УДК 519.21

Ю. С. Мішура, С. Г. Роде (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ ІНТЕГРАЛЬНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ВИПАДКОВИХ БЛУКАНЬ, ЩО СЛАБКО ЗБІГАЮТЬСЯ ДО ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

We consider a random walk that weakly converges to a fractional Brownian motion with the Hurst index $H > 1/2$. We construct an integral-type functional of this random walk and prove that it weakly converges to an integral constructed on the basis of the fractional Brownian motion.

Рассмотрено случайное блуждание, слабо сходящееся к дробному броуновскому движению с индексом Хюрста $H > 1/2$. Построен функционал интегрального типа от этого блуждания и доказана его слабая сходимость к интегралу, построенному по дробному броуновскому движению.

1. Вступ. Нехай $\{\xi_i\}_{i\geq 1}$ — послідовність випадкових величин, заданих на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, $S_n = \sum_{i=1}^{n}\xi_i$ — відповідне випадкове блукання, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ — послідовність невипадкових, гладких та збіжних, у певному розумінні, функцій.

Достатні умови слабкої збіжності інтегральних функціоналів, тобто функціоналів вигляду

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_n\left(\frac{S_i}{\sqrt{n}}\right)\frac{\xi_{i+1}}{\sqrt{n}},$$

у випадку, коли ξ_i — незалежні однаково розподілені випадкові величини (н.о.р.в.в.), наведено у книзі [1].

У статті [2] доведено узагальнення цього результату, а саме слабку збіжність функціоналів вигляду

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_n\left(\frac{i}{n}, \frac{S_i}{\sqrt{n}}\right)\frac{\xi_{i+1}}{\sqrt{n}} \;\to\; \int_0^1 f(t, W_t)\,dW_t\,,$$

де $\{W_t, t \in [0, 1]\}$ — вінерів процес на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, а величини ξ_i утворюють мартингал-різницю, тобто суми S_n є мартингалом.

У статті [3] розглядаються випадкові блукання з інтегральними коефіцієнтами, що мають вигляд

$$Z_t^{(n)} := \sum_{i=1}^{[nt]}\sqrt{n}\int_{(i-1)/n}^{i/n} z\left(\frac{[nt]}{n}, s\right)ds\,\xi_i^{(n)}, \qquad t \in [0, 1], \tag{1}$$

де $\{\xi_i^{(n)}\}_{i,n\geq 1}$ — н.о.р.в.в., $z(t, s) = C_H\left(H - \frac{1}{2}\right)s^{1/2-H}\int_s^t u^{H-1/2}(u-s)^{H-3/2}\,du$, C_H — стала, що залежить лише від H. У цій статті доведено, що такі випадкові блукання слабко збігаються до дробового броунівського руху (ДБР) $\{Z_t, t \in [0, 1]\}$ з індексом Хюрста $H > 1/2$. (Нагадаємо, що ДБР $\{Z_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ з індексом Хюрста $H \in (0, 1)$ — це гауссівський процес зі стаціонарними приростами і неперервними траєкторіями, $Z_0 = 0$, $\mathrm{E}Z_t = 0$, $\mathrm{E}Z_tZ_s = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$.) Тому природно поставити питання про умови збіжності інтегральних функціоналів вигляду $\sum_{i=1}^{n-1} f_n\left(\frac{i}{n}, Z_{i/n}^{(n)}\right)\Delta Z_{i/n}^{(n)}$, де $\Delta Z_{i/n}^{(n)} := Z_{(i+1)/n}^{(n)} - Z_{i/n}^{(n)}$, до інтеграла $\int_0^1 f(t, Z_t)\,dZ_t$.

Зазначимо, що $\int_0^1 f(t, Z_t)\,dZ_t$ існує як границя майже напевно інтегральних сум Рімана – Стільтьєса, якщо f є гельдеровою функцією, $f \in \mathcal{H}^{\alpha}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{H}^{\beta}(\mathbb{R})$, де $\beta > 1 - H$, $\alpha > H^{-1} - 1$. Цей результат доведено в статті [4].

Дану роботу побудовано таким чином. Пункт 2 містить допоміжні твердження про збіжність різних інтегральних функціоналів. Основний факт, на якому грунтуються доведення, — це те, що квадратична варіація процесів $Z^{(n)}$ асимптотично дорівнює 0. У пункті 3 доведено основний результат для функцій вигляду $f_n(x)$ та сформульовано очевидне узагальнення для функцій $f_n(t, x)$.

2. Допоміжні результати. Далі будемо припускати, що н.о.р.в.в. $\{\xi_i^{(n)}\}_{i,n\ge 1}$ та функції $\{f_n\}_{n\ge 1}$, $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задовольняють відповідно умови:

A) $\mathrm{E}\xi_i^{(n)} = 0$, $D := \mathrm{E}(\xi_i^{(n)})^2 = 1$, $i, n \ge 1$;

B$_1$) $\forall n \ge 1 : f_n \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$, $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$, причому для будь-якого $R > 0$ існує $M_R > 0$ така, що

$$\sup_{n\ge 1} \sup_{|x|\le R} \left\{ |f_n'(x)| + |f'(x)| \right\} \le M_R;$$

B$_2$) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ рівномірно на кожному відрізку $[-R, R]$.

Нехай $\pi_r := \{0 = t_0^{(r)} < t_1^{(r)} < \ldots < t_{p_r}^{(r)} = 1\}$ — деяка послідовність розбиттів відрізка $[0, 1]$, $|\pi_r| \to 0$ при $r \to \infty$. Позначимо

$$\Delta Z_{j,r}^{(n)} := Z_{t_{j+1}^{(r)}}^{(n)} - Z_{t_j^{(r)}}^{(n)}$$

і утворимо послідовність інтегральних сум

$$S_{\pi_r}^{(n)} := \sum_{j=1}^{p_r - 1} f_n(Z_{t_j^{(r)}}^{(n)})\Delta Z_{j,r}^{(n)}.$$

Лема 1. *Якщо виконується умова* A), *то*

$$\mathrm{P} - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta Z_{i/n}^{(n)})^2 = \mathrm{P} - \lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{p_r-1} (\Delta Z_{j,r}^{(n)})^2 = 0.$$

Доведення. Насправді доведемо трохи більше, а саме збіжність до нуля в $L_2(P)$. Для цього використаємо рівність (1) і запишемо для будь-яких $0 \le t_1 < t_2 \le 1$ різницю

$$Z_{t_2}^{(n)} - Z_{t_1}^{(n)} = \sqrt{n} \sum_{k=1}^{[nt_1]} \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(z\left(\frac{[nt_2]}{n}, s\right) - z\left(\frac{[nt_1]}{n}, s\right)\right) ds\, \xi_k^{(n)} +$$

$$+ \sqrt{n} \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \int_{(k-1)/n}^{k/n} z\left(\frac{[nt_2]}{n}, s\right) ds\, \xi_k^{(n)}.$$

Введемо позначення

$$\alpha_n(m, l) := \int_{(m-1)/n}^{m/n} z\left(\frac{l}{n}, s\right) ds,$$

$$\beta_n(m, l_1, l_2) := \begin{cases} \alpha_n(m, l_2) - \alpha_n(m, l_1), & m \le l_1 \le l_2, \\ \alpha_n(m, l_2), & l_1 < m \le l_2, \end{cases}$$

і перепишемо наведену вище різницю у вигляді

$$Z_{t_2}^{(n)} - Z_{t_1}^{(n)} = \sqrt{n} \sum_{k=1}^{[nt_2]} \beta_n(k, [nt_1], [nt_2]) \xi_k^{(n)}.$$

Тому, враховуючи умову A), маємо

$$\mathrm{E}\left| Z_{t_2}^{(n)} - Z_{t_1}^{(n)} \right|^2 = n \sum_{k=1}^{[nt_2]} \beta_n^2(k, [nt_1], [nt_2]) =$$

$$= n \sum_{k=1}^{[nt_1]} \left(\int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(z\left(\frac{[nt_2]}{n}, s\right) - z\left(\frac{[nt_1]}{n}, s\right)\right) ds \right)^2 +$$

$$+ n \sum_{k=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \left(\int_{(k-1)/n}^{k/n} z\left(\frac{[nt_2]}{n}, s\right) ds \right)^2 \le$$

$$\le \int_0^{[nt_1]/n} \left(z\left(\frac{[nt_2]}{n}, s\right) - z\left(\frac{[nt_1]}{n}, s\right)\right)^2 ds + \int_{[nt_1]/n}^{[nt_2]/n} \left(z\left(\frac{[nt_2]}{n}, s\right)\right)^2 ds =$$

$$= C_H^2 \int_0^{[nt_1]/n} s^{1-2H} \left(\int_{[nt_1]/n}^{[nt_2]/n} u^{H-1/2} (u-s)^{H-3/2} du \right)^2 ds +$$

$$+ C_H^2 \int_{[nt_1]/n}^{[nt_2]/n} s^{1-2H} \left(\int_s^{[nt_2]/n} u^{H-1/2} (u-s)^{H-3/2} du \right)^2 ds. \qquad (2)$$

Тепер врахуємо інтегральне зображення ДБР Z_t через вінерів процес, яке міститься у статті [5]: $Z_t = \int_0^t z(t, s) dW_s$, згідно з яким права частина (2) дорівнює

$$\mathrm{E}\left| Z_{[nt_2]/n} - Z_{[nt_1]/n} \right|^2 = \left| \frac{[nt_2]}{n} - \frac{[nt_1]}{n} \right|^{2H} \le (t_2 - t_1)^{2H}.$$

Тому

$$\mathrm{E} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \Delta Z_{i/n}^{(n)} \right|^2 \le \sum_{i=1}^{n-1} n^{-2H} \to 0, \qquad n \to \infty,$$

$$\mathrm{E} \sum_{j=1}^{p_r-1} \left| \Delta Z_{j,r}^{(n)} \right|^2 \le \sum_{j=1}^{p_r-1} (t_{j+1}^{(r)} - t_j^{(r)})^{2H} \to 0, \qquad r \to \infty.$$

Лему доведено.

Лема 2. *Якщо виконуються умови* A) *та* B_1), B_2), *то*

$$\lim_{r\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathrm{P}\left\{\left|S^{(n)}_{\pi_r}-\sum_{i=1}^{n-1}f_n(Z^{(n)}_{i/n})\Delta Z^{(n)}_{i/n}\right|>\delta\right\}=0$$

для будь-якого $\delta>0$.

Доведення. Нехай функція $F(x)\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є первісною функції f, тобто $F'(x)=f(x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}$. Тоді за формулою Тейлора та на підставі умов B_1), B_2) мають місце два зображення однієї і тієї ж різниці $F(Z^{(n)}_1)-F(0)$:

$$F(Z^{(n)}_1)-F(0)=\sum_{i=0}^{n-1}\big(F(Z^{(n)}_{(i+1)/n})-F(Z^{(n)}_{i/n})\big)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}f(Z^{(n)}_{i/n})\Delta Z^{(n)}_{i/n}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}f'(\theta_{i,n})(\Delta Z^{(n)}_{i/n})^2, \tag{3}$$

$$F(Z^{(n)}_1)-F(0)=\sum_{j=0}^{p_r-1}\big(F(Z^{(n)}_{t^{(r)}_{j+1}})-F(Z^{(n)}_{t^{(r)}_j})\big)=$$

$$=\sum_{j=0}^{p_r-1}f(Z^{(n)}_{t^{(r)}_j})\Delta Z^{(n)}_{j,r}+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{p_r-1}f'(\theta_{j,r,n})(\Delta Z^{(n)}_{j,r})^2, \tag{4}$$

де точки $\theta_{i,n}$ лежать між $Z^{(n)}_{i/n}$ і $Z^{(n)}_{(i+1)/n}$, а точки $\theta_{j,r,n}$ — між $Z^{(n)}_{t^{(r)}_j}$ і $Z^{(n)}_{t^{(r)}_{j+1}}$. З (3) і (4) отримуємо

$$\left|S^{(n)}_{\pi_r}-\sum_{i=0}^{n-1}f(Z^{(n)}_{i/n})\Delta Z^{(n)}_{i/n}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left|f'(\theta_{i,n})\right|(\Delta Z^{(n)}_{i/n})^2+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{p_r-1}\left|f'(\theta_{j,r,n})\right|(\Delta Z^{(n)}_{j,r})^2.$$

Тому для будь-якого $\delta>0$

$$\mathrm{P}\left\{\left|S^{(n)}_{\pi_r}-\sum_{i=0}^{n-1}f(Z^{(n)}_{i/n})\Delta Z^{(n)}_{i/n}\right|>\delta\right\}\le\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le1}\left|Z^{(n)}_t\right|\ge R\right\}+$$

$$+\,\mathrm{P}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta Z^{(n)}_{i/n})^2\ge\frac{2\delta}{M_R}\right\}+\mathrm{P}\left\{\sum_{j=0}^{p_r-1}(\Delta Z^{(n)}_{j,r})^2\ge\frac{2\delta}{M_R}\right\}. \tag{5}$$

Згідно з результатом статті [3], $Z^{(n)}$ збігається до Z в топології Скорохода на $[0,1]$. Оскільки функціонали типу sup та inf неперервні в топології Скорохода, а розподіл Z_t — гауссівський, то

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le1}\left|Z^{(n)}_t\right|\ge R\right\}\to\mathrm{P}\left\{\sup_{0\le t\le1}\left|Z_t\right|\ge R\right\}$$

для всіх $R>0$. Остання ймовірність прямує до 0 при $R\to\infty$ [6], тому доведення випливає з (5) та леми 1.

3. Слабка збіжність інтегральних функціоналів. Тепер сформулюємо і доведемо основний результат.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* А) *і* B_1), B_2), *то*

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_n(Z_{i/n}^{(n)})\Delta Z_{i/n}^{(n)} \xrightarrow{w} \int_0^1 f(Z_t)\,dZ_t, \qquad n \to \infty,$$

де $\xrightarrow{w}$ *означає слабку збіжність за розподілом.*

Доведення. Подамо різницю

$$\Delta_n := \int_0^1 f(Z_t)\,dZ_t - \sum_{i=1}^{n-1} f_n(Z_{i/n}^{(n)})\Delta Z_{i/n}^{(n)}$$

у вигляді $\Delta_n = \sum_{j=1}^{4} \Delta_{n,r}^{(j)}$, де

$$\Delta_{n,r}^{(1)} = \int_0^1 f(Z_t)\,dZ_t - \sum_{j=1}^{p_r-1} f(Z_{t_j^{(r)}})\Delta Z_{j,r} \quad \text{(не залежить від } n\text{)},$$

$$\Delta_{n,r}^{(2)} = \sum_{j=1}^{p_r-1} f(Z_{t_j^{(r)}})\Delta Z_{j,r} - \sum_{j=1}^{p_r-1} f(Z_{t_j^{(r)}}^{(n)})\Delta Z_{j,r}^{(n)},$$

$$\Delta_{n,r}^{(3)} = \sum_{j=1}^{p_r-1} f(Z_{t_j^{(r)}}^{(n)})\Delta Z_{j,r}^{(n)} - \sum_{j=1}^{p_r-1} f_n(Z_{t_j^{(r)}}^{(n)})\Delta Z_{j,r}^{(n)},$$

$$\Delta_{n,r}^{(4)} = \sum_{j=1}^{p_r-1} f_n(Z_{t_j^{(r)}}^{(n)})\Delta Z_{j,r}^{(n)} - \sum_{i=1}^{n-1} f_n(Z_{i/n}^{(n)})\Delta Z_{i/n}^{(n)}.$$

Згідно з результатом Целє [4], згаданим у вступі,

$$\mathrm{P} - \lim_{r\to\infty} \Delta_{n,r}^{(1)} = 0.$$

На підставі леми 2

$$\mathrm{P} - \lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} \Delta_{n,r}^{(4)} = 0.$$

Що стосується $\Delta_{n,r}^{(2)}$, то внаслідок слабкої збіжності $Z^{(n)}$ до Z

$$\sum_{j=1}^{p_r-1} f(Z_{t_j^{(r)}}^{(n)})\Delta Z_{j,r}^{(n)} \xrightarrow{w} \sum_{j=1}^{p_r-1} f(Z_{t_j^{(r)}})\Delta Z_{j,r}$$

при $n \to \infty$ та для будь-якого фіксованого $r \geq 1$.

Залишилось оцінити $\Delta_{n,r}^{(3)}$. Для цього використаємо прийом, що аналогічний використаному при доведенні леми 2.

Нехай

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt.$$

Тоді

$$F(Z_1^{(n)}) = \sum_{j=1}^{p_r-1} \left(F(Z_{t_{j+1}^{(r)}}^{(n)}) - F(Z_{t_j^{(r)}}^{(n)})\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p_r-1} f(Z_{t_j^{(r)}}^{(n)}) \Delta Z_{j,r}^{(n)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p_r-1} f'(\theta_{j,r}^{(n)}) (\Delta Z_{j,r}^{(n)})^2 \tag{6}$$

і аналогічно

$$F_n(Z_1^{(n)}) = \sum_{j=1}^{p_r-1} f_n(Z_{t_j^{(r)}}^{(n)}) \Delta Z_{j,r}^{(n)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{p_r-1} f_n'(\tilde{\theta}_{j,r}^{(n)}) (\Delta Z_{j,r}^{(n)})^2, \tag{7}$$

де $\theta_{j,r}^{(n)}$ і $\tilde{\theta}_{j,r}^{(n)}$ лежать між $Z_{t_j^{(r)}}^{(n)}$ і $Z_{t_{j+1}^{(r)}}^{(n)}$.

Тепер

$$\left| F(Z_1^{(n)}) - F_n(Z_1^{(n)}) \right| \leq \left| Z_1^{(n)} \right| \sup_{|t| \leq |Z_1^{(n)}|} |f_n(t) - f(t)|,$$

звідки

$$\mathrm{P}\left\{ \left| F(Z_1^{(n)}) - F_n(Z_1^{(n)}) \right| \geq \delta \right\} \leq \mathrm{P}\left\{ \left| Z_1^{(n)} \right| \geq R \right\} + \mathrm{P}\left\{ \sup_{|t| \leq R} |f_n(t) - f(t)| \geq \frac{\delta}{R} \right\} \tag{8}$$

(подія під знаком останньої ймовірності не є випадковою). Оскільки f_n рівномірно прямує до f на $[-R, R]$, то другий доданок в (8) є нульовим, починаючи з деякого номера n, а

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left\{ \left| Z_1^{(n)} \right| \geq R \right\} = \mathrm{P}\{ |Z_1| \geq R \} \leq \frac{C}{R^2}.$$

Тому з (6) – (8) на підставі лем 1 і 2 маємо

$$\mathrm{P} - \lim_{r \to \infty} \lim_{n \to \infty} \Delta_{n,r}^3 = 0,$$

що і завершує доведення теореми.

Зауваження. Всі попередні міркування легко переносяться на випадкові блукання, визначені на довільному відрізку $[0, T]$, $T > 0$. Нехай тепер $f(t, x)$ і $f_n(t, x)\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, — послідовність функцій, що задовольняє умови:

C_1) $f \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, $f_n \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ і для будь-якого $R > 0$ існує $M_R > 0$ таке, що

$$\sup_{0 \leq t \leq R, |x| \leq R} \left\{ \left| f'_{n,t}(t, x) \right| + \left| f'_{n,x}(t, x) \right| + |f'_t(t, x)| + |f'_x(t, x)| \right\} \leq M_R;$$

C_2) $f_n \rightrightarrows f$ рівномірно на будь-якому прямокутнику $[0, R] \times [-R, R]$.

В цілому аналогічно до теореми 1 можна довести наступний результат.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* А) *і* C_1), C_2), *то*

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_n\left(\frac{i}{n}, Z_{i/n}^{(n)}\right) \Delta Z_{i/n}^{(n)} \xrightarrow{w} \int_0^1 f(t, Z_t)\, dZ_t, \qquad n \to \infty.$$

1. *Скороход А. В., Слободенюк Н. П.* Предельные теоремы для случайных блужданий. – Киев: Наук. думка, 1970. – 304 с.
2. *Yoshihara K.-I.* A weak convergence theorem for functionals of sums of martingale differences // Yokohama Math. J. – 1978. – **26**. – P. 101 – 107.
3. *Sottinen T.* Fractional Brownian motion, random walks and binary market models // Finance and Stochastics. – 2001. – **5**, № 3. – P. 343 – 355.
4. *Zaehle M.* Integration with respect to fractal functionals and stochastic calculus // Probab. Theory and Relat. Fields. – 1997. – **111**. – P. 333 – 374.
5. *Norros I., Valkeila E., Virtamo J.* An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions // Bernoulli. – 1999. – **5**, № 4. – P. 571 – 587.
6. *Синай Я. Г.* О распределении максимума дробного броуновского движения // Успехи мат. наук. – 1997. – **52**, вып. 2(314). – С. 119 – 138.

Одержано 06.10.2005,
після доопрацювання — 27.02.2006