УДК 517.9

С. М. Чуйко (Славян. пед. ун-т)

ВОЗНИКНОВЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕТЕРОВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

We obtain constructive conditions for the emergence of solutions of a linear Noetherian boundary-value problem for a system of ordinary differential equations in the critical case and construct an iterative procedure for finding these solutions. An estimate is found for the range of values of the small parameter for which the convergence of the iterative procedure is preserved.

Одержано конструктивні умови виникнення та побудовано ітераційну процедуру для знаходження розв'язків нетерової лінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь у критичному випадку. Знайдено оцінку області значень малого параметра, для яких зберігається збіжність ітераційної процедури.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о нахождении решения $z(t) \in C^1[a, b]$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_0}{dt} = A(t)z_0 + f(t), \tag{1}$$

удовлетворяющих краевому условию

$$lz_0(\cdot) = \alpha, \qquad \alpha \in R^m. \tag{2}$$

Здесь $A(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица и $f(t)$ — n-мерный вектор-столбец, элементы которых — непрерывные на отрезке $[a, b]$ действительные функции, $lz(\cdot)$ — линейный ограниченный векторный функционал вида $lz_0(\cdot): C[a, b] \to R^m$. Предположим, что имеет место критический случай: $P_{Q^*} \neq 0$, где $Q = lX(\cdot)$ — $(m \times n)$-матрица, $\operatorname{rank} Q = n_1$, P_{Q^*} — $(m \times m)$-матрица-ортопроектор $P_{Q^*}: R^m \to N(Q^*)$; $(d \times m)$-мерная матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из $d = m - n_1$ линейно независимых строк матрицы-ортопроектора P_{Q^*}; $X(t)$ — нормальная фундаментальная матрица $\left(X(a) = I_n\right)$ однородной части системы (1). В этом случае нетерова $(m \neq n)$ задача (1), (2) разрешима для тех и только для тех неоднородностей $f(t)$ и α, для которых имеет место равенство [1]

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - lK\left[f(s)\right](\cdot)\right\} = 0. \tag{3}$$

Поставим задачу о нахождении линейных возмущений $\varepsilon A_1(t)z$ и $\varepsilon l_1 z(\cdot, \varepsilon)$, которые обеспечивали бы существование решений $z(t, \varepsilon) \in C]0, \varepsilon_0], C^1[a, b]$ краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} = A(t)z + f(t) + \varepsilon A_1(t)z, \qquad lz(\cdot, \varepsilon) = \alpha + \varepsilon l_1 z(\cdot, \varepsilon) \tag{4}$$

для любых неоднородностей $f(t) \in C[a, b]$ и $\alpha \in R^m$ при том, что условие (3), вообще говоря, не выполняется. Здесь $l_1 z(\cdot, \varepsilon)$ — линейный ограниченный векторный функционал $l_1 z(\cdot, \varepsilon): C[a, b] \to R^m$; $A_1(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица, элементы которой — непрерывные на отрезке $[a, b]$ действительные функции. Решение поставленной задачи в случае $l_1 z(\cdot, \varepsilon) \equiv 0$ в виде ряда Лорана было дано в монографии [2]. Позднее данная методика в случае $l_1 z(\cdot, \varepsilon) \neq 0$ была перенесена на краевые задачи с невырожденным импульсным воздействием [3]. Существенным в данных работах было построение решения в виде ряда Лорана с использованием метода Вишика – Люстерника [4]. В данной статье будет построено решение поставленной задачи методом простых итераций и найдена оценка ε_* длины промежутка $]0, \varepsilon^*]$, на котором сохраняется сходимость этой итерационной процедуры. Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (4) имеет вид

$$P_{Q_d^*}\{\alpha + \varepsilon l_1 z(\cdot, \varepsilon) - lK[f(s) + \varepsilon A_1(s)z(s, \varepsilon)](\cdot)\} = 0.$$

Если это условие выполнено, то общее решение задачи (4)

$$z(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + z^{(1)}(t, \varepsilon),$$

$$z^{(1)}(t, \varepsilon) = G[f(s) + \varepsilon A_1(s)z(s, \varepsilon); \alpha + \varepsilon l_1 z(\cdot, \varepsilon)](t)$$

представимо с помощью обообщенного оператора Грина задачи (1), (2)

$$G[f(s); \alpha](t) = X(t)Q^+\{\alpha - lK[f(s)](\cdot)\} + K[f(s)](t)$$

и $(n \times r)$-мерной матрицы $X_r(t)$, составленной из r линейно независимых решений $(r = n - n_1)$ однородной задачи (1), (2). Здесь Q^+ — псевдообратная матрица по Муру – Пенроузу [1],

$$K[f(s)](t) = X(t)\int_a^t X^{-1}(s)f(s)\,ds$$

— оператор Грина задачи Коши для системы (1). При $\varepsilon \neq 0$, $P_{B_0^*} = 0$ краевая задача (4) имеет по меньшей мере одно решение, представимое операторной системой

$$\begin{gathered} z(t, \varepsilon) = X_r(t)c_r(\varepsilon) + z^{(1)}(t, \varepsilon), \\ z^{(1)}(t, \varepsilon) = G[f(s) + \varepsilon A_1(s)z(s, \varepsilon); \alpha + \varepsilon l_1 z(\cdot, \varepsilon)](t), \\ c_r(\varepsilon) = -B_0^+ \frac{1}{\varepsilon} P_{Q_d^*}\{\alpha - lK[f(s)](\cdot)\} - \\ - B_0^+ P_{Q_d^*}\{l_1 z^{(1)}(\cdot, \varepsilon) - lK[A_1(s)z^{(1)}(s, \varepsilon)](\cdot)\} + P_\rho c_\rho, \qquad c_\rho \in R^\rho, \end{gathered} \tag{5}$$

где $B_0 = P_{Q_d^*}\{l_1 X_r(\cdot) - lK[A_1(s)X_r(s)](\cdot)\}$ — $(d \times r)$-мерная матрица, $P_{B_0^*}$ — $(d \times d)$-мерная матрица-ортопроектор: $R^d \to N(B_0^*)$, $P_{B_0}: R^r \to N(B_0)$ — $(r \times r)$-матрица-ортопроектор, P_ρ — $(r \times \rho)$-матрица, составленная из ρ линейно независимых столбцов матрицы-ортопроектора P_{B_0}. Операторная система (5) принадлежит классу систем, для решения которых применим метод простых итераций [1 – 3]. Первое приближение к решению операторной системы (5) ищем как решение краевой задачи первого приближения

$$\frac{dz_1}{dt} = A(t)z_1, \qquad lz_1(\cdot, \varepsilon) = 0. \tag{6}$$

Существование решения задачи (6) гарантировано однородностью задачи (1), (2), само же решение задачи (6) представимо в виде $z_1(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_1}(\varepsilon)$. Второе приближение к решению операторной системы (5) ищем как решение краевой задачи второго приближения

$$\frac{dz_2}{dt} = A(t)z_2(t,\varepsilon)+f(t)+\varepsilon A_1(t)z_1(t,\varepsilon), \qquad lz_2(\cdot,\varepsilon) = \alpha+\varepsilon l_1 z_1(\cdot,\varepsilon) \qquad (7)$$

в виде $z_2(t,\varepsilon)=X_r(t)c_{r_2}(\varepsilon)+ z_2^{(1)}(t,\varepsilon)$, где

$$z_2^{(1)}(t,\varepsilon) = G[f(s)+\varepsilon A_1(s)z_1(s,\varepsilon);\, \alpha+\varepsilon l_1 z_1(\cdot,\varepsilon)](t).$$

При условии $P_{B_0^*}=0$ находим первое приближение к вектору $c_r(\varepsilon)$:

$$c_{r_1}(\varepsilon) = -B_0^+\frac{1}{\varepsilon}P_{Q_d^*}\big\{\alpha - lK[f(s)](\cdot)\big\} + P_\rho c_\rho .$$

Третье приближение к решению операторной системы (5) ищем как решение краевой задачи третьего приближения

$$\frac{dz_3}{dt} = A(t)z_3(t,\varepsilon)+f(t)+\varepsilon A_1(t)z_2(t,\varepsilon), \qquad lz_3(\cdot,\varepsilon) = \alpha+\varepsilon l_1 z_2(\cdot,\varepsilon). \qquad (8)$$

При условии $P_{B_0^*}=0$ находим второе приближение к вектору $c_r(\varepsilon)$:

$$c_{r_2}(\varepsilon) = -B_0^+\frac{1}{\varepsilon}P_{Q_d^*}\big\{\alpha - lK[f(s)](\cdot)\big\} -$$

$$- B_0^+P_{Q_d^*}\Big\{l_1 z_2^{(1)}(\cdot,\varepsilon) - lK[A_1(s)z_2^{(1)}(s,\varepsilon)](\cdot)\Big\} + P_\rho c_\rho .$$

Продолжая рассуждения, приходим к итерационной процедуре

$$z_1(t,\varepsilon) = X_r(t)c_{r_1}(\varepsilon),$$

$$c_{r_1}(\varepsilon) = -B_0^+\frac{1}{\varepsilon}P_{Q_d^*}\big\{\alpha - lK[f(s)](\cdot)\big\} + P_\rho c_\rho ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_{k+1}(t,\varepsilon)=X_r(t)c_{r_{k+1}}(\varepsilon)+ z_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon), \qquad (9)$$

$$z_{k+1}^{(1)}(t,\varepsilon) = G[f(s)+\varepsilon A_1(s)z_k(s,\varepsilon);\, \alpha+\varepsilon l_1 z_k(\cdot,\varepsilon)](t),$$

$$c_{r_{k+1}}(\varepsilon) = -B_0^+\frac{1}{\varepsilon}P_{Q_d^*}\big\{\alpha - lK[f(s)](\cdot)\big\} -$$

$$- B_0^+P_{Q_d^*}\Big\{l_1 z_{k+1}^{(1)}(\cdot,\varepsilon) - lK[A_1(s)z_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon)](\cdot)\Big\} + P_\rho c_\rho, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Докажем сходимость этой процедуры к искомому решению задачи (4). Операторная система (5) эквивалентна задаче о построении решения операторного уравнения $z(t,\varepsilon)=\Phi z(t,\varepsilon)$, где

$$\Phi z(t,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}X_r(t)B_0^+P_{Q_d^*}\big\{\alpha - lK[f(s)](\cdot)\big\} -$$

$$- X_r(t)B_0^+P_{Q_d^*}\big\{l_1 G[f(s)+\varepsilon A_1(s)z(s,\varepsilon);\, \alpha+\varepsilon l_1 z(\cdot,\varepsilon)](\cdot) -$$

$$- lK\big[A_1(s)G[f(\tau) + \varepsilon A_1(\tau)z(\tau, \varepsilon);\, \alpha + \varepsilon l_1 z(\cdot, \varepsilon)](s)\big](\cdot)\Big\} +$$

$$+ X_r(t)P_\rho c_\rho + G[f(s) + \varepsilon A_1(s)z(s, \varepsilon);\, \alpha + \varepsilon l_1 z(\cdot, \varepsilon)](t).$$

Оператор $\Phi z(t, \varepsilon)$ — непрерывный, ограниченный, действующий из пространства непрерывных на отрезке $[a, b]$ и промежутке $]0, \varepsilon_0]$ действительных вектор-функций $z(t, \varepsilon) \in C^1[a, b], C]0, \varepsilon_0]$ в себя. Для оценки длины промежутка, на котором сохраняется сходимость итерационной процедуры (9) к искомому решению задачи (4), оценим длину промежутка, на котором оператор $\Phi z(t, \varepsilon)$ является сжимающим. Норму вектор-функции $\varphi(t) \in C[a, b]$ полагаем таковой [5, 6]:

$$\|\varphi(t)\| = \max_{1 \le i \le n} \left\|\varphi^{(i)}(t)\right\|, \qquad \|\varphi_i(t)\| = \max_{a \le t \le b} \left|\varphi^{(i)}(t)\right|.$$

Нормой $(m \times n)$-матрицы $A(t) = a_{ij}(t)$, $a_{ij}(\cdot) \in C[a, b]$, будем называть число

$$\|A(t)\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left\|a_{ij}(t)\right\|.$$

В силу теоремы Рисса векторный функционал, определенный на пространстве непрерывных вектор-функций $x(t) \in C[a, b]$, представим в виде

$$lx(\cdot) = \int_a^b d\Omega(t)x(t),$$

где $\Omega(t)$ — $(m \times n)$-матрица, элементы которой — функции ограниченной на $[a, b]$ вариации. Здесь имеется в виду интеграл Римана – Стильтьеса. При этом $\|lx(\cdot)\| = \|\Omega(t)\|$. Пусть $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ — вектор-функции из малой окрестности нуля, причем $x(\cdot, \varepsilon), y(\cdot, \varepsilon) \in C^1[a, b], C]0, \varepsilon_0]$. Оценим норму разности

$$\|\Phi x(t, \varepsilon) - \Phi y(t, \varepsilon)\| \le [q(\lambda_1 + \lambda_2\mu) + \mu]\varepsilon\|x - y\|.$$

Таким образом, при $0 < \varepsilon < \varepsilon_* = [q(\lambda_1 + \lambda_2\mu) + \mu]^{-1} \le \varepsilon^*$ оператор $\Phi z(t, \varepsilon)$ является сжимающим, при этом, следуя принципу Каччиопполи – Банаха [6], и уравнение $z(t, \varepsilon) = \Phi z(t, \varepsilon)$, и операторная система (5) имеют решение, для нахождения которого применима итерационная процедура (9). Здесь

$$q = \left\|X_r(t)B_0^+ P_{Q_d^*}\right\|, \qquad \lambda_1 = \left\|l_1 G[A_1(s)*;\, l_1*](\cdot)\right\|,$$

$$\lambda_2 = \left\|l_1 K[A_1(\tau)*](\cdot)\right\|, \qquad \mu = \left\|G[A_1(\tau)*;\, l_1*](s)\right\|.$$

Теорема. *Пусть краевая задача* (4) *представляет критический случай* $P_{Q^*} \ne 0$, *при этом условие* (3) *разрешимости невозмущенной задачи* (1), (2) *не выполняется при произвольных неоднородностях* $f(t) \in C[a, b]$ *и* $\alpha \in R^n$. *Тогда при условии* $P_{B_0^*} = 0$ *задача* (4) *имеет по меньшей мере одно решение* $z(t, \varepsilon) \in C^1[a, b], C]0, \varepsilon_0]$, *где*

$$B_0 = P_{Q_d^*}\left\{l_1 X_r(\cdot) - lK[A_1(s)X_r(s)](\cdot)\right\}$$

— $(d \times r)$-*мерная матрица. Это решение можно определить с помощью сходя-*

щегося при $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_*]$ *итерационного процесса* (9).

Пример. Условия теоремы выполняются в задаче

$$\frac{dz}{dt} = (t^2 - t)z + e^{t^2-t} + \varepsilon z, \qquad lz(\cdot, \varepsilon) = z(0, \varepsilon) - z(1, \varepsilon) = 0. \tag{10}$$

Согласно принятым обозначениям $m = n = 1$, $A(t) = t^2 - t$, $f(t) = e^{t^2-t}$, $lz(\cdot) = z(0, \varepsilon) - z(1, \varepsilon) = 0$, $\alpha = 0$, $l_1 z(\cdot) \equiv 0$, $A_1(t) = 1$. Нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциального уравнения (10) суть функция $X(t) = e^{t^2-t}$. Поскольку $Q = 0$, имеет место критический случай; при этом $P_{Q_d^*} = P_{Q_r} = 1$. Общее решение невозмущенной задачи для (10) имеет вид $z_0(t, c) = c\,e^{t^2-t}$. Невозмущенная задача для (10) неразрешима, при этом слабовозмущенная задача имеет решение, ибо $B_0 = 1$. На первом же шаге итерационной процедуры (9) находим $z_1(t, \varepsilon) = -\varepsilon^{-1} X(t)$, при этом все последующие приближения совпадают с первым; это объясняется тем, что $z_1(t, \varepsilon)$ — точное решение задачи (10). Согласно доказанной теореме это решение определено для $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_*]$, $\varepsilon_* = 0{,}340977$.

1. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 p.
2. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1990. – 96 с.
3. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
4. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, вып. 3. – С. 3 – 80.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

Получено 06.06.2006