УДК 517.544+517.547+517.57

І. Е. Чижиков (Львів. нац. ун-т)

ПРО ПОВНИЙ ОПИС КЛАСУ АНАЛІТИЧНИХ У КРУЗІ ФУНКЦІЙ БЕЗ НУЛІВ ІЗ ЗАДАНИМИ ВЕЛИЧИНАМИ ПОРЯДКІВ

For arbitrary $0 \le \sigma \le \rho \le \sigma + 1$, we describe the class A_σ^ρ of functions $g(z)$ analytic in the unit disk $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ such that $g(z) \neq 0$, $\rho_T[g] = \sigma$, $\rho_M[g] = \rho$, where $M(r, g) = \max\{|g(z)|: |z| \le r\}$, $T(r, u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln^+\left|g(re^{i\varphi})\right| d\varphi$, $\rho_M[g] = \limsup_{r\uparrow 1} \dfrac{\ln\ln^+ M(r, g)}{-\ln(1-r)}$, $\rho_T[g] = \limsup_{r\uparrow 1} \dfrac{\ln^+ T(r, g)}{-\ln(1-r)}$.

Для произвольных $0 \le \sigma \le \rho \le \sigma + 1$ описан класс A_σ^ρ аналитических в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций $g(z)$ таких, что $g(z) \neq 0$, $\rho_T[g] = \sigma$, $\rho_M[g] = \rho$, где $M(r, g) = \max\{|g(z)|: |z| \le r\}$, $T(r, u) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln^+\left|g(re^{i\varphi})\right| d\varphi$, $\rho_M[g] = \limsup_{r\uparrow 1} \dfrac{\ln\ln^+ M(r, g)}{-\ln(1-r)}$, $\rho_T[g] = \limsup_{r\uparrow 1} \dfrac{\ln^+ T(r, g)}{-\ln(1-r)}$.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Позначимо через $A(\mathbb{D})$ та $H(\mathbb{D})$ класи відповідно аналітичних та гармонічних функцій в $\mathbb{D}$. Нехай $M(r, f) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$, $T(r, f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta$, де $x^+ = \max\{x, 0\}$, $0 < r < 1$ і $f \in A(\mathbb{D})$ — максимум модуля та характеристика Неванлінни відповідно.

Порядки зростання $f \in \mathbb{D}$ визначають так:

$$\rho_M[f] = \limsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+\ln^+ M(r, f)}{-\ln(1-r)}, \qquad \rho_T[f] = \limsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln^+ T(r, f)}{-\ln(1-r)}.$$

Відомо, що

$$\rho_T[f] \le \rho_M[f] \le \rho_T[f] + 1, \tag{1}$$

і ці співвідношення уточнити не можна.

Для заданих $\alpha > 1$, ρ, $\rho \le \alpha \le \rho + 1$, К. Лінден [1] побудував аналітичну в $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ функцію у вигляді так званого добутку Нафталевича – Цудзі

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{1 - |a_n|^2}{1 - \bar{a}_n z}, p\right), \qquad \sum_n (1 - |a_n|)^{p+1} < \infty,$$

з властивістю $\rho_T[g] = \rho$, $\rho_M[g] = \alpha$. Тут

$$E(w, p) = (1 - w)\exp\{w + w^2/2 + \ldots + w^p/p\}, \qquad p \in \mathbb{Z}_+,$$

— первинний множник Вейєрштрасса, a_n — нулі $g(z)$.

Разом з тим проблема повного опису класу A_σ^ρ функцій $f \in A(\mathbb{D})$ таких, що $\rho_T[g] = \sigma$, $\rho_M[g] = \rho$, для заданих $\rho \le \alpha \le \rho + 1$ залишалась не розв'язаною.

Основним результатом статті є повний опис підкласу A_σ^ρ, який складається з аналітичних функцій без нулів у $\mathbb{D}$. Цей результат отримується з опису відповідного класу гармонічних у $\mathbb{D}$ функцій. Метод доведення спирається на параметричне зображення підкласу $H(\mathbb{D})$ функцій скінченного порядку ($\rho_M[u] < +\infty$), одержане М. М. Джрбашяном [2], та апарат дробового інтегрування.

1.1. Допоміжні відомості про дробове інтегрування. Для того щоб сформулювати результат, нам потрібні відомості з інтегрування дробового порядку [2] (гл. IX), [3] (гл. XII.8). Для $f \in L(a, b)$ (інтегровної за Лебегом на (a, b)) дробовий інтеграл Рімана – Ліувілля F_α порядку $\alpha > 0$ визначається формулою [2]

$$F_\alpha(r) = D^{-\alpha} f(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-x)^{\alpha-1} h(x)\,dx, \qquad r \in (a, b),$$

$$D^0 h(r) \equiv h(r), \qquad D^\alpha h(r) = \frac{d^p}{dr^p}\{D^{-(p-\alpha)} h(r)\}, \qquad \alpha \in (p-1, p],$$

де $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функція. F_α неперервна при $\alpha \geq 1$ і збігається з первісними відповідного порядку при $\alpha \in \mathbb{N}$. Зазначимо, що при $\alpha < 0$ оператор D^α є асоціативним та комутативним як функція α.

Якщо ми маємо справу з періодичними функціями, зокрема з тригонометричними рядами, то означення Рімана – Ліувілля є незручним. Тому наведемо ще означення, що належить Г. Вейлю. Нехай $f \in L(0, 2\pi)$. Припустимо, що

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0. \tag{2}$$

Якщо $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$, $c_0 = 0$, — ряд Фур'є f, то дробовий інтеграл (похідна) порядку α визначається рядом Фур'є

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_n e^{inx}}{(in)^\alpha} \overset{\alpha>0}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\Psi_\alpha(x-t)\,dt, \tag{3}$$

де $\Psi_\alpha(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{inx}(in)^{-\alpha}$ є збіжним майже скрізь на $[0, 2\pi]$ при $\alpha > 0$. Тут і далі $i^\alpha = e^{i\pi\alpha/2}$. Інтеграл з (3) існує майже скрізь, його значення інтегровне, а ряд з (3) збіжний майже скрізь і є рядом Фур'є f_α. При цьому f_α задовольняє (2). Позначимо f_α через $I_\alpha[f]$. Оператор I_α має ті самі властивості, що і D^α. При $\alpha \in (0, 1)$ похідна $f_{-\alpha}$ порядку α визначається формулою $f_{-\alpha}(x) = \frac{d}{dx} f_{1-\alpha}(x)$. Якщо ж $\alpha > 0$, $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$, то $f_{-\alpha}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f_{n-\alpha}(x)$. Між означеннями Рімана – Ліувілля та Г. Вейля існує такий зв'язок:

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)\Psi_\alpha(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) r_\alpha(x-t)\,dt,$$

де $r_\alpha(x)$ — аналітична функція від x, $\alpha > 0$.

Нехай $\psi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Через BV і AC позначимо класи функцій обмеженої зміни та абсолютно неперервних на $[0, 2\pi]$ відповідно. Якщо $\psi_{-\beta} \in AC$, $\alpha > 0$, писатимемо $\psi \in AC^{\beta}$. Аналогічно $\psi \in BV^{\beta}$, якщо $\psi_{-\beta} \in BV$. Введемо також позначення $f_{\alpha}^{*}(x) = i^{\alpha} f_{\alpha}(x) = \sum_{n \neq 0} c_n e^{inx} n^{-\alpha}$ для $f(x) \sim \sum_{n \neq 0} c_n e^{inx}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Нехай

$$\omega(\delta, \psi) = \sup\{|\psi(x) - \psi(y)| : x, y \in [0, 2\pi],\ |x - y| < \delta\}$$

— модуль неперервності функції ψ.

Як і в [3], будемо говорити, що $\psi \in \Lambda_{\gamma}$, якщо $\omega(\delta, \psi) = O(\delta^{\gamma})$ $(\delta \downarrow 0)$.

Вплив інтегрування та диференціювання на модуль неперервності описує теорема A.

Теорема A. 1. *Нехай* $0 \le \alpha < 1$, $\beta > 0$, $f \in \Lambda_{\alpha}$. *Тоді*:

а) $f_{\beta} \in \Lambda_{\alpha+\beta}$ *при* $\alpha + \beta < 1$;

б) $f_{\beta} \in \Lambda_{1}$ *при* $\alpha + \beta > 1$.

2. *Нехай* $0 < \gamma < \alpha < 1$. *Тоді*:

а) $f_{-\gamma} \in \Lambda_{\alpha-\gamma}$ *при* $f \in \Lambda_{\alpha}$;

б) $f_{-\gamma} \in \Lambda_{1-\gamma}$ *при* $f \in \Lambda_{1}$.

Пункти 2, 1а) випливають з теорем (8.13), (8.14) [3] (гл. XII, теорема 2), пункт 1б) доведемо в п. 3.

2. Зображення і зростання гармонічних функцій. Основні результати. Для $u \in H(\mathbb{D})$ означимо максимум модуля $B(r, u) = \max\{u(z) : |z| \le r\}$ та характеристику Неванлінни $T(r, u) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^{+}(re^{i\varphi})\, d\varphi$. Введемо порядки

$$\rho_B[u] = \limsup_{r \uparrow 1} \frac{\ln^{+} B(r, u)}{-\ln(1 - r)}, \qquad \rho_T[u] = \limsup_{r \uparrow 1} \frac{\ln^{+} T(r, u)}{-\ln(1 - r)}.$$

Подібно до (1) маємо співвідношення

$$\rho_T[u] \le \rho_M[u] \le \rho_T[u] + 1.$$

Нам знадобляться розвинення узагальнених ядер Коші, Шварца та Пуассона:

$$C_{\alpha}(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{\alpha+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{\Gamma(k+1)} z^{k},$$
$$S_{\alpha}(z) = 2C_{\alpha}(z) - C_{\alpha}(0), \qquad P_{\alpha}(r, \varphi) = \operatorname{Re}\{2C_{\alpha}(re^{i\varphi}) - C_{\alpha}(0)\}. \tag{4}$$

Зазначимо, що $P_0(r, \varphi) = r^{-\alpha} D^{-\alpha}(P_{\alpha}(r, \varphi))$, $P_{\alpha}(r, \varphi) = D^{\alpha}(r^{\alpha} P_0(r, \varphi))$, де оператор D діє за змінною r.

Нехай U_{α} — підклас $H(\mathbb{D})$ таких функцій, що

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left| u_{\alpha}(re^{i\varphi}) \right| d\varphi = M_{\alpha} < +\infty,$$

де $u_{\alpha}(re^{i\varphi}) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} u(re^{i\varphi})$. Нехай U_{σ}^{ρ} — клас функцій $u \in H(\mathbb{D})$ таких, що $\rho_T[u] = \sigma$, $\rho_B[u] = \rho$ для заданих $0 \le \rho \le \sigma \le \rho + 1$.

Теорема B ([2], теорема 9.10). *Нехай* $\alpha > -1$. *Тоді* $u \in U_{\alpha}$ *тоді і лише тоді, коли*

$$u(re^{i\varphi}) = \int\limits_0^{2\pi} P_\alpha(r, \varphi - \theta)\, d\psi(\theta), \tag{5}$$

де $\psi \in BV[0, 2\pi]$. *При цьому* $\psi(\theta) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^\theta u_\alpha(r_n e^{i\theta})\, d\theta$ *для деякої послідовності* $r_n \uparrow 1$.

З теорії, побудованої М. М. Джрбашяном [2] (гл. IX), можна отримати наступне твердження, не сформульоване ним у явному вигляді.

Твердження. *Нехай* $u \in H(D)$. *Тоді* $\rho_T[u] = \inf\{\alpha \geq 0 : u \in U_\alpha\}$.

Виявляється, що зростання $B(r, u)$, де u має вигляд (5), описується в термінах модуля неперервності ψ.

Теорема C [4]. *Нехай* $\alpha \geq 0$, $0 < \gamma < 1$. *Функція* $u \in H(\mathbb{D})$ *зображується у вигляді* (5), *де* $\psi \in \mathrm{BV} \cap \Lambda_\gamma$, *тоді і лише тоді, коли* $u \in U_\alpha$ *і*

$$B(r, u) = O((1-r)^{\gamma-\alpha-1}), \quad r \uparrow 1.$$

Слід зазначити, що доведення теореми C подібне до доведення теореми D, встановленої у випадку, коли $\psi \in \mathrm{AC}$, у [5] (див. також [3], гл. VII, теорема 5.1).

Теорема D. *Нехай* $u \in H(D)$, $0 < \gamma \leq 1$. *Тоді*

$$u(re^{i\varphi}) = \int\limits_0^{2\pi} P_0(r, \varphi - t)\, v(t)\, dt$$

для деякої $v \in \Lambda_\gamma$ *тоді і лише тоді, коли*

$$B\left(r, \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = O((1-r)^{\gamma-1}), \quad r \uparrow 1.$$

Аналоги цитованих теорем є правильними і для аналітичних функцій. Слід ще згадати близький до предмету розгляду даної статті результат Ф. А. Шамояна [6] (теорема 3).

Теорема E. *Нехай* $F(z) = \exp\left\{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} S_\alpha(ze^{-i\theta})\, d\psi(\theta)\right\}$. *Тоді*

$$\sup_{0<r<1} \int\limits_0^r (r-t)^{\alpha-1} T(t, F)\, dt < +\infty$$

тоді і лише тоді, коли:

1) $\psi \in \mathrm{AC}$;

2) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{|\psi(\theta+t) - 2\psi(\theta) + \psi(\theta-t)|}{t^2}\, dt\, d\theta < +\infty.$

Теорема E наштовхує на думку, що за величину порядку $\rho_T[u]$, де u має вигляд (5), відповідають властивості ψ, пов'язані з абсолютною неперервністю. Це, власне, встановлює теорема 1, яка є ключовим результатом даної статті.

Теорема 1. *Нехай* u *має вигляд* (5), $\alpha \geq 0$, $\psi \in \mathrm{BV}$. *Тоді*:

1) $\rho_T[u] = (\alpha - \gamma_1)^+$, *де* $\gamma_1 = \sup\{\tau \geq 0 : \psi \in \mathrm{AC}^\tau\}$;

2) $\rho_T[u] = (\alpha - \gamma_2)^+$, *де* $\gamma_2 = \sup\{\tau \geq 0 : \psi \in \mathrm{BV}^\tau\}$.

Зазначимо, що $\gamma_1 = \gamma_2$ для довільної функції ψ. Справді, нерівність $\gamma_2 \geq \gamma_1$ є очевидною, позаяк $\mathrm{AC}^\tau \subset \mathrm{BV}^\tau$. Якщо ж $\psi \in \mathrm{BV}$, $\psi(x) \sim \sum_{n\neq 0} c_n e^{inx}$, то $\psi_\beta(x) = \sum_{n\neq 0} c_n n^{-\beta} e^{inx} \in \mathrm{AC}$ для довільного $\beta > 0$, тобто $\mathrm{BV}^{\tau+\beta} \subset \mathrm{AC}^\tau$ для довільного $\beta > 0$ [7, c. 31].

Нехай $\tau[\psi] = \sup\{\gamma \geq 0 : \psi \in \Lambda_\gamma\}$, $\gamma[\psi] = \sup\{\tau \geq 0 : \psi \in \mathrm{AC}^\tau\}$.

Теорема 2. *Нехай* $0 \leq \sigma \leq \rho \leq \sigma + 1 < +\infty$, $u \in H(\mathbb{D})$. *Функція* $u \in U_\sigma^\rho$ *тоді і лише тоді, коли* $(\forall \alpha > \sigma)$ $(\exists \psi \in \mathrm{BV})$ $u(z)$ *має вигляд* (5), $\sigma = (\alpha - \gamma[\psi])^+$ *і* $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = 1 - \rho + \sigma$.

***Наслідок* 1.** *Нехай u має вигляд* (5), $\alpha \geq 0$, $\psi \in \mathrm{BV}$. *Тоді* $\rho_T[u] = (\alpha - \gamma[\psi])^+$, $\rho_B[u] = \rho_T[u] + 1 - \tau[\psi_{\rho_T[u]-\alpha}]$.

***Зауваження* 1.** При $\sigma > 0$ умова $\sigma = (\alpha - \gamma[\psi])^+$ є рівносильною умові $\gamma[\psi] = \alpha - \sigma$.

***Зауваження* 2.** Необхідність теореми 2 не має місця для $\alpha = \sigma$. Розглянемо функцію $u(z) = \mathrm{Re}\{h(z)\}$, $h(z) = (1-z)^{-\rho} \ln \dfrac{1}{1-z}$, де $\rho \geq 1$, гілку многозначної функції $h(z)$ в $\mathbb{D}$ вибрано так, щоб $h(1/2) = 2^\rho \ln 2$. Очевидно, що $B(r, u) = (1-r)^{-\rho} \ln \dfrac{1}{1-r}$, зокрема $\rho_M[g] = \rho$. З оцінки для $B(r, u)$ випливає, що $T(r, u) \geq c_0 (1-r)^{-\rho+1} \ln \dfrac{1}{1-r}$, $r \uparrow 1$, але $\rho_T[u] = \rho - 1$. З доведення леми 3 випливає, що $u(z)$ не можна зобразити у вигляді (5) з $\alpha = \rho - 1$, бо тоді б мали $T(r, u) = O((1-r)^{-\rho+1})$, $r \uparrow 1$.

3. Допоміжні твердження. Наступна лема, яка має і самостійний інтерес, є основною при доведенні теореми 1.

Лема 1. *Нехай* $\alpha > 0$, $\beta > -\alpha - 1$, $\psi \in \mathrm{AC}$ (*при* $\beta < 0$ *нехай ще* $\psi \in \mathrm{AC}^{-\beta}$),

$$g(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} C_\alpha(re^{i(\varphi - t)})\, d\psi(t). \tag{6}$$

Тоді

$$g(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} C_{\alpha+\beta}(re^{i(\varphi - t)})\, d\psi_\beta^*(t) + D_1 Q_{\alpha\beta}(re^{i\varphi}), \tag{7}$$

де

$$Q_{\alpha\beta}(z) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} C_{\alpha+\beta-1}(ze^{-it})\, d\chi(t), \ \chi(t) = \psi_\beta^*(t) + \tilde{\chi}(t), \ \tilde{\chi} \in \Lambda_1, & \alpha + \beta > 1, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} C_0(ze^{-it})\, d\psi_\beta^*(t) + D_2 \int_0^{2\pi} \ln(1 - ze^{-it})\, d\psi_\beta^*(t) + q_{\alpha\beta}(z), & \alpha + \beta = 1, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} C_{\alpha+\beta-1}(ze^{-it})\, d\psi_\beta^*(t) + q_{\alpha\beta}(z), & 0 < \alpha + \beta < 1, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1 - ze^{-it})\, d\psi_\beta^*(t) + q_{\alpha\beta}(z), & \alpha + \beta = 0, \\ q_{\alpha\beta}(z), & -1 < \alpha + \beta < 0, \end{cases}$$

$q_{\alpha\beta}(z)$ *— обмежена в* $\overline{\mathbb{D}}$ *аналітична функція,* D_1, D_2 *— сталі, залежні лише від* α *і* β.

Тут і далі гілку $\operatorname{Ln} w$ вибрано так, щоб $\ln 1 = 0$.

Можна довести аналогічне твердження для гармонічних функцій, проте обмежимося лише окремим випадком, який нам буде потрібен для доведення теорем.

Лема 2. *Нехай* $\alpha > 0$, $\beta > -\alpha$, $\psi \in \mathrm{AC}$ (*при* $\beta < 0$ *нехай ще* $\psi \in \mathrm{AC}^{-\beta}$), $u(z)$ *має вигляд* (5). *Тоді*

$$u(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} P_{\alpha+\beta}(r, \varphi - t)\, d\psi_\beta^*(t) + D_1' E_{\alpha\beta}(re^{i\varphi}), \tag{8}$$

де

$$E_{\alpha\beta}(re^{i\varphi}) =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} P_{\alpha+\beta-1}(r, \varphi - t)\, d\chi(t), \ \ \chi(t) = \psi_\beta^*(t) + \tilde{\chi}(t), \ \ \tilde{\chi} \in \Lambda_1, & \alpha + \beta > 1, \\ \int\limits_0^{2\pi} P_{\alpha+\beta-1}(r, \varphi - t)\, d\psi_\beta^*(t) + e_{\alpha\beta}(z), & 0 < \alpha + \beta < 1, \end{cases}$$

$e_{\alpha\beta}(z)$ *— обмежена в* $\overline{\mathbb{D}}$ *гармонічна функція,* D_1' *— стала, залежна лише від* α *і* β.

Доведення леми **1.** Нехай $\alpha + \beta > -1$. Очевидно, що

$$g(0) = \int_0^{2\pi} C_\alpha(0)\, d\psi(t) = \Gamma(\alpha+1)\big(\psi(2\pi) - \psi(0)\big).$$

Позначимо $\tilde{g}(z) = g(z) - g(0)$, $\tilde{C}_\alpha(z) = C_\alpha(z) - C_\alpha(0)$. Тоді $\tilde{g}(re^{i\varphi})$, $\tilde{C}_\alpha(re^{i\varphi})$ задовольняють умову (2) за змінною φ.

Продовжимо ψ на $\mathbb{R}$ за формулою $\psi(t + 2\pi) - \psi(t) = \psi(2\pi) - \psi(0)$. З (4) і (6) одержуємо

$$\tilde{g}(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} \tilde{C}_\alpha(re^{i(\varphi - t)})\, d\psi(t) = \int_0^{2\pi} \tilde{C}_\alpha(re^{-i\theta})\psi'(\theta + \varphi)\, d\theta. \tag{9}$$

За умовою леми ψ_β, а отже, і ψ_β^* належать до AC. Подіємо оператором I_β на (9). За теоремою Фубіні маємо

$$I_\beta[\tilde{g}](re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} \tilde{C}_\alpha(re^{-i\theta}) I_\beta[\psi'(\theta + \varphi)]\, d\theta =$$

$$= i^{-\beta} \int_0^{2\pi} \tilde{C}_\alpha(re^{-i\theta})(\psi_\beta^*)'(\theta + \varphi)\, d\theta = i^{-\beta} \int_0^{2\pi} \tilde{C}_\alpha(re^{i(\varphi - t)})\, d\psi_\beta^*(t) =$$

$$= i^{-\beta} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{\Gamma(k+1)} r^k e^{i(\varphi - t)k}\, d\psi_\beta^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(r) e^{ik\varphi}, \tag{10}$$

де

$$\mu_k(r) = i^{-\beta} \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{\Gamma(k+1)} \int_0^{2\pi} e^{-itk}\, d\psi_\beta^*(t)\, r^k.$$

Подіємо тепер на рівність (10) оператором $I_{-\beta}$. Одержуємо

$$\tilde{g}(re^{i\varphi}) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta}\mu_k(r)e^{ik\varphi} = \int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\beta}\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}r^k e^{i(\varphi-t)k}d\psi_{\beta}^{*}(t) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+1)}r^k e^{i(\varphi-t)k}d\psi_{\beta}^{*}(t) +$$

$$+ \int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{k^{\beta}\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)} - \frac{\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+1)}\right)r^k e^{i(\varphi-t)k}d\psi_{\beta}^{*}(t) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\tilde{C}_{\alpha+\beta}(re^{i\varphi-t})d\psi_{\beta}^{*}(t) + g_1(re^{i\varphi}), \tag{11}$$

де

$$g_1(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} G(re^{i(\varphi-t)})d\psi_{\beta}^{*}(t), \qquad G(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k z^k,$$

$$d_k = \frac{\Gamma(k+\alpha+\beta+1) - k^{\beta}\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)}.$$

З асимптотики $\Gamma(z)$ випливає, що $d_k = O(k^{\alpha+\beta-1})$, $k \to \infty$. Проте нам потрібна точніша оцінка. Для цього використаємо ряд Стірлінга [8, с. 40] (гл. 12.33, теорема 2)

$$\Gamma(x) = x^{x-1/2}e^{-x}\sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right), \quad x \to +\infty.$$

Нехай $y = O(1)$, $x \to +\infty$, тоді за допомогою обчислень (можна застосувати пакет Maple) одержимо

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} = x^y\left(1 + \frac{y^2-y}{2x} + \frac{3y^4-10y^3+9y^2-2y}{24x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right), \quad x \to +\infty. \tag{12}$$

Для знаходження асимптотики d_k застосуємо (12) з $x = k+1$, $y \in \{\alpha, \alpha+\beta\}$. В результаті отримаємо

$$d_k = D_1k^{\alpha+\beta-1} + D_3k^{\alpha+\beta-2} + O(k^{\alpha+\beta-3}), \quad k \to +\infty,$$

де D_1, D_3 — сталі, які залежать лише від α та β.

Якщо $\alpha+\beta < 0$, то

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k r^k = O\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\alpha+\beta-1}\right) = O(1), \quad 0 \le r \le 1,$$

тобто $G(z)$, а отже і $g_1(z)$, — обмежена аналітична функція в $\overline{\mathbb{D}}$.

Якщо $\alpha+\beta = 0$, маємо $d_k = D_1/k + O(k^{-2})$, $k \to +\infty$. Звідси знаходимо $G(z) = -D_1\ln(1-z) + g_3(z)$, де g_3 — обмежена аналітична функція в $\overline{\mathbb{D}}$.

При $\alpha+\beta > 0$ з огляду на те, що

$$\frac{\Gamma(k+\alpha+\beta)}{\Gamma(k+1)} = k^{\alpha+\beta-1}\left(1 + \frac{K_1}{k} + \frac{K_2}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right), \quad k \to +\infty, \tag{13}$$

одержуємо

$$d_k = D_1 \frac{\Gamma(k+\alpha+\beta)}{\Gamma(k+1)} + D_4 \frac{\Gamma(k+\alpha+\beta-1)}{\Gamma(k+1)} + O(k^{\alpha+\beta-3}), \quad k \to +\infty, \tag{14}$$

де K_1, K_2, D_4 — сталі, які залежать лише від α та β. При $\alpha+\beta < 1$ маємо

$$d_k = D_1 \frac{\Gamma(k+\alpha+\beta)}{\Gamma(k+1)} + O(k^{\alpha+\beta-2}), \quad k \to +\infty.$$

Тому $G(z) = D_1 \tilde{C}_{\alpha+\beta-1}(z) + g_3(z)$, де $g_3(z)$ — обмежена аналітична функція в $\overline{\mathbb{D}}$.

Якщо $\alpha+\beta = 1$, то $G(z) = D_1 \tilde{C}_0(z) - D_4 \ln(1-z) + g_4(z)$, де $g_4(z)$ — обмежена аналітична функція в $\overline{\mathbb{D}}$.

Підсумовуючи доведене вище, при $-1 < \alpha+\beta \le 1$ з (11) знаходимо $\tilde{g}(z) = \int_0^{2\pi} \tilde{C}_{\alpha+\beta}(ze^{-it}) d\psi_\beta^*(t) + g_1(z)$, де $g_1(z)$ має вигляд, який вимагається в лемі від $Q_{\alpha\beta}(z)$. Міркуючи, як на початку доведення леми, отримуємо

$$g(z) = \int_0^{2\pi} C_{\alpha+\beta}(ze^{-it}) d\psi_\beta^*(t) + g_1(z) + K_3,$$

де $K_3 = -C_{\alpha+\beta}(0)(\psi_\beta^*(2\pi) - \psi_\beta^*(0)) + g(0)$. Отже, у випадку $-1 < \alpha+\beta \le 1$ лему доведено.

Залишилось розглянути випадок $\alpha+\beta > 1$. З (14) виводимо

$$G(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k z^k = D_1 \tilde{C}_{\alpha+\beta-1}(z) + D_4 \tilde{C}_{\alpha+\beta-2}(z) + \sum_{k=1}^{+\infty} \Delta_k z^k,$$

$$\Delta_k = O(k^{\alpha+\beta-3}), \quad k \to +\infty.$$

Отже,

$$g_1(z) = D_1 \int_0^{2\pi} \tilde{C}_{\alpha+\beta-1}(ze^{-it}) d\psi_\beta^*(t) + D_4 \int_0^{2\pi} \tilde{C}_{\alpha+\beta-2}(ze^{-it}) d\psi_\beta^*(t) +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \Delta_k z^k e^{-itk} d\psi_\beta^*(t) \equiv$$

$$\equiv D_1 \int_0^{2\pi} \tilde{C}_{\alpha+\beta-1}(ze^{-it}) d\psi_\beta^*(t) + h_1(z) + h_2(z).$$

По-перше, з вигляду $h_1(z)$ випливає $M(r, h_1) = O((1-r)^{1-\beta-\alpha})$ при $r \uparrow 1$. По-друге, з результатів М. М. Джрбашяна [2] (гл. 9, § 4) випливає, що $h_1 \in R_{\alpha+\beta-2} \subset R_{\alpha+\beta-1}$, де R_α — клас аналітичних у $\mathbb{D}$ функцій таких, що $\operatorname{Re} f \in U_\alpha$. Тому [2] (гл. IX)

$$h_1(z) = \int_0^{2\pi} S_{\alpha+\beta-1}(ze^{-it}) d\chi_1(t) + i \operatorname{Im} h(0),$$

де $\chi_1 \in \mathrm{BV}$.

Розглянемо $h_2(z)$. При $r \uparrow 1$

$$M(r, h_2) = O\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\alpha+\beta-3} r^k\right) = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{(1-r)^{(\alpha+\beta-2)^+}}\right), & \alpha+\beta \neq 2, \\ O\left(\ln\dfrac{1}{1-r}\right), & \alpha+\beta = 2. \end{cases}$$

Звідси легко отримати, що $D^{-\alpha-\beta+1}\operatorname{Re} h_2(re^{i\varphi}) = O(1)$, $r \uparrow 1$. Справді, це очевидно при $\alpha+\beta < 2$. А при $\alpha+\beta \geq 2$, $1/2 > \varepsilon > 0$

$$\left|D^{-\alpha-\beta+1}\operatorname{Re} h_2(re^{i\varphi})\right| = \frac{r^{-\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}\left|\int_0^r (r-t)^{\alpha+\beta-2}\operatorname{Re} h_2(te^{i\varphi})\,dt\right| =$$

$$= O\left(\int_0^r \frac{(r-t)^{\alpha+\beta-2}dt}{(1-t)^{\alpha+\beta-2+\varepsilon}}\right) = O\left(\int_0^r \frac{dt}{(r-t)^{\varepsilon}}\right) = O(1), \quad r \uparrow 1.$$

Отже, $h_2 \in R_{\alpha+\beta-1}$ і

$$h_2(z) = \int_0^{2\pi} S_{\alpha+\beta-1}(ze^{-it})\,d\chi_2(t) + i\operatorname{Im} h_2(0),$$

де $\chi_2 \in \mathrm{BV}$. Але оскільки $M(r, h_1+h_2) = O((1-r)^{1-\alpha-\beta})$, $r \uparrow 1$, то

$$(h_1+h_2)(z) = \int_0^{2\pi} S_{\alpha+\beta-1}(ze^{-it})\,d(\chi_1(t)+\chi_2(t)) + i\operatorname{Im}(h_1(0)+h_2(0)) =$$

$$= \int_0^{2\pi} C_{\alpha+\beta-1}(ze^{-it})\,d\tilde{\chi}(t),$$

де $\tilde{\chi}(t) = 2(\chi_1(t)+\chi_2(t)) + K_4 t$, K_4 — стала. Застосувавши теорему C до $\operatorname{Re}(h_1+h_2)$, отримаємо, що $\chi_1+\chi_2 \in \Lambda_1$ і, як наслідок, $\tilde{\chi} \in \Lambda_1$. Звідси і з (11) випливає твердження леми у випадку $\alpha+\beta > 1$.

Лему доведено.

***Доведення леми* 2.** Нехай $u(z)$ має вигляд (5),

$$F(z) = \int_0^{2\pi} S_\alpha(ze^{-it})\,d\psi(t) = \int_0^{2\pi} 2C_\alpha(ze^{-it})\,d\psi(t) - K_5(\alpha).$$

Тоді $\operatorname{Re} F = u$. Застосовуючи до $g(z) = (F(z)+K_5)/2$ лему 1, одержуємо

$$\frac{1}{2}(F(z)+K_5) = \int_0^{2\pi} C_{\alpha-\beta}(ze^{-it})\,d\psi^*_{-\beta}(t) + D_1 Q_{\alpha,-\beta}(z),$$

де $R_{\alpha,-\beta}(z)$ мають вигляд, описаний у лемі 1. Звідси

$$F(z) = \int_0^{2\pi} S_{\alpha-\beta}(ze^{-it})\,d\psi^*_{-\beta}(t) + 2D_1 Q_{\alpha,-\beta}(z) - K_6.$$

Отже,

$$u(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\beta}(r, \varphi-t)\,d\psi^*_{-\beta}(t) + 2D_1\operatorname{Re}(Q_{\alpha,-\beta}(re^{i\varphi}) - K_6).$$

Враховуючи, що $P_\alpha(r,t) = \operatorname{Re}(2C_\alpha(re^{it}) - C_\alpha(0))$, при $0 < \alpha+\beta < 1$ отримуємо

$$E_{\alpha\beta}(re^{i\varphi}) = 2D_1 \operatorname{Re}(Q_{\alpha,-\beta}(re^{i\varphi}) - K_6) = D_1 \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\beta-1}(r, \varphi - t)\, d\psi^*_{-\beta}(t) + \operatorname{Re} q(z),$$

де $q(z)$ — обмежена в $\overline{\mathbb{D}}$ аналітична функція.

Отже, у випадку $0 < \alpha + \beta < 1$ лему доведено. При $\alpha + \beta > 1$ маємо ($\tilde{\chi} \in \Lambda_1$, $K_7 \in \mathbb{R}$)

$$E_{\alpha\beta}(re^{i\varphi}) = D_1 \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\beta-1}(r, \varphi - t)\, d\chi(t) + K_7 = D_1 \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\beta-1}(r, \varphi - t)\, d\chi^*(t),$$

де $\chi^*(t) = \chi(t) + K_7 / (2\pi D_1 P_{\alpha-\beta-1}(0))t$.

Лему доведено.

Лема 3. *Якщо* $u(z)$ *має вигляд* (5), $\psi \in \mathrm{AC}^{\beta}$, *то*

$$T(r, u) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{(\alpha-\beta)^+}}\right), \quad r \uparrow 1.$$

Доведення. Можемо вважати, що $\alpha \geq \beta$. Нехай спочатку $\alpha > \beta$. За лемою 2 маємо

$$u(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\beta}(r, \varphi - t)\, d\psi^*_{-\beta}(t) + D_1' \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\beta-1}(r, \varphi - t)\, d\chi(t) \equiv I_1 + I_2, \tag{15}$$

де $\chi \in \mathrm{BV}$. Далі зі стандартних оцінок знаходимо

$$T(r, I_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} P_{\alpha-\beta}(r, \varphi - t)\, d\psi^*_{-\beta}(t) \right)^+ d\varphi \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left| P_{\alpha-\beta}(r, \varphi - t) \right| d\varphi \right) \left| d\psi^*_{-\beta}(t) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \frac{2\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\left|1 - re^{i(\varphi-t)}\right|^{\alpha-\beta+1}}\, d\varphi \right) \left| d\psi^*_{-\beta}(t) \right| \leq$$

$$\leq \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{|\varphi-t| \leq 1-r} \frac{d\varphi}{(1-r)^{\alpha-\beta+1}} + \right.$$

$$\left. + \int_{1-r < |\varphi-t| \leq \pi/2} \frac{d\varphi}{(r \sin(\varphi - t))^{\alpha-\beta+1}} + \int_{\pi/2 < |\varphi-t| \leq \pi} d\varphi \right) \left| d\psi^*_{-\beta}(t) \right| \leq$$

$$\leq \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\pi} \left(\frac{2}{(1-r)^{\alpha-\beta}} + \frac{2}{r^{\alpha-\beta+1}} \int_{1-r}^{\pi/2} \frac{d\tau}{(2\tau/\pi)^{\alpha-\beta+1}} + \pi \right) =$$

$$= O\left((1-r)^{\beta-\alpha^+}\right), \quad r \uparrow 1.$$

При $\alpha = \beta$, використовуючи невід'ємність ядра Пуассона, маємо

$$T(r, I_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} P_0(r, \varphi - t)\, d\psi^*_{-\beta}(t)\right)^+ d\varphi \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} P_0(r, \varphi - t)\, d\varphi\right)\left|d\psi^*_{-\beta}(t)\right| = \int_0^{2\pi}\left|d\psi^*_{-\beta}(t)\right| \le K,$$

де K — додатна стала. Отже,

$$T(r, I_1) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{(\alpha-\beta)^+}}\right), \qquad r \uparrow 1.$$

Аналогічно

$$T(r, I_2) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{(\alpha-\beta-1)^+}}\right), \qquad r \uparrow 1.$$

Остаточно

$$T(r, u) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{(\alpha-\beta)^+}}\right), \qquad r \uparrow 1.$$

Лему доведено.

Лема 4. *Нехай* $\chi \in \mathrm{BV} \cap \Lambda_\mu$, $\mu \in (0, 1]$, $p > 0$. *Тоді*

$$\int_0^{2\pi} r^{-p-1} D^{-1}\left(r^{p-1} P_0(r, \varphi - t)\right) d\chi(t) = O(1), \qquad r \uparrow 1.$$

Доведення. Маємо

$$I \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^{2\pi} r^{-p-1} D^{-1}\left(r^{p-1} P_0(r, \varphi - t)\right) d\chi(t) =$$

$$= r^{-p-1}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} s^{p-1} P_0(s, \varphi - t)\, ds\, d\chi(t) =$$

$$= r^{-p-1}\int_0^{r} s^{p-1}\int_0^{2\pi} P_0(s, \varphi - t)\, d\chi(t)\, ds.$$

Оскільки $\chi \in \Lambda_\mu$, за теоремою C отримуємо

$$\int_0^{2\pi} P_0(s, \varphi - t)\, d\chi(t) = O\left((1-s)^{-1+\mu}\right), \qquad s \uparrow 1.$$

Тому для деякого $r_0 \in (0, 1)$

$$B(r, I) = O(1) + O\left(\int_{r_0}^{r} \frac{s^{p-1}}{(1-s)^{1-\mu}}\, ds\right) = O(1), \qquad r \uparrow 1.$$

Лему доведено.

Доведення твердження. Нехай $\beta = \inf\{\alpha \ge 0 : u \in U_\alpha\}$, $\alpha_1 > \beta$. Тоді, оскільки $U_{\alpha_1} \supset U_\alpha$, $\alpha_1 > \alpha$, маємо $u \in U_{\alpha_1}$. За теоремою Джрбашяна [2] (теорема 9.10)

$$u(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} P_{\alpha_1}(s, \varphi - \theta)) d\psi(\theta), \tag{16}$$

де $\psi \in BV$. Далі зі стандартних оцінок одержуємо $T(r, u) = O((1-r)^{-\alpha_1})$, $r \uparrow 1$. Отже, $\rho[u] \le \alpha_1$, відтак $\rho[u] \le \beta$.

Навпаки, припустимо, що $T(r, u) = O((1-r)^{-\gamma})$, $r \uparrow 1$, для деякого $\gamma \in (0, \beta)$. Нагадаємо деякі характеристики М. М. Джрбашяна [2] $(u \in H(\mathbb{D}))$:

$$T_\alpha(r, u) = \frac{r^{-\alpha}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(D^{-\alpha}u(re^{i\varphi})\right)^+ d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(u_\alpha(re^{i\varphi})\right)^+ d\varphi.$$

При $\alpha > 0$ виконується нерівність $T_\alpha(r, u) \le r^{-\alpha} D^{-\alpha} T(r, u)$.

З нашого припущення для $\alpha \in (\gamma, \beta)$ маємо $D^{-\alpha}T(r, u) = O(1)$, тому $T_\alpha(r, u) = O(1)$. Оскільки u_α є гармонічною, це рівносильно тому, що

$$\sup_{0<r<1}\int_{r_0}^{2\pi}\left|u_\alpha(re^{i\varphi})\right| d\varphi < +\infty,$$

тобто $u \in U_\alpha$, що суперечить нерівності $\alpha < \beta$. Отже, наше припущення є хибним, тобто $\rho[u] \ge \beta$.

Остаточно $\rho[u] = \beta$.

Твердження доведено.

***Доведення пункту* 1б) *теореми* А.** Будемо міркувати, як і при доведенні (8.13) [3, с. 204] (теорема 2). Відомо [3, с. 204] (8.15), що Ψ_α задовольняє нерівності

$$|\Psi_\alpha(t)| \le c_\alpha |t|^{\alpha-1}, \quad |\Psi_\alpha(t)| \le c_\alpha |t|^{\alpha-2}, \quad 0 < |t| \le \pi,$$

де стала c_α залежить лише від α.

Нехай $f \in \Lambda_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \le 2$, $0 < h \le \pi/2$. Тоді

$$2\pi\left(f_\beta(x+h) - f_\beta(x)\right) =$$

$$= \left(\int_{|t|\le 2h} + \int_{2h\le|t|\le\pi}\right)(f(x-t) - f(x))\,(\Psi_\beta(t+h) - \Psi_\beta(t))dt \equiv A + B.$$

Як і в [3, с. 204], маємо

$$|A| = O\left(\int_{-2h}^{2h}|t|^\alpha\left(\left|\Psi_\beta(t+h)\right| + \left|\Psi_\beta(t)\right|\right)dt\right) \le$$

$$\le O(h^\alpha)\int_{-3h}^{3h} 2\left|\Psi_\beta(t)\right| dt = O(h^\alpha)\int_0^{3h} t^{\beta-1}dt = O(h^{\alpha+\beta}), \quad h \downarrow 0.$$

Використовуючи теорему про середнє та оцінку для Ψ'_β, отримуємо $(0 < \theta < 1)$

$$|B| = O\left(\int_{2h\le|t|\le\pi}|t|^\alpha\left|\Psi'_\beta(t+\theta h)\right| h\,dt\right) \le$$

$$\le O(h)\int_{2h\le|t|\le\pi}|t|^\alpha(|t| - h)^{\beta-2}dt = O(h)\int_h^\pi t^{\alpha+\beta-2}dt = O(h), \quad h \downarrow 0.$$

Отже, $\left|f_\beta(x+h) - f_\beta(x)\right| = O(h)$ при $h \downarrow 0$, тобто $f_\beta \in \Lambda_1$.

4. Доведення теорем. ***Доведення теореми* 1.** З леми 3 випливає, що $\rho_T[u] \leq (\alpha-\gamma)^+$. Отже, досить довести, що $\rho_T[u] \geq (\alpha-\gamma)^+$. Оскільки при $\alpha \leq \gamma$ нерівність тривіальна, можемо вважати, що $\alpha > \gamma$. Припустимо, що $\rho_T[u] = \sigma < \alpha-\gamma$. Нехай $\eta > 0$ таке, що $\rho = \sigma + \eta < \alpha - \gamma$. За твердженням 1

$$u(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} P_\rho(r, \varphi - t)\, d\lambda(t), \quad \lambda \in \mathrm{BV}. \tag{17}$$

Більш того, $\lambda \in \mathrm{AC}$, оскільки в протилежному випадку, якщо розглянути аналітичну в $\mathbb{D}$ функцію f таку, що $\operatorname{Re} f = u$, за теоремою E матимемо $\rho_T[u] \geq$ $\geq \rho > \sigma$, що неможливо.

Нехай спочатку $\alpha - \gamma \geq 1$, $\varepsilon > 0$. За лемою 2 з (5) отримуємо $(\beta = -\gamma + \varepsilon)$

$$u(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\gamma+\varepsilon}(r, \varphi - t)\, d\psi^*_{\varepsilon-\gamma}(t) + \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\gamma-1+\varepsilon}(r, \varphi - t)\, d\tilde{\psi}(t),$$

де $\tilde{\psi} = c_1 \psi^*_{\varepsilon-\gamma} + \chi_1$, $\chi_1 \in \Lambda_1$, c_1 — деяка дійсна стала. Знову за лемою 2 з (17) маємо

$$u(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\gamma+\varepsilon}(r, \varphi - t)\, d\lambda^*_{\alpha+\varepsilon-\gamma-\rho}(t) + \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\gamma-1+\varepsilon}(r, \varphi - t)\, d\tilde{\lambda}(t),$$

де $\tilde{\lambda} = c_2 \lambda^*_{\alpha+\varepsilon-\gamma+\rho} + \chi_2$, $\chi_2 \in \Lambda_1$, c_2 — деяка дійсна стала.

Позначимо $\tau = \alpha - \gamma + \varepsilon - \rho > \varepsilon$. Вважаємо, що $\tau < 1$. Цього можна досягнути вибором η. Доведемо, що $\psi \in \mathrm{AC}^{\gamma+\tau-\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 < \tau$. Це суперечитиме припущенню теореми.

З останніх двох зображень u виводимо

$$\int_0^{2\pi} P_{\alpha-\gamma+\varepsilon}(r, \varphi - t)\, d(\psi^*_{\varepsilon-\gamma}(t) - \lambda^*_\tau(t)) = \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\gamma+\varepsilon-1}(r, \varphi - t)\, d(\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\psi}(t)),$$

де $\tilde{\lambda} - \tilde{\psi} = c_2 \lambda^*_\tau - c_1 \psi^*_{\varepsilon-\gamma} + \chi_2 - \chi_1$. Застосуємо оператор $r^{-\beta} D^{-\beta}$ до обидвох частин останньої рівності з $\beta = \alpha - \gamma + \varepsilon$. При цьому врахуємо, що $r^{-\beta} D^{-\beta} P_\beta =$ $= P_0$ та рівності $D^{-\beta} = D^{-1}(D^{-\beta+1})$, $D^{-\beta+1} P_{\beta-1} = r^{\beta-1} P_0$. Одержимо

$$v(re^{i\varphi}) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_0^{2\pi} P_0(r, \varphi - y)\, d(\psi^*_{\varepsilon-\gamma}(t) - \lambda^*_\tau(t)) =$$

$$= \int_0^{2\pi} r^{-\alpha+\gamma-\varepsilon} D^{-1}(r^{\alpha-\gamma+\varepsilon-1} P_0(r, \varphi - t))\, d(\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\psi}(t)).$$

Функція v гармонічна в $\mathbb{D}$ і

$$v'_r(re^{i\varphi}) = (-\alpha + \gamma - \varepsilon) \int_0^{2\pi} r^{-\alpha+\gamma-\varepsilon-1} D^{-1}(r^{\alpha-\gamma+\varepsilon-1} P_0(r, \varphi - t))\, d(\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\psi}(t)) +$$

$$+ \int_0^{2\pi} r^{-1} P_0(r, \varphi - t))\, d(\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\psi}(t)) \equiv I_3 + I_4. \tag{18}$$

Оскільки $\lambda \in \mathrm{AC} \subset \Lambda_0$ і $0 < \varepsilon < \tau$, то за теоремою A (1a)) $\lambda^*_\tau \in \Lambda_\tau \subset \Lambda_\varepsilon$.

За припущенням теореми $\psi \in AC^{\gamma-\varepsilon_0}$ для довільного $\varepsilon_0 > 0$, тобто $\psi^*_{\varepsilon-\gamma} \in AC^{\varepsilon-\varepsilon_0}$, $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$. Отже, для довільного $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ маємо $\psi^*_{\varepsilon-\gamma} \in \Lambda_{\varepsilon-\varepsilon_0}$. З означень $\tilde{\lambda}$ та $\tilde{\psi}$ випливає, що

$$\tilde{\lambda} - \tilde{\psi} \in \Lambda_{\varepsilon-\varepsilon_0}. \tag{19}$$

З (19) за теоремою C випливає, що $B(r, I_4) = O((1-r)^{\varepsilon-\varepsilon_0-1})$, $r \uparrow 1$.

З іншого боку, за лемою 4 $B(r, I_3) = O(1)$, $r \uparrow 1$. З оцінок I_3 та I_4 виводимо $B(r, v'_r) = O((1-r)^{-1+\varepsilon-\varepsilon_0})$, $r \uparrow 1$. За теоремою 2.35 [3] (гл. VII.2] така ж оцінка має місце і для v'_φ, а саме $B(r, v'_\varphi) = O((1-r)^{-1+\varepsilon-\varepsilon_0})$, $r \uparrow 1$. З останнього співвідношення і теореми D випливає, що v зображується інтегралом Пуассона від функції з класу $\Lambda_{\varepsilon-\varepsilon_0}$. З іншого боку, v є інтегралом Пуассона від $(\chi^*)'$, яка визначена майже скрізь, де $\chi^* = \psi^*_{\varepsilon-\gamma} - \lambda^*_\tau$. Тобто $(\chi^*)'$ майже скрізь дорівнює неперервній функції з $\Lambda_{\varepsilon-\varepsilon_0}$. Отже, можемо вважати, що $(\chi^*)' \in \Lambda_{\varepsilon-\varepsilon_0}$. Звідси за теоремою A (1б)) $\chi^* \in \Lambda_1$.

Але пригадаємо, що $\lambda^*_\tau \in AC^\tau \subset \Lambda_\tau$. Отже, $\psi^*_{\varepsilon-\gamma} = \chi^* + \lambda^*_\tau \in \Lambda_\tau$. Звідси $\tilde{\lambda} - \tilde{\psi} = c_2\lambda^*_\tau - c_1\psi^*_{\varepsilon-\gamma} + \chi_2 - \chi_1 \in \Lambda_\tau$.

Так само, як і вище, оцінимо I_4, використовуючи співвідношення $\tilde{\lambda} - \tilde{\psi} \in \Lambda_\tau$ замість $\tilde{\lambda} - \tilde{\psi} \in \Lambda_{\varepsilon-\varepsilon_0}$.

За теоремою C одержимо $I_4 = O((1-r)^{\tau-1})$, а за лемою 4 $I_3 = O(1)$, і, як наслідок, $B(r, v'_\varphi) = O((1-r)^{\tau-1})$ при $r \uparrow 1$.

Тепер згідно з теоремою Харді – Літтлвуда (теоремою D) маємо $(\chi^*)' \in \Lambda_\tau$ або $\psi^*_{\varepsilon-\gamma-1} - \lambda^*_{\tau-1} \in \Lambda_\tau$. Розглянемо інтеграл Вейля порядку $1 - \tau + \varepsilon_2$, $0 < \varepsilon_2 < \tau - \varepsilon$, від останньої функції. За теоремою A (1б)) $\psi^*_{\varepsilon-\gamma-\tau+\varepsilon_2} - \lambda^*_{\varepsilon_2} \in \Lambda_1 \subset AC$. Але $\lambda \in AC$, тим більше $\lambda^*_{\varepsilon_2} \in AC$, отже, такою ж є функція $\psi^*_{\varepsilon-\gamma-\tau+\varepsilon_2}$. Тобто $\psi \in AC^{\gamma+\tau-\varepsilon-\varepsilon_2}$. Це суперечить припущенню теореми, оскільки $\tau - \varepsilon - \varepsilon_2 > 0$.

Нехай тепер $0 < \alpha - \gamma < 1$. Вибираємо $\varepsilon > 0$ так, щоб $0 < \alpha - \gamma + \varepsilon < 1$. Застосовуючи, як і вище, лему 2 до зображень (5) і (17), одержуємо

$$u(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\gamma+\varepsilon}(r, \varphi - t)\, d\psi^*_{\varepsilon-\gamma}(t) + $$

$$+ c_1 \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\gamma-1+\varepsilon}(r, \varphi - t)\, d\psi^*_{\varepsilon-\gamma}(t) + u_1(re^{i\varphi}),$$

$$u(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\gamma+\varepsilon}(r, \varphi - t)\, d\lambda^*_{\alpha+\varepsilon-\gamma-\rho}(t) + $$

$$+ c_2 \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\gamma-1+\varepsilon}(r, \varphi - t)\, d\lambda^*_{\alpha+\varepsilon-\gamma-\rho}(t) + u_2(re^{i\varphi}),$$

де c_j — сталі, u_j — обмежені в $\mathbb{D}$ гармонічні функції, $j \in \{1, 2\}$. Звідси ($\tau = \alpha - \gamma + \varepsilon - \rho$)

$$\int_0^{2\pi} P_{\alpha-\gamma+\varepsilon}(r, \varphi - t)\, d(\psi^*_{\varepsilon-\gamma}(t) - \lambda^*_\tau(t)) =$$

$$= \int_0^{2\pi} P_{\alpha-\gamma+\varepsilon-1}(r, \varphi - t)\, d(c_2\lambda^*_\tau(t) - c_1\psi^*_{\varepsilon-\gamma}(t)) + (u_1 - u_2)(re^{i\varphi}). \tag{20}$$

Оскільки $u_2 - u_1$ — обмежена гармонічна функція в $\mathbb{D}$, її можна зобразити (теорема C) у вигляді

$$(u_1 - u_2)(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} P_0(r, \varphi - t)\, d\chi(t),$$

де $\chi \in \Lambda_1$.

Застосуємо оператор $r^{-\beta} D^{-\beta}$ до обох частин рівності (20) з $\beta = \alpha - \gamma + \varepsilon$. Як і у випадку $\alpha - \gamma \geq 1$, одержимо

$$v(re^{i\varphi}) \overset{\text{df}}{=} \int_0^{2\pi} P_0(r, \varphi - t)\, d(\psi^*_{\varepsilon-\gamma} - \lambda^*_\tau)(t) =$$

$$= \int_0^{2\pi} r^{-\alpha+\gamma-\varepsilon} D^{-1}\big(r^{\alpha-\gamma+\varepsilon-1} P_0(r, \varphi - t)\big)\, d(c_2\lambda^*_\tau(t) - c_1\psi^*_{\varepsilon-\gamma}(t)) +$$

$$+ \int_0^{2\pi} P_{-\alpha+\gamma-\varepsilon}(r, \varphi - t)\, d\chi(t).$$

Диференціюючи останню рівність, отримуємо

$$v'_r(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} r^{-1} P_0(r, \varphi - t)\, d(c_2\lambda^*_\tau(t) - c_1\psi^*_{\varepsilon-\gamma}(t)) +$$

$$+ (-\alpha + \gamma - \varepsilon) \int_0^{2\pi} r^{-\alpha+\gamma-\varepsilon-1} D^{-1}\big(r^{\alpha-\gamma+\varepsilon-1} P_0(r, \varphi - t)\big)\, d(c_2\lambda^*_\tau(t) - c_1\psi^*_{\varepsilon-\gamma}(t)) +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} P_{-\alpha+\gamma-\varepsilon}(r, \varphi - t)\, d\chi(t) \equiv I_5 + I_6 + I_7. \tag{21}$$

I_5 та I_6 оцінюються так само, як і у випадку $\alpha - \gamma > 1$. Маємо $\lambda^*_\tau \in \Lambda_\tau$, $\psi^*_{\varepsilon-\gamma} \in \Lambda_{\varepsilon-\varepsilon_0}$, $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$. За теоремою C та лемою 4 відповідно

$$B(r, I_5) = O((1-r)^{-1+\varepsilon-\varepsilon_0}), \quad B(r, I_6) = O(1), \quad r \uparrow 1. \tag{22}$$

I_7 оцінюємо стандартно [3] (гл. 8.2). Спочатку зазначимо, що

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} P_{-\alpha+\gamma-\varepsilon}(r, t) \right| \leq \frac{K_8}{\left|1 - re^{it}\right|^{-\alpha+\gamma-\varepsilon+3}}. \tag{23}$$

Звідси, зокрема, маємо

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} P_{-\alpha+\gamma-\varepsilon}(r, t) \right| \leq \frac{K_9}{t^{-\alpha+\gamma-\varepsilon+3}}, \quad |t| \leq \pi. \tag{24}$$

Продовжимо χ на $\mathbb{R}$ за формулою $\chi(t + 2\pi) - \chi(t) = \chi(2\pi) - \chi(0)$. Оскільки $\dfrac{\partial}{\partial r} P_{-\alpha+\gamma-\varepsilon}(r, t)$ та χ' — періодичні функції від t, одержуємо

$$I_7 = \int\limits_{-\pi+\varphi}^{\pi+\varphi} \frac{\partial}{\partial r} P_{-\alpha+\gamma-\varepsilon}(r, \theta-\varphi)\, d(\chi(\theta)-\chi(\varphi)) =$$

$$= (\chi(\theta)-\chi(\varphi)) \frac{\partial}{\partial r} P_{-\alpha+\gamma-\varepsilon}(r, \theta-\varphi) \Big|_{-\pi+\varphi}^{\pi+\varphi} -$$

$$- \int\limits_{-\pi+\varphi}^{\pi+\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} P_{-\alpha+\gamma-\varepsilon}(r, \theta-\varphi)\right)(\chi(\theta)-\chi(\varphi))\, d\theta =$$

$$= (\chi(2\pi)-\chi(0)) \frac{\partial}{\partial r} P_{-\alpha+\gamma-\varepsilon}(r, \pi) - \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial}{\partial r} P_{-\alpha+\gamma-\varepsilon}(r, s)\right)(\chi(s+\varphi)-\chi(\varphi))\, ds.$$

Звідси, використовуючи оцінки ядра (23), (24), виводимо

$$|I_7| \le K_{10}(\chi) + \left(\int\limits_{|\tau|\le 1-r} + \int\limits_{1-r\le|\tau|\le\pi} \right) \left| \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial r} P_{-\alpha+\gamma-\varepsilon}(r, \tau) \right| \omega(|\tau|, \chi)\, d\tau \le$$

$$\le K_{10} + K_{11} \int\limits_{|\tau|\le 1-r} \frac{\omega(|\tau|, \chi)}{(1-r)^{-\alpha+\gamma-\varepsilon+3}} d\tau + \int\limits_{1-r\le|\tau|\le\pi} \frac{K_{12}}{\tau^{-\alpha+\gamma-\varepsilon+3}} \omega(|\tau|, \chi)\, d\tau \le$$

$$\le K_{10} + \frac{2K_{11}\omega(1-r, \chi)}{(1-r)^{-\alpha+\gamma-\varepsilon+2}} + K_{13} \int\limits_{1-r\le\tau\le\pi} \frac{d\tau}{\tau^{-\alpha+\gamma-\varepsilon+2}} =$$

$$= O\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\alpha+\gamma-\varepsilon}} \right) = O\left(\frac{1}{(1-r)^{1-\tau-\rho}} \right), \quad r \uparrow 1.$$

Разом з (22) це дає $B(r, v_r') = O((1-r)^{-1+\varepsilon-\varepsilon_0})$, $r\uparrow 1$, $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$. Далі міркування такі, як у випадку $\alpha-\gamma > 1$ від моменту застосування теореми D.

Теорему 1 доведено.

***Доведення теореми* 2.** *Достатність.* Нехай $\alpha > \sigma$. За теоремою 1 $\rho[u] = (\alpha - \gamma[\psi])^+ = \sigma$.

Припустимо спочатку, що $\sigma < \rho$. Виберемо $\alpha \in (\sigma, \rho)$. Оскільки $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = 1-\rho-\sigma$, $\psi_{\sigma-\alpha} \in \Lambda_\delta$ при $\delta < 1-\rho+\sigma$. За теоремою A (1a)) $\psi \in \Lambda_\gamma$ при $\gamma = \delta+\alpha-\sigma < 1-\rho+\alpha$. Водночас $\psi \notin \Lambda_\gamma$ при $\gamma > 1-\rho+\alpha$, бо в протилежному випадку за теоремою A мали б $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] > 1-\rho+\sigma$. Отже, $\tau[\psi] = 1-\rho+\alpha$. За теоремою C $\rho_B[u] = \rho$.

Нехай тепер $\sigma = \rho$. Досить довести, що $\rho_B[u] \le \sigma$. Нехай α є довільним більшим за σ. Оскільки $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = 1$, за теоремою A (1б)) маємо $\psi \in \Lambda_1$. Звідси за теоремою C $B(r, u) = O((1-r)^{-\alpha})$, тобто $\rho_B[u] \le \alpha$. Достатність доведено.

Необхідність. Нехай $\rho_B[u] = \rho$, $\rho_T[u] = \sigma$, $\sigma \le \rho \le \rho+1$. За твердженням для довільного $\alpha > \sigma$ функцію u можна зобразити у вигляді (5), при цьому за теоремою 1 маємо $(\alpha-\gamma[\psi])^+ = \sigma$.

Припустимо спочатку, що $\sigma < \rho$. Нехай $\alpha \in (\sigma, \rho]$. З означення ρ_B випливає, що $B(r, u) = O((1-r)^{-\rho-\varepsilon})$, $r\uparrow 1$, для довільного $\varepsilon > 0$. Нехай $0 < \varepsilon \le 1-\rho+\alpha$. За теоремою C маємо $\psi \in \Lambda_{\alpha+1-\rho-\varepsilon}$. Тоді $\psi_{\sigma-\alpha} \in \Lambda_{\sigma+1-\rho-\varepsilon}$. Крім того, $\psi_{\sigma-\alpha} \notin \Lambda_{\sigma+1-\rho+\varepsilon}$ для додатного ε, бо в протилежному випадку $\psi \in \Lambda_{\alpha+1-\rho+\varepsilon}$ і за теоремою C мали б $B(r, u) = O((1-r)^{-\rho+\varepsilon})$, $r\uparrow 1$, але

$B(r_n, u) \neq O((1-r_n)^{-\rho+\varepsilon})$ на деякій послідовності $r_n \uparrow 1$. Отже, $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = 1 - \rho + \sigma$.

Нехай тепер $\alpha > \rho > \sigma$, u зображується у вигляді (5). За лемою 2 для $\beta \in (\sigma, \rho)$, $\chi \in \mathrm{BV}$ маємо

$$u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P_\beta(r, \varphi - t)\, d\psi^*_{\beta-\alpha}(t) + \int_0^{2\pi} P_{\beta-1}(r, \varphi - t)\, d\chi(t) = I_8 + I_9. \qquad (25)$$

Оскільки $B(r, I_9) = O((1-r)^{-\beta})$, $r \uparrow 1$, а $\rho_B[u] = \rho$, то $\rho_B[I_8] = \rho$.

За теоремою C $\tau[\psi^*_{\beta-\alpha}] = \tau[\psi_{\beta-\alpha}] = \beta + 1 - \rho$. Звідси за теоремою A (2a)) $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = \sigma + 1 - \rho$.

Нарешті, нехай $\rho = \sigma < \alpha$, $\varepsilon > 0$, $\beta = \sigma + \varepsilon < \alpha$. За лемою 2 знову маємо (25). Зі співвідношень $\rho_B[u] = \rho$, $\rho_B[I_9] \leq \beta$ отримуємо $\rho_B[I_8] \leq \rho + \varepsilon$. Отже, $B(r, I_8) = O((1-r)^{-\rho-2\varepsilon})$, $r \uparrow 1$. За теоремою C $\tau[\psi_{\beta-\alpha}] \geq \beta - 1 - \rho - 2\varepsilon = 1 - \varepsilon$. Звідси за теоремою A (2a)) $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] \geq 1 - 2\varepsilon$. З довільності $\varepsilon > 0$ випливає $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = \sigma + 1 - \rho$.

Теорему 2 доведено.

5. Наслідки для аналітичних функцій. З теорем 1, 2 та того факту, що для аналітичної функції g без нулів $\ln|g(z)|$ — гармонічна функція, випливають такі теореми.

Теорема 3. *Нехай* $g(z) = \exp\{h(z)\}$, *де*

$$h(z) = \int_0^{2\pi} S_\alpha(ze^{-it})\, d\psi(t) + i\,\mathrm{Im}\, h(0), \qquad (26)$$

$\alpha \geq 0$, $\psi \in \mathrm{BV}$. *Тоді* $\rho_T[g] = (\alpha - \gamma[\psi])^+$.

Теорема 4. *Нехай* $0 \leq \sigma \leq \rho \leq \sigma + 1 < +\infty$, g — *аналітична функція і* $g(z) \neq 0$ *в* $\mathbb{D}$. *Функція* $g \in A^\rho_\sigma$ *тоді і лише тоді, коли* $(\forall \alpha > \sigma)$ $(\exists \psi \in \mathrm{BV})$ $g(z) = \exp\{h(z)\}$, *де* $h(z)$ *має вигляд* (26), $\sigma = (\alpha - \gamma[\psi])^+$ *і* $\tau[\psi_{\sigma-\alpha}] = 1 - \rho + \sigma$.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $g(z) = \exp\{h(z)\}$, *де* $h(z)$ *має вигляд* (26), $\alpha \geq 0$, $\psi \in \mathrm{BV}$. *Тоді* $\rho_T[g] = (\alpha - \gamma[\psi])^+$, $\rho_M[g] = \rho_T[g] + 1 - \tau[\psi_{\rho_T[g]-\alpha}]$.

1. *Linden C. N.* On a conjecture of Valiron concerning sets of indirect Borel point // J. London Math. Soc. – 1966. – **41.** – P. 304 – 312.
2. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 672 с.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1, 2.
4. *Chyzhykov I. E.* Growth of harmonic functions in the unit disc and an application // Oberwolfach Repts. – 2004. – **1**, № 1. – P. 391 – 392.
5. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II // Math. Z. – 1931/32. – **34**. – S. 403 – 439.
6. *Шамоян Ф. А.* Несколько замечаний к параметрическому представлению классов Неванлинны – Джрбашяна // Мат. заметки. – 1992. – **52**, № 1. – С. 128 – 140.
7. *Salem R.* On a theorem of Zygmund // Duke Math. J. – 1943. – **10**. – P. 23 – 31.
8. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа: В 2 т. – М.: Физматгиз, 1963. – Т. 2. – 516 с.
9. *Субханкулов М. А.* Тауберовы теоремы с остатком. – М.: Наука, 1976. – 400 с.

Одержано 12.05.2005