega \begin{pmatrix} 1 \\ d/dx \end{pmatrix} g \right\|_0^s \le$$

$$\le 2 C_l^{2K} \| g \|_0^s \le \frac{2 C_l^{2K}}{c_l^K} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\pi K k} g \right\|_l^s.$$

Звідси на підставі лем 1.3, 2.1 та формул (1.2), (2.3) одержуємо

$$\| w^T \|_0^s \le \frac{P_s}{c_l^2} \| W^T \|_l^s \le 10 \pi K^2 \frac{P_s C_l^{2K}}{c_l^2 c_l^K} \left\{ \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\pi K k} (\hat{w}_0(x) - u_0(x)) \right\|_l^s + \right.$$

$$\left. + \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\pi K k + \pi} (\hat{w}_\pi(x) - u_\pi(x)) \right\|_l^s \right\}. \tag{2.4}$$

Розглянемо розвинення функцій $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{\pi K k} (\hat{w}_\alpha(x) - u_\alpha(x))$, $\alpha = 0, \pi$, в ряди Фур'є по $e^{-2mx/K}$. Маємо

$$\hat{\omega}_\alpha^m = \int_0^{\pi K} \hat{w}_\alpha(x) e^{i 2mx/K} dx, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \alpha = 0, \pi, \tag{2.5}$$

$$\nu_\alpha^m = \int_0^{\pi K} u_\alpha(x) e^{i 2mx/K} dx, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \alpha = 0, \pi. \tag{2.6}$$

Тоді

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{T}_{\pi Kk}(\hat{w}_\alpha(x)-u_\alpha(x)) = \frac{1}{\pi K}\sum_{m\in\mathbb{Z}}(\hat{\omega}_\alpha^m-\nu_\alpha^m)e^{-i2mx/K} \quad \text{в} \quad H_0^s, \quad \alpha = 0, \pi. \tag{2.7}$$

Оскільки $u_\alpha \in \mathcal{B}(0, T)$, $\alpha = 0, \pi$, а w^0 задовольняє умову iii) висновку 1.1, то

$$\left|\hat{\omega}_\alpha^m\right| \le 1, \quad \left|\nu_\alpha^m\right| \le 1, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad \alpha = 0, \pi. \tag{2.8}$$

Тому для $s < -1/2$ отримуємо

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{T}_{\pi Kk}(\hat{w}_\alpha(x)-u_\alpha(x))\right\|_l^s \le \frac{C_l^K}{\pi K}\sqrt{\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(1+\left(\frac{2m}{K}\right)^2\right)^s\left|\hat{\omega}_\alpha^m-\nu_\alpha^m\right|^2}, \quad \alpha = 0, \pi.$$

Продовжуючи (2.4), звідси знаходимо

$$\left|\left\|w^T\right\|\right|_0^s \le 10KP_s\frac{C_l^{2K}C_l^K}{c_l^2c_l^K}\left\{\sqrt{\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(1+\left(\frac{2m}{K}\right)^2\right)^s\left|\hat{\omega}_0^m-\nu_0^m\right|^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(1+\left(\frac{2m}{K}\right)^2\right)^s\left|\hat{\omega}_\pi^m-\nu_\pi^m\right|^2}\right\}. \tag{2.9}$$

Таким чином, доведено наступну теорему (див. (2.4), (2.7), (2.9)).

Теорема 2.1. *Нехай* $T > 0$, *для* $w^0 \in \tilde{H}_0^s[0, \pi]$ *виконано умову* iii) *висновку* 1.1 *та* $\hat{\omega}_\alpha^m$ *визначено за формулою* (2.5). *Тоді виконуються твердження*:

i) *стан* w^0 *є* 0*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли існують* $u_\alpha \in \mathcal{B}(0, T)$, $\alpha = 0, \pi$, *такі, що* $\hat{\omega}_\alpha^m = \nu_\alpha^m$, $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha = 0, \pi$, *де* ν_α^m *визначається формулою* (2.6);

ii) *стан* w^0 *є* ε*-керованим за час* T *тоді і лише тоді, коли для кожного* $\varepsilon > 0$ *існують* $u_{\alpha,\varepsilon} \in \mathcal{B}(0, T)$, $\alpha = 0, \pi$, *такі, що*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(1+\left(\frac{2m}{K}\right)^2\right)^s\left|\hat{\omega}_\alpha^m-\nu_{\alpha,\varepsilon}^m\right|^2 < \varepsilon^2, \quad \alpha = 0, \pi, \tag{2.10}$$

де $\nu_{\alpha,\varepsilon}^m$ *визначається формулою* (2.6) *з заміною* u_α *на* $u_{\alpha,\varepsilon}$. *Окрім того, якщо* (2.10) *виконано, то*

$$\left|\left\|w^T\right\|\right|_0^s \le \frac{20KP_sC_l^{2K}C_l^K}{c_l^2c_l^K}\varepsilon.$$

Зафіксуємо $\alpha = 0, \pi$ та розглянемо проблему пошуку такого $u_\alpha \in \mathcal{B}(0, T)$, що

$$\int_0^T u_\alpha(x)e^{i2mx/K}\,dx = \hat{\omega}_\alpha^m, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{2.11}$$

Така проблема називається тригонометричною проблемою моментів Маркова для нескінченної послідовності $\{\hat{\omega}_\alpha^m\}_{m=-\infty}^{+\infty}$. За теоремою 2.1 $u_\alpha \in \mathcal{B}(0, T)$, $\alpha = 0, \pi$, є розв'язками проблеми 0-керованості за час T для системи (0.1), (0.2), (1.1) в тому і лише в тому випадку, коли u_α, $\alpha = 0, \pi$, є розв'язками тригонометричної проблеми моментів Маркова для нескінченної послідовності $\{\hat{\omega}_\alpha^m\}_{m=-\infty}^{+\infty}$, визначеної формулами (2.5).

Розглянемо для фіксованого $\alpha = 0, \pi$, $N \in \mathbb{N}$ проблему пошуку $u_\alpha \in \mathcal{B}(0, T)$ такого, що

$$\int_0^T u_\alpha(x) e^{i2mx/K} dx = \hat{\omega}_\alpha^m, \quad m = \overline{-N, N}. \tag{2.12}$$

Така проблема називається тригонометричною проблемою моментів Маркова для скінченної послідовності $\{\hat{\omega}_\alpha^m\}_{m=-N}^N$.

Виявляється, що розв'язки таких тригонометричних проблем моментів для різних $N \in \mathbb{N}$ дають нам розв'язки проблеми ε-керованості за час T системи (0.1), (0.2), (1,1).

Теорема 2.2. *Нехай* $T > 0$, $s < -1/2$, *для* $w^0 \in \tilde{H}_0^s[0, \pi]$ *виконано умову* iii) *висновку* 1.1 *і* $K \in \mathbb{N}$ *таке, що* $\pi(K-1) < T \le \pi K$. *Нехай також* $\{\hat{\omega}_\alpha^m\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ *визначено формулою* (2.5). *Тоді якщо* $u_\alpha^N \in \mathcal{B}(0, T)$, $\alpha = 0, \pi$, *є розв'язками тригонометричних проблем моментів Маркова* (2.12) *для деякого* $N \in \mathbb{N}$, *то кінцевий стан* w^T *керованої системи* (0.1), (0.2), (1.1) *задовольняє умову*

$$\left|\left|\left| w^T \right|\right|\right|_0^s \le \frac{2^{s+6} P_s C_l^{2K} C_l^K N^{s+1/2}}{c_l^2 c_l^K K^{s-1} \sqrt{-2s-1}} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{2.13}$$

Доведення. Враховуючи умову iii) (висновок 1.1), те, що $u_\alpha^N \in \mathcal{B}(0, T)$, $\alpha = 0, \pi$, та (2.5), (2.6), (2.8), (2.9), одразу одержуємо (2.13).

Теорему доведено.

Позначимо

$$\mathcal{B}^N(0, T) = \{ u \in \mathcal{B}(0, T) \,|\, \exists T_*(0, T) \ \ (|u(t)| = 1 \ \text{ майже скрізь на } (0, T_*))$$
$$\wedge \ (u(t) = 0 \ \text{ майже скрізь на } (T_*, T))$$
$$\wedge \ (u(t) \ \text{ має не більше ніж } 2N \text{ точок розриву на } (0, T_*))\}.$$

Відомо [12] (гл. 7), що якщо скінченна тригонометрична проблема моментів (2.12) є розв'язною, то вона має розв'язок, що належить $\mathcal{B}^N(0, T)$. На підставі теореми 2.2 робимо висновок, що за умов цієї теореми можна знайти розв'язки $u_\alpha^N \in \mathcal{B}(0, T)$, $\alpha = 0, \pi$, проблеми моментів (2.12), і ці розв'язки дають нам релейні керування, що розв'язують проблему ε-керованості, а формула (2.13) визначає оцінку точності влучення в 0. Отже, ми можемо сформулювати такий висновок.

***Висновок* 2.1.** *Нехай* $T > 0$, $s < -1/2$, *для* $w^0 \in \tilde{H}_0^s[0, \pi]$ *виконано умову* iii) *висновку* 1.1 *і* $K \in \mathbb{N}$ *таке, що* $\pi(K-1) < T \le \pi K$. *Нехай також* $\{\hat{\omega}_\alpha^m\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ *визначено формулою* (2.5). *Тоді для кожного* $N \in \mathbb{N}$ *існують* $u_\alpha^N \in \mathcal{B}^N(0, T)$, $\alpha = 0, \pi$, — *розв'язки тригонометричних проблем моментів Маркова* (2.12) *для цього* N, *та для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує* $N \in \mathbb{N}$ *таке, що кінцевий стан* w^T *керованої системи* (0.1), (0.2), (1.1) *задовольняє умову* $\left|\left|\left| w^T \right|\right|\right|_0^s \le \varepsilon$, *причому* N *визначається умовою* $\dfrac{2^{s+6} P_s C_l^{2K} C_l^K N^{s+1/2}}{c_l^2 c_l^K K^{s-1} \sqrt{-2s-1}} < \varepsilon$.

У теоремі 2.2 та висновку 2.1 доведено, що побудовані релейні керування забезпечують збіжність до нуля кінцевого стану w^T в $H_0^s \times H_0^{s-1}$ лише за умови $s < -1/2$. Покажемо на прикладі, що ця умова є істотною.

***Приклад* 2.1.** Нехай $T \in (0, \pi]$, $w_0^0 = \dfrac{1}{2}$ на $(0, \pi)$, $w_1^0(x) \in H_0^{s-1}(0, \pi)$, $n \in \mathbb{N}$, $u_\alpha \in \mathcal{B}^N(0, T)$, $\alpha = 0, \pi$. З формул (1.2), (1.9) та леми 1.3 одержуємо

$$c_l^2 \left\| \Omega\big(w_0^0(x) - u_0(x) - u_\pi(\pi - x)\big) \right\|_0^s \le$$

$$\le \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_{2\pi k} \begin{pmatrix} \Omega\big(w_0^0(x) - u_0(x) - u_\pi(\pi - x)\big) \\ \Omega w_1^0(x) - \big(\Xi(u_0(x) - u_\pi(\pi - x))\big)' \end{pmatrix} \right\|_l^s \le$$

$$\le \left\| \mathcal{E}(x, -T) \right\|_l^s \le \sqrt{4\pi^2 + 6} \left\| W^T \right\|_l^s \le C_l^2 \sqrt{4\pi^2 + 6} \left\| \Omega w^T \right\|_0^s.$$

Отже, звідси на підставі леми 2.1 маємо

$$\left\| w^T \right\|_0^s \ge \frac{c_l^2}{P_s C_l^2 \sqrt{8\pi^2 + 12}} \left\| w_0^0(x) - u_0(x) - u_\pi(\pi - x) \right\|_0^s.$$

Для $s = 0$

$$\left\| w_0^0(x) - u_0(x) - u_\pi(\pi - x) \right\|_0^0 \ge \frac{\pi}{2},$$

тому

$$\left\| w^T \right\|_0^0 \ge \frac{\pi c_l^2}{2 P_s C_l^2 \sqrt{8\pi^2 + 12}} = \varepsilon_0. \tag{2.14}$$

Таким чином, для заданих T, w^0 у випадку $s = 0 \ge -1/2$ існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ та будь-яких $u_\alpha \in \mathcal{B}^N(0, T)$, $\alpha = 0, \pi$, кінцевий стан w^T керованої системи (0.1), (0.2), (1.1) задовольняє оцінку (2.14).

1. *Lasiecka I., Triggiani R.* Control theory for partial differential equations: continuous and approximation theories. 2. Abstract hyperbolic-like systems over a finite time horizon. – Cambridge Univ. Press, 2000.
2. *Krabs W., Leugering G.* On boundary controllability of one-dimension vibrating systems by $W_0^{1,p}$-controls for $p \in [0, \infty)$ // Math. Meth. Appl. Sci. – 1994. – **17**. – P. 77 – 93.
3. *Gugat M., Leugering G.* Solutions of L^p-norm-minimal control problems for the wave equation // Comput. Appl. Math. – 2002. – **21**, № 1. – P. 227 – 244.
4. *Negreanu M., Zuazua E.* Convergence of multigrid method for the controllability of a 1-d wave equation // C. r. math. Acad. sci. – 2004. – **338**, № 5. – P. 413 – 418.
5. *Gugat M.* Analytic solution of L^∞-optimal control problems for the wave equation // J. Optimiz. Theory and Appl. – 2002. – **114**. – P. 151 – 192.
6. *Fattorini H. O.* Infinite dimensional optimization and control theory. – Cambridge Univ. Press, 1999.
7. *Schwartz L.* Théorie des distributions, I, II. – Paris: Hermann, 1950 – 1951.
8. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. – М.: Физматгиз, 1994. – 336 с.
9. *Sklyar G. M., Fardigola L. V.* The Markov power moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half-axis // J. Math. Anal. and Appl. – 2002. – **276**, № 1. – P. 109 – 134.
10. *Sklyar G. M., Fardigola L. V.* The Markov trigonometric moment problem in controllability problems for the wave equation on a half-axis // Mat. Fizika, Analiz, Geometriya. – 2002. – **9**, № 2. – P. 233 – 242.
11. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. – М.: Физматгиз, 1958. – Вып. 3. – 308 с.
12. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 552 с.

Одержано 24.01.2005,
після доопрацювання — 02.02.2006