УДК 511.72

О. М. Барановський (Ін-т математики НАН України, Нац. пед. ун-т, Київ),
М. В. Працьовитий (Нац. пед. ун-т, Ін-т математики НАН України, Київ),
Г. М. Торбін (Inst. Angewandte Math. Univ., Bonn, Germany, Нац. пед. ун-т,
Ін-т математики НАН України, Київ

ТОПОЛОГО-МЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИН ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ З УМОВАМИ НА ЇХ РОЗКЛАДИ В РЯДИ ОСТРОГРАДСЬКОГО*

We study topological and metric properties of the set

$$C\left[\bar{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right] = \left\{x:\ x = \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{g_1(g_1+g_2)\ldots(g_1+g_2+\ldots+g_n)},\ g_k \in V_k \subset \mathbb{N}\right\}$$

with certain conditions on the sequence of sets $\{V_n\}$. In particular, we establish conditions under which the Lebesgue measure of this set is: (a) zero; (b) positive. We compare the results obtained with the corresponding results for continued fractions and discuss their possible applications in the probability theory.

Исследуются тополого-метрические свойства множества

$$C\left[\bar{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right] = \left\{x:\ x = \sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{g_1(g_1+g_2)\ldots(g_1+g_2+\ldots+g_n)},\ g_k \in V_k \subset \mathbb{N}\right\}$$

с определенными условиями на последовательность множеств $\{V_n\}$. В частности, установлены условия, при которых мера Лебега этого множества является: а) нулевой, б) положительной. Выполнено сравнение с соответствующими результатами для цепных дробей. Обсуждаются возможные применения полученных результатов в теории вероятностей.

Вступ. Відомо багато різних способів подання та зображення дійсних чисел (моделей (інтерпретацій) аксіоматичної теорії дійсних чисел) як за допомогою символів скінченного, так і нескінченного алфавітів (набору цифр) [1 – 3]. Кожен з них має свою область застосовності та деякі переваги перед іншими в якомусь відношенні. Кожне зображення породжує свої метричні співвідношення і свою геометрію, на яких базуються метрична, фрактальна і ймовірнісна теорії дійсних чисел.

Розклади чисел в ланцюгові дроби (ланцюгове зображення) завдяки розробленості теорії та різноманітним застосуванням зайняли окреме важливе місце в математиці. Разом з цим існують аналогічні, але в метричному відношенні відмінні, теорії, пов'язані з розкладами чисел у знакозмінні ряди. Вони розроблені значно менше. До таких належать зображення чисел рядами Остроградського – Серпінського – Пірса.

Приблизно в 1861 р. М. В. Остроградський розглянув два алгоритми розкладу додатних дійсних чисел у знакозмінні ряди:

$$\sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{q_1 q_2 \cdots q_k}, \quad \mathbb{N} \ni q_{k+1} > q_k, \tag{1}$$

$$\sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{q_k}, \quad q_{k+1} \geq q_k(q_k+1) \tag{2}$$

(ряди Остроградського 1- і 2-го видів відповідно), знайдені серед рукописів і неопублікованих робіт цього автора Є. Я. Ремезом [4]. Незалежно від цього ря-

* Частково підтримано проектами DFG 436 UKR 113/78, DFG 436 UKR 113/80, SFB-611 та фондом Александра фон Гумбольдта.

ди Остроградського 1-го виду досліджувались іншими авторами. Так, у роботі [5] доведено, що сума нескінченного ряду виду (1) є ірраціональним числом. У 1911 р. В. Серпінський [2] розглянув кілька розвинень дійсних чисел в ряди, серед яких і розвинення (1) та (2). Він зазначає, що розвинення виду (1) зустрічаються у книзі Ю. Пузини „Teorya funkcyi analitycznych” (1898 р.). У 1929 році розклади чисел в ряди виду (1) з’являються у роботі Т. Пірса [6] без будь-яких посилань на інші роботи. В англомовній літературі такі розклади називають розкладами Пірса, що є не зовсім виправданим. Зазначимо, що в роботі [7] можна знайти додаткову інформацію про зародження ідей та розвиток теорії рядів Остроградського – Серпінського – Пірса. Ми, дотримуючись вітчизняної традиції [4, 8 – 12], називаємо розклади чисел в ряди виду (1) рядами Остроградського 1-го виду. Ще кілька робіт присвячено дослідженню різних питань, пов’язаних з розкладами дійсних чисел у ряди Остроградського, зокрема вивченню питань подання чисел певного виду рядами вигляду (1) [13 – 17], розв’язанню деяких метричних задач [18, 19, 7, 20] та ін. [21 – 23, 7, 20]. Крім роботи [13] авторам даної статті були недоступні інші роботи Дж. Шалліта, хоча відомо про їх існування [18, 22].

Кожне дійсне число $x \in (0,1)$ можна подати у вигляді скінченного чи нескінченного ряду (1). Якщо число x є ірраціональним, то це можна зробити єдиним чином, і вираз (1) при цьому є нескінченним; якщо ж x є ірраціональним, то його можна подати у вигляді (1) зі скінченною кількістю доданків двома різними способами [4].

Ряди Остроградського збігаються досить швидко, найповільніше збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = \frac{e-1}{e}.$$

Це дозволяє наближати ірраціональні числа числами раціональними, що є частковими сумами ряду Остроградського. При цьому похибка не перевищує модуля першого з відкинутих доданків:

$$\left| x - \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{q_1(x)q_2(x)\ldots q_k(x)} \right| =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{q_1(x)q_2(x)\ldots q_{m+j}(x)} < \frac{1}{q_1(x)q_2(x)\ldots q_{m+1}(x)}.$$

Якщо покласти

$$\begin{aligned} g_1 &= q_1, \\ g_2 &= q_2 - q_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ g_{n+1} &= q_{n+1} - q_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

то вираз (1) можна переписати у вигляді

$$\frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_1(g_1+g_2)} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{g_1(g_1+g_2)\ldots(g_1+g_2+\ldots+g_n)} + \ldots. \tag{3}$$

Вираз (3) скорочено записується у вигляді

$$\overline{\mathrm{O}}^1(g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots)$$

і називається $\overline{\mathrm{O}}^1$-*зображенням* числа $x \in (0,1)$. Числа g_n називають $\overline{\mathrm{O}}^1$-*символами* числа x.

Ми досліджуємо метричні властивості множини $C\left[\overline{O}^1, \{V_n\}\right]$ всіх чисел $x \in [0, 1]$, $\overline{O}^1$-символи яких задовольняють умову $g_n(x) \in V_n \subset \mathbb{N}$ для всіх n. Задача знаходження міри Лебега множини $C\left[\overline{O}^1, \{V_n\}\right]$ має самостійний інтерес і цікава також у зв'язку з дослідженням розподілів випадкових величин вигляду

$$\xi = \overline{O}^1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots),$$

де ξ_k — випадкові величини. У цій роботі знайдено умови додатності міри Лебега множини $C\left[\overline{O}^1, \{V_n\}\right]$ у випадках, коли множини $\mathbb{N} \setminus V_k$ є скінченними і коли множини V_k є скінченними, а також знайдено умови рівності 0 міри Лебега множини $C\left[\overline{O}^1, \{V_n\}\right]$ у випадках, коли множини V_k є скінченними і коли множини V_k та $\mathbb{N} \setminus V_k$ є нескінченними. Ця стаття продовжує дослідження, розпочаті в роботах [24 – 27].

1. Циліндричні множини та їх властивості. *Циліндричною множиною* (*циліндром*) *рангу* m *з основою* $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ називають множину $\overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m]}$ всіх чисел $x \in [0, 1]$, які можна подати у вигляді (3) так, що m перших $\overline{O}^1$-символів числа x дорівнюють $c_1, c_2, \ldots, c_m$ відповідно.

Легко довести, що циліндричні множини мають такі властивості.

1. Циліндрична множина $\overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m]}$ є відрізком $[a, b]$, де

$$a = \min\left\{\overline{O}^1(c_1, c_2, \ldots, c_m),\ \overline{O}^1(c_1, c_2, \ldots, c_m + 1)\right\},$$
$$b = \max\left\{\overline{O}^1(c_1, c_2, \ldots, c_m),\ \overline{O}^1(c_1, c_2, \ldots, c_m + 1)\right\}.$$

***Зауваження* 1.** Інтервал з тими ж кінцями, що й відрізок $\overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m]}$, будемо позначати $\overline{O}^1_{(c_1 c_2 \ldots c_m)}$ і називати *циліндричним інтервалом*.

2. $\overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m]} = \bigcup_{c=1}^{\infty} \overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m c]} \cup \overline{O}^1(c_1, c_2, \ldots, c_m)$, причому

$$\sup \overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m c]} = \inf \overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m (c+1)]}, \quad \text{якщо} \quad m \quad \text{є непарним},$$
$$\inf \overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m c]} = \sup \overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m (c+1)]}, \quad \text{якщо} \quad m \quad \text{є парним},$$

і

$$\overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m c]} \cap \overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m (c+1)]} = \overline{O}^1(c_1, c_2, \ldots, c_m, c + 1).$$

3. Довжина циліндричної множини $\overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m]}$ визначається рівністю

$$\left|\overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m]}\right| = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_m (\sigma_m + 1)},$$

де $\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} c_i$.

Лема 1 [27]. *Відношення довжин циліндричних множин* $\overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m s]}$ *та* $\overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m]}$ *задовольняє рівність*

$$\frac{\left|\overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m s]}\right|}{\left|\overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m]}\right|} = \frac{a}{(a + s - 1)(a + s)} = f_s(a), \tag{4}$$

де $a = 1 + \sum_{i=1}^{m} c_i$. *Крім того,*

$$f_s(a) \le \frac{1}{2\cdot(2s-1)} \tag{5}$$

і для $m \ge s-1$

$$\frac{\left|\overline{\mathrm{O}}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m s]}\right|}{\left|\overline{\mathrm{O}}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_m]}\right|} \le \frac{m+1}{(m+s)(m+s+1)}. \tag{6}$$

***Зауваження* 2.** Нехай $\Delta^{\text{л.д.}}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ — циліндрична множина, породжена зображенням чисел ланцюговими дробами. Відомо [28, с. 75], що

$$\frac{\left|\Delta^{\text{л.д.}}_{c_1 c_2 \ldots c_m s}\right|}{\left|\Delta^{\text{л.д.}}_{c_1 c_2 \ldots c_m}\right|} = \frac{1}{s^2}\,\frac{1+\dfrac{Q_{m-1}}{Q_m}}{\left(1+\dfrac{Q_{m-1}}{sQ_m}\right)\left(1+\dfrac{1}{s}+\dfrac{Q_{m-1}}{sQ_m}\right)},$$

де Q_k позначає знаменник підхідного дробу порядку k ланцюгового дробу

$$\left[c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\right]$$

і визначається рекурентною рівністю

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = c_1, \quad Q_k = c_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \quad \text{для будь-якого} \quad k \ge 2.$$

Подвійна нерівність

$$\frac{1}{3s^2} < \frac{\left|\Delta^{\text{л.д.}}_{c_1 c_2 \ldots c_m s}\right|}{\left|\Delta^{\text{л.д.}}_{c_1 c_2 \ldots c_m}\right|} < \frac{2}{s^2}$$

має місце для будь-яких натуральних $c_1, c_2, \ldots, c_m$ і s. Для $\overline{\mathrm{O}}^1$-зображення маємо $f_s(a) \to 0$, $a \to \infty$, і лема 1 свідчить про принципову відмінність основних метричних співвідношень зображення чисел рядами Остроградського 1-го виду ($\overline{\mathrm{O}}^1$-зображення) і зображення чисел ланцюговими дробами.

2. Тополого-метричні властивості множини $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$. Нехай $\{V_n\}$ — фіксована послідовність непорожніх підмножин множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел. Розглянемо множину $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$, яка є замиканням множини $C^*\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$ усіх ірраціональних чисел $x = \overline{\mathrm{O}}^1(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots)$, $\overline{\mathrm{O}}^1$-символи яких задовольняють умову

$$g_n(x) \in V_n \tag{7}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$.

***Зауваження* 3.** Множина $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right] \setminus C^*\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$ є підмножиною множини раціональних чисел, а тому множини $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$ і $C^*\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$ мають однакову міру Лебега λ.

Очевидно, що:

1) $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right] = [0,1]$, якщо $V_n = \mathbb{N}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$;

2) множина $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$ є об'єднанням відрізків і, отже, має додатну міру Лебега, якщо $V_n = \mathbb{N}$ для всіх $n > n_0$.

Тому ми розглядатимемо лише випадок, коли $V_n \ne \mathbb{N}$ для нескінченної множини значень n.

Введемо позначення, які будемо використовувати при дослідженні множини $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$. Запис $A \simeq B$ означає, що симетрична різниця множин A і B (множина $(A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$) є не більш ніж зчисленною, тобто множини A і B збігаються з точністю до зчисленної множини.

Позначимо через F_k об'єднання всіх циліндрів рангу k, внутрішність яких містить точки множини $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$, $F_0 = [0,1]$, а $\overline{F}_{k+1}$ означимо рівністю

$$\overline{F}_{k+1} = F_k \setminus F_{k+1}.$$

Тоді

$$F_k \simeq \bigcup_{c_1 \in V_1} \ldots \bigcup_{c_k \in V_k} \overline{\mathrm{O}}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_k]},$$

$$\overline{F}_{k+1} \simeq \bigcup_{c_1 \in V_1} \ldots \bigcup_{c_k \in V_k} \bigcup_{s \notin V_{k+1}} \overline{\mathrm{O}}^1_{(c_1 c_2 \ldots c_k s)},$$

$$F_k = F_{k+1} \bigcup \overline{F}_{k+1} \Leftrightarrow F_{k+1} = F_k \setminus \overline{F}_{k+1} = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{k+1} \overline{F}_i,$$

і міра Лебега множин F_k і $\overline{F}_{k+1}$ визначається рівностями

$$\lambda(F_k) = \sum_{c_1 \in V_1} \ldots \sum_{c_k \in V_k} \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k (\sigma_k + 1)},$$

$$\lambda(\overline{F}_{k+1}) = \sum_{c_1 \in V_1} \ldots \sum_{c_k \in V_k} \sum_{s \notin V_{k+1}} \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k (\sigma_k + s)(\sigma_k + s + 1)} =$$

$$= \sum_{c_1 \in V_1} \ldots \sum_{c_k \in V_k} \left(\frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k} \sum_{s \notin V_{k+1}} \frac{1}{(\sigma_k + s)(\sigma_k + s + 1)} \right).$$

З означень $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$, F_k, $\overline{F}_{k+1}$ і неперервності міри Лебега $\lambda(\cdot)$ випливає наступне твердження.

Лема 2. *Мають місце відношення*

$$C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right] \subset F^c_{k+1} \subset F^c_k, \qquad C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right] = \bigcap_{k=1}^{\infty} F^c_k$$

і

$$C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right] \simeq [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{F}_k,$$

де E^c *— замикання множини* E, *а отже,*

$$\lambda\left(C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) \le \sum_{c_1 \in V_1} \ldots \sum_{c_k \in V_k} \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k (\sigma_k + 1)} = \lambda(F_k),$$

$$\lambda\left(C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) = \lim_{k \to \infty} \lambda(F_k), \tag{8}$$

$$\lambda\left(C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right).$$

Лема 3 [25]. *Множина* $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$ *є досконалою множиною (тобто замкненою множиною без ізольованих точок). Якщо* $V_n \neq \mathbb{N}$ *для нескінченної множини значень* n, *то вона є ніде не щільною множиною.*

Лема 4. *Якщо* $\lambda\left(C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) > 0$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right)}{\lambda(F_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right)}{\lambda\left(F_{k+1}\right)} = 0.$$

Доведення. Оскільки має місце рівність (8), то твердження леми випливає з рівності

$$\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right) = \lambda(F_k) - \lambda\left(F_{k+1}\right).$$

Наслідок **1.** *Якщо*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right)}{\lambda(F_k)} \neq 0,$$

то $\lambda\left(C\left[\overline{O}^1, \{V_n\}\right]\right) = 0.$

Лема 5 [27]. *Множина* $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$ *має нульову міру Лебега тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right)}{\lambda(F_k)} = \infty. \tag{9}$$

Наслідок **2.** *Якщо для деякої додатної константи* c

$$\frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right)}{\lambda(F_k)} \geq c > 0,$$

то $\lambda\left(C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) = 0.$

3. Умови додатності міри Лебега множини $\boldsymbol{C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]}$**.** Зафіксуємо $n \in \in \mathbb{N}$ і набір натуральних чисел $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, де $s_1 \in V_1$, $s_2 \in V_2, \ldots, s_n \in V_n$. Введемо позначення

$$F_k^{s_1 s_2 \ldots s_n} = F_{n+k} \cap \overline{\mathrm{O}}^1_{[s_1 s_2 \ldots s_n]},$$

$$\overline{F}_{k+1}^{s_1 s_2 \ldots s_n} = \overline{F}_{n+k+1} \cap \overline{\mathrm{O}}^1_{[s_1 s_2 \ldots s_n]}.$$

Спочатку розглянемо випадок, коли

$$V_k = \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \ldots, v_k\} = \{v_k + 1, v_k + 2, \ldots\}, \quad v_k \in \mathbb{N}.$$

Лема 6. *Нехай* $V_k = \{ v_k + 1,\ v_k + 2, \ldots \}$, $v_k \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$\lambda\left(\overline{F}_{k+1}^{s_1 s_2 \ldots s_n}\right) < \frac{1}{2} \frac{v_{n+k+1}}{v_{n+k}} \lambda\left(F_k^{s_1 s_2 \ldots s_n}\right) \tag{10}$$

для будь-якого натурального k.

Доведення. Візьмемо довільний фіксований циліндричний інтервал $\overline{\mathrm{O}}^1_{(c_1 c_2 \ldots c_{n+k})}$ рангу $n + k$. Тоді

$$\sum_{c_{n+k} \notin V_{n+k}} \left|\overline{\mathrm{O}}^1_{(c_1 c_2 \ldots c_{n+k})}\right| =$$

$$= \sum_{c_{n+k}=1}^{v_{n+k}} \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{n+k-1} (\sigma_{n+k-1} + c_{n+k})(\sigma_{n+k-1} + c_{n+k} + 1)} >$$

$$> \frac{v_{n+k}}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{n+k-1} (\sigma_{n+k-1} + v_{n+k} + 1)(\sigma_{n+k-1} + v_{n+k} + 2)}.$$

Тепер візьмемо довільний фіксований циліндричний інтервал $\overline{O}^1_{(c_1 c_2 \ldots c_{n+k} c)}$ рангу $n+k+1$. Тоді

$$\sum_{c_{n+k}\in V_{n+k}} \sum_{c\notin V_{n+k+1}} \left|\overline{\mathrm{O}}^1_{(c_1 c_2 \ldots c_{n+k} c)}\right| =$$

$$= \sum_{c_{n+k}=v_{n+k}+1}^{\infty} \sum_{c=1}^{v_{n+k+1}} \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n+k}\,\sigma_{n+k}\,(\sigma_{n+k-1}+c)(\sigma_{n+k}+c+1)} \le$$

$$\le \sum_{c_{n+k}=v_{n+k}+1}^{\infty} \frac{v_{n+k+1}}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n+k-1}\,\sigma_{n+k}\,(\sigma_{n+k}+1)(\sigma_{n+k}+2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{v_{n+k+1}}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n+k-1}(\sigma_{n+k-1}+v_{n+k}+1)(\sigma_{n+k-1}+v_{n+k}+2)}.$$

Отже,

$$\sum_{c_{n+k}\in V_{n+k}} \sum_{c\notin V_{n+k+1}} \left|\overline{O}^1_{(c_1 c_2 \ldots c_{n+k} c)}\right| < \frac{1}{2}\,\frac{v_{n+k+1}}{v_{n+k}} \sum_{c_{n+k}\notin V_{n+k}} \left|\overline{\mathrm{O}}^1_{(c_1 c_2 \ldots c_{n+k})}\right|.$$

Зафіксувавши $c_1 = s_1 \in V_1$, $c_2 = s_2 \in V_2, \ldots$, $c_n = s_n \in V_n$ та підсумувавши обидві частини останньої нерівності по всіх $c_{n+1} \in V_{n+1}$, $c_{n+2} \in V_{n+2}, \ldots$ $\ldots$, $c_{n+k-1} \in V_{n+k-1}$, отримаємо нерівність (10).

Теорема 1. *Нехай* $V_k = \{ v_k + 1,\ v_k + 2, \ldots \}$, $v_k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k}{2^k} < +\infty$$

і $S_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{v_k}{2^k}$. *Якщо* $4S_3 > v_1$, *то*

$$\lambda\left(C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) > \frac{1}{4S_3}\left(1 - \frac{v_2}{v_2+1}\right) > 0.$$

Якщо ж $4S_3 \le v_1$, *то*

$$\lambda\left(C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) > \frac{1}{v_1+1}\left(1 - \frac{v_2}{v_2+1}\,\frac{4S_2}{v_1+v_2+1}\right) > 0.$$

Доведення. Нехай $\overline{\mathrm{O}}^1_{[c_1]}$ — деяка циліндрична множина з $c_1 > v_1$ і

$$\Delta_{c_1} = C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right] \cap \overline{\mathrm{O}}^1_{[c_1]}.$$

Тоді

$$\lambda\left(\overline{F}_1^{c_1}\right) = \sum_{s=1}^{v_2} \frac{1}{c_1(c_1+s)(c_1+s+1)} = \frac{v_2}{c_1(c_1+1)(c_1+v_2+1)} = \frac{v_2}{c_1+v_2+1}\left|\overline{\mathrm{O}}^1_{[c_1]}\right|$$

і зрозуміло, що

$$\lambda(\Delta_{c_1}) = \left|\overline{\mathrm{O}}^1_{[c_1]}\right| - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\left(\overline{F}_k^{c_1}\right).$$

З леми 6 випливає, що

$$\lambda\left(\overline{F}_k^{c_1}\right) < \frac{v_{k+1}}{2^{k-1} v_2}\,\lambda\left(\overline{F}_1^{c_1}\right).$$

Отже,

$$\lambda(\Delta_{c_1}) = \left|\overline{\text{O}}^1_{[c_1]}\right| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{k+1}}{2^{k-1} v_2} \lambda\left(\overline{F}_1^{c_1}\right) =$$

$$= \left|\overline{\text{O}}^1_{[c_1]}\right| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{k+1}}{2^{k-1} v_2} \frac{v_2}{c_1 + v_2 + 1} \left|\overline{\text{O}}^1_{[c_1]}\right| =$$

$$= \left|\overline{\text{O}}^1_{[c_1]}\right| \left(1 - \frac{4}{c_1 + v_2 + 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{k+1}}{2^{k+1}}\right) = \left|\overline{\text{O}}^1_{[c_1]}\right| \left(1 - \frac{4S_2}{c_1 + v_2 + 1}\right).$$

Нерівність

$$1 - \frac{4S_2}{c_1 + v_2 + 1} > 0$$

рівносильна нерівності

$$c_1 > 4S_3 - 1.$$

Отже, при умові $4S_3 > v_1$ для довільного $c_1 \geq 4S_3$ має місце $\lambda(\Delta_{c_1}) > 0$. Тоді

$$\lambda\left(C\left[\overline{\text{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) = \sum_{c_1 = v_1 + 1}^{\infty} \lambda(\Delta_{c_1}) > \sum_{c_1 = 4S_3}^{\infty} \left|\overline{\text{O}}^1_{[c_1]}\right| \left(1 - \frac{4S_2}{c_1 + v_2 + 1}\right) =$$

$$= \sum_{c_1 = 4S_3}^{\infty} \frac{1}{c_1(c_1 + 1)} - 4S_2 \sum_{c_1 = 4S_3}^{\infty} \frac{1}{c_1(c_1 + 1)(c_1 + v_2 + 1)} =$$

$$= \frac{1}{4S_3} - 4S_3 \sum_{c_1 = 4S_2}^{\infty} \left(\frac{1}{c_1(c_1 + v_2 + 1)} - \frac{1}{(c_1 + 1)(c_1 + v_2 + 1)}\right).$$

Останню суму можна записати у вигляді

$$\sum_{c_1 = 4S_3}^{\infty} \frac{1}{v_2 + 1} \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_1 + v_2 + 1}\right) - \sum_{c_1 = 4S_3}^{\infty} \frac{1}{v_2} \left(\frac{1}{c_1 + 1} - \frac{1}{c_1 + v_2 + 1}\right) =$$

$$= \frac{1}{v_2 + 1} \left(\frac{1}{4S_3} + \ldots + \frac{1}{4S_3 + v_2}\right) - \frac{1}{v_2} \left(\frac{1}{4S_3 + 1} + \ldots + \frac{1}{4S_3 + v_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4S_3(v_2 + 1)} - \frac{1}{v_2(v_2 + 1)} \left(\frac{1}{4S_3 + 1} + \ldots + \frac{1}{4S_3 + v_2}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{4S_3(v_2 + 1)} - \frac{1}{v_2(v_2 + 1)} \frac{v_2}{4S_3 + v_2},$$

тому

$$\lambda\left(C\left[\overline{\text{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) > \frac{1}{4S_3} - \frac{4S_2}{v_2 + 1} \left(\frac{1}{4S_3} - \frac{1}{4S_3 + v_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4S_3} \left(1 - \frac{v_2}{v_2 + 1} \frac{4S_2}{4S_3 + v_2}\right) = \frac{1}{4S_3} \left(1 - \frac{v_2}{v_2 + 1}\right),$$

оскільки $4S_2 = 4S_3 + v_2$.

Якщо $4S_3 \leq v_1$, то

$$1 - \frac{4S_2}{c_1 + v_2 + 1} > 0$$

для довільного $c_1 > v_1$, тому, замінивши у попередніх міркуваннях $4S_3$ на $v_1 + 1$, отримаємо

$$\lambda\left(C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) > \frac{1}{v_1+1}\left(1 - \frac{v_2}{v_2+1}\frac{4S_2}{v_1+v_2+1}\right).$$

***Наслідок* 3.** *Якщо* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\dfrac{v_{k+1}}{v_k} < 2$, *то* $\lambda\left(C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) > 0$.

***Наслідок* 4** [27]. *Якщо* $v_k = m$ *для довільного* $k \in \mathbb{N}$, *то*

$$\lambda\left(C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) > \frac{1}{(m+1)^2}.$$

***Зауваження* 4.** Порівняємо теорему 1 з відповідним твердженням теорії ланцюгових дробів (ЛД). Нехай $C[\text{ЛД}, \{V_n\}]$ — множина, аналогічна множині $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$, тобто вона є замиканням множини всіх ірраціональних чисел

$$x = [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), \ldots],$$

елементи $a_n(x)$ ланцюгового дробу яких задовольняють умову

$$a_n(x) \in V_n$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$ (як і раніше, $\{V_n\}$ — фіксована послідовність непорожніх підмножин множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел). Якщо, наприклад, $V_n = V = \mathbb{N}\setminus\{1\}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то міра Лебега множини $C[\text{ЛД}, \{V_n\}]$ дорівнює 0 (див. [3], теорему 4.2.3). Але відповідна множина $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$ має додатну міру Лебега. Таким чином, теорема 1 свідчить про ще одну принципову відмінність метричної теорії рядів Остроградського та метричної теорії ланцюгових дробів.

Розглянемо інший клас множин $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$, а саме, нехай

$$V_k = \{1, 2, \ldots, m_k\}, \quad m_k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. *Якщо* $V_k = \{1, 2, \ldots, m_k\}$, $m_k \in \mathbb{N}$, *причому*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m_1+m_2+\ldots+m_k}{m_{k+1}} < \infty,$$

то міра Лебега $\lambda\left(C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) > 0$.

Доведення. Оскільки $\sigma_k \le m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ і

$$\frac{\sigma_k+1}{\sigma_k+m_{k+1}+1} \le \frac{m_1+\ldots+m_k+1}{m_1+\ldots+m_k+m_{k+1}+1},$$

то

$$\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right) = \sum_{c_1\in V_1}\cdots\sum_{c_k\in V_k}\left(\frac{1}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k(\sigma_k+1)}\frac{\sigma_k+1}{\sigma_k+m_{k+1}+1}\right) \le$$

$$\le \frac{m_1+\ldots+m_k+1}{m_1+\ldots+m_k+m_{k+1}+1}\lambda(F_k),$$

тобто

$$\frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right)}{\lambda(F_k)} \le \frac{m_1+\ldots+m_k+1}{m_1+\ldots+m_k+m_{k+1}+1}.$$

Ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_1 + \ldots + m_k + 1}{m_1 + \ldots + m_k + m_{k+1} + 1} \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_1 + \ldots + m_k}{m_{k+1}}$$

збігаються або розбігаються одночасно. Тому зі збіжності останнього випливає збіжність ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right)}{\lambda(F_k)},$$

що згідно з лемою 5 є рівносильним додатності міри Лебега множини $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$.

Теорему 2 доведено.

4. Умови нульмірності множини $C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]$.

Теорема 3. *Якщо* $V_k = \{1, 2, \ldots, m_k\}$, $m_k \in \mathbb{N}$, *причому*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{m_k} = \infty,$$

то $\lambda\left(C\left[\overline{\mathrm{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) = 0$.

Доведення. Розглянемо

$$\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right) = \sum_{c_1 \in V_1} \ldots \sum_{c_k \in V_k} \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k} \sum_{s=m_{k+1}+1}^{\infty} \frac{1}{(\sigma_k + s)(\sigma_k + s + 1)} =$$

$$= \sum_{c_1 \in V_1} \ldots \sum_{c_k \in V_k} \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k (\sigma_k + m_{k+1} + 1)} =$$

$$= \sum_{c_1 \in V_1} \ldots \sum_{c_k \in V_k} \left(\frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k (\sigma_k + 1)} \frac{\sigma_k + 1}{\sigma_k + m_{k+1} + 1} \right).$$

Оцінимо відношення

$$\frac{\sigma_k + 1}{\sigma_k + m_{k+1} + 1}.$$

Оскільки $k < \sigma_k + 1$ і

$$\frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{(a+c)+b} \quad \text{для довільних} \quad a, b, c \in \mathbb{N},$$

то

$$\frac{k}{k + m_{k+1}} < \frac{\sigma_k + 1}{\sigma_k + m_{k+1} + 1}.$$

Тоді

$$\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right) > \frac{k}{k + m_{k+1}} \sum_{c_1 \in V_1} \ldots \sum_{c_k \in V_k} \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k (\sigma_k + 1)} = \frac{k}{k + m_{k+1}} \lambda(F_k),$$

тобто

$$\frac{k}{k + m_{k+1}} < \frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right)}{\lambda(F_k)}$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k + m_{k+1}} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right)}{\lambda(F_k)}.$$

Враховуючи, що ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+m_{k+1}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{m_{k+1}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{m_k}$$

одночасно збігаються або розбігаються, маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{m_k} = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda\left(\overline{F}_{k+1}\right)}{\lambda(F_k)} = \infty,$$

що згідно з лемою 5 є рівносильним рівності $\lambda\left(C\left[\overline{O}^1, \{V_n\}\right]\right) = 0.$

Теорему 3 доведено.

Наслідок 5 [27]. *Якщо* $V_k = \{1, 2, \ldots, m_k\}$ *і ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k}$$

розбігається, то $\lambda\left(C\left[\overline{O}^1, \{V_n\}\right]\right) = 0.$

Наслідок 6 [27]. *Якщо* $V_k = \{1, 2, \ldots, m\}$ *для всіх натуральних* k, *то*

$$\lambda\left(C\left[\overline{O}^1, \{V\}\right]\right) = 0.$$

І, нарешті, розглянемо випадок, коли і множини V_k, і множини $\mathbb{N} \setminus V_k$ є нескінченними.

Теорема 4. *Якщо* $V_k = \mathbb{N} \setminus \left\{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}, \ldots\right\}$, *де* $a_{n+1}^{(k)} - a_n^{(k)} \leq d^{(k)}$, $2 \leq$ $\leq d^{(k)} \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots$, *причому*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{d^{(k)} a_1^{(k)}} = \infty, \tag{11}$$

то міра Лебега множини $C\left[\overline{O}^1, \{V_n\}\right]$ *дорівнює* 0.

Доведення. Нехай $\overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_{k-1}]}$ — довільна циліндрична множина така, що $c_i \in V_i$. Розглянемо

$$\sum_{c \notin V_k} \left| \overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_{k-1} c]} \right| = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sigma_{k-1} + a_n^{(k)}\right)\left(\sigma_{k-1} + a_n^{(k)} + 1\right)}.$$

Нехай $\overline{a}_1^{(k)} = a_1^{(k)}$, $\overline{a}_{n+1}^{(k)} = \overline{a}_n^{(k)} + d^{(k)}$. Тоді $\overline{a}_n^{(k)} \geq a_n^{(k)}$ і

$$\sum_{c \notin V_k} \left| \overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_{k-1} c]} \right| > \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sigma_{k-1} + \overline{a}_n^{(k)}\right)\left(\sigma_{k-1} + \overline{a}_n^{(k)} + d^{(k)}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{k-1}} \frac{1}{d^{(k)}\left(\sigma_{k-1} + a_1^{(k)}\right)}.$$

Враховуючи, що

$$\frac{1}{\sigma_{k-1} + a_1^{(k)}} \geq \frac{1}{a_1^{(k)}(\sigma_{k-1} + 1)},$$

маємо

$$\sum_{c \notin V_k} \left| \overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_{k-1} c]} \right| > \frac{1}{d^{(k)} a_1^{(k)}} \left| \overline{O}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_{k-1}]} \right|.$$

Тоді

$$\lambda(\overline{F}_k) = \sum_{c_1 \in V_1} \ldots \sum_{c_{k-1} \in V_{k-1}} \left(\sum_{c \notin V_k} \left| \overline{\text{O}}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_{k-1} c]} \right| \right) >$$

$$> \frac{1}{d^{(k)} a_1^{(k)}} \sum_{c_1 \in V_1} \ldots \sum_{c_{k-1} \in V_{k-1}} \left| \overline{\text{O}}^1_{[c_1 c_2 \ldots c_{k-1}]} \right| = \frac{1}{d^{(k)} a_1^{(k)}} \lambda(F_{k-1}),$$

тобто

$$\lambda(\overline{F}_k) > \frac{1}{d^{(k)} a_1^{(k)}} \lambda(F_{k-1}).$$

Тому

$$\lambda(F_k) = \lambda(F_{k-1}) - \lambda(\overline{F}_k) < \left(1 - \frac{1}{d^{(k)} a_1^{(k)}}\right) \lambda(F_{k-1})$$

і

$$\lambda(F_k) < \lambda(F_1) \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{d^{(i)} a_1^{(i)}}\right).$$

Отже,

$$\lambda\left(C\left[\overline{\text{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) = \lim_{k \to \infty} \lambda(F_k) \leq \lambda(F_1) \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{d^{(i)} a_1^{(i)}}\right).$$

При виконанні умови (11) останній нескінченний добуток розбігається до 0, а отже, $\lambda\left(C\left[\overline{\text{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) = 0$, що й потрібно було довести.

***Наслідок* 7** [27]. *Якщо для всіх натуральних* k

$$V_k = V = \mathbb{N} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\},$$

де $a_{n+1} - a_n < d$, $2 \leq d$ *— фіксоване натуральне число, то* $\lambda\left(C\left[\overline{\text{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) = 0$.

***Наслідок* 8** [27]. *Якщо* $V_k = V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$ *для всіх натуральних* k, *причому* $v_{n+1} - v_n \geq 2$ *для кожного* n, *більшого деякого фіксованого* n_0, *то* $\lambda\left(C\left[\overline{\text{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) = 0$.

***Наслідок* 9.** *Якщо* $V_k = \left\{v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \ldots, v_n^{(k)}, \ldots\right\}$, *причому* $v_{n+1}^{(k)} - v_n^{(k)} \geq 2$ *для кожного* $n > n_k$, $k = 1, 2, \ldots$, *і*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v_{n_k}^{(k)}} = \infty,$$

то $\lambda\left(C\left[\overline{\text{O}}^1, \{V_n\}\right]\right) = 0$.

5. Використання отриманих результатів для дослідження розподілів імовірностей. Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \overline{\text{O}}^1(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots),$$

$\overline{\text{O}}^1$-символи якої є незалежними, набувають значень $1, 2, \ldots, i, \ldots$ з імовірностями $p_{1k}, p_{2k}, \ldots, p_{ik}, \ldots$ відповідно ($p_{ik} \geq 0$, $p_{1k} + \ldots + p_{ik} + \ldots = 1$). Вона вивчалася у роботах [25, 27]. Оскільки спектр S_ξ випадкової величини ξ є замиканням множини

$$\left\{x \colon x = \overline{\text{O}}^1(g_1(x), g_2(x), \ldots, g_k(x), \ldots),\ p_{g_k(x)k} > 0\right\},$$

тобто з точністю до зчисленної множини є множиною типу $C\left[\overline{O}^1, \{V_n\}\right]$, то отримані в попередніх пунктах результати дозволяють вказати достатні умови належності розподілу до різних чистих типів сингулярних розподілів (*C*-тип або канторівський, *S*-тип або салемівський, *P*-тип або квазіканторівський [3]).

Будемо вважати, що умова неперервності розподілу ξ [25] виконується:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} = 0.$$

З теорем 3 та 4 випливає наступне твердження.

Теорема 5. *Якщо „матриця" $\| p_{ik} \|$ задовольняє умови*

$$p_{ik} > 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, m_k\},$$

$$p_{jk} = 0, \quad j > m_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{m_k} = \infty$$

або

$$p_{jk} = 0, \quad j \in W_k = \left\{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}, \ldots\right\}, \quad a_{n+1}^{(k)} - a_n^{(k)} \le d^{(k)}, \quad 2 \le d^{(k)} \in \mathbb{N},$$

$$p_{ik} > 0, \quad i \in V_k = \mathbb{N} \setminus W_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{d^{(k)} a_1^{(k)}} = \infty,$$

то розподіл ξ є сингулярним розподілом канторівського типу $\left(\lambda(S_\xi) = 0\right)$.

Використовуючи теореми 1 та 2, легко довести наступне твердження.

Теорема 6. *Якщо „матриця" $\| p_{ik} \|$ задовольняє умови*

$$p_{jk} > 0, \quad j \in \{1, 2, \ldots, v_k\},$$

$$p_{ik} > 0, \quad j > v_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} v_k < \infty,$$

або

$$p_{ik} > 0, \quad i \in \{1, 2, \ldots, m_k\},$$

$$p_{jk} = 0, \quad j > m_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}{m_{k+1}} < \infty,$$

то спектр S_ξ розподілу ξ є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.

1. *Schweiger F.* Ergodic theory of fibred systems and metric number theory. – New York: Oxford Univ. Press, 1995. – xiv + 295 p.
2. *Sierpiński W.* Okilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi // Spraw. pos. Wr. TN III. – 1991. – **4**. – S. 56 – 77.
3. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
4. *Ремез Е. Я.* О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгорифмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел // Успехи мат. наук. – 1951. – **6**, № 5 (45). – С. 33 – 42.

5. *Stern M.* Über die Irrationalität des Werthes gewisser Reihen // J. reine und angew. Math. – 1848. – **37**. – S. 95 – 96.
6. *Pierce T. A.* On an algorithm and its use in approximating roots of algebraic equations // Amer. Math. Mon. – 1929. – **36**. – P. 523 – 525.
7. *Paradís J., Viader P., Bibiloni L.* A mathematical excursion: from the three-door problem to a Cantor-type set // Ibid. – 1999. – **106**, № 3. – P. 241 – 251.
8. *Мельничук Ю. В.* p-Адические цепные дроби, образованные по алгоритмам Евклида и Остроградского // Сб. науч. конф. „Вычислит. математика в соврем. науч.-техн. прогрессе, 1974". – Канев, 1974. – С. 259 – 265.
9. *Мельничук Ю. В.* О представлении действительных чисел быстро сходящимися рядами // Цепные дроби и их применение. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 77 – 78.
10. *Melnichuk Yu. V.* Fast converging series representations of real numbers and their implementations in digital processing // Comput. Number Theory (Kossuth Lajos Univ. (Debrecen (Hungary), September 4 – 9, 1989). – Berlin, New York: Waler de Gruyter, 1991. – P. 27 – 29.
11. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. – Київ: Наук. думка, 1974. – 272 с.
12. *Валеев К. Г., Злебов Е. Д.* О метрической теории алгоритма М. В. Остроградского // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 1. – С. 64 – 69.
13. *Shallit J. O.* Some predictable Pierce expansions // Fibonacci Quart. – 1984. – **22**, № 4. – P. 332 – 335.
14. *Erdős P., Shallit J. O.* New bounds on the length of finite Pierce and Engel series // Sémin. Théor. Nombres Bordeaux (2). – 1991. – **3**, № 1. – P. 43 – 53.
15. *Knopfmacher A., Mays M. E.* Pierce expansions of ratios of Fibonacci and Lucas numbers and polynomials // Fibonacci Quart. – 1995. – **33**, № 2. – P. 153 – 163.
16. *Paradís J., Viader P., Bibiloni L.* Approximation of quadratic irrationals and their Pierce expansions // Ibid. – 1998. – **36**, № 2. – P. 146 – 153.
17. *Viader P., Paradís J., Bibiloni L.* Note on the Pierce expansion of a logarithm // Ibid. – 1999. – **37**, № 3. – P. 198 – 202.
18. *Shallit J. O.* Metric theory of Pierce expansions // Ibid. – 1986. – **24**, № 1. – P. 22 – 40.
19. *Viader P., Bibiloni L., Paradís J.* On a problem of Alfréd Rényi // Acta arithm. – 1999. – **91**, № 2. – P. 107 – 115.
20. *Paradís J., Viader P., Bibiloni L.* A total order in $(0, 1]$ defined through a "next" operator // Order. – 1999. – **16**, № 3. – P. 207 – 220.
21. *Knopfmacher A., Knopfmacher J.* Two constructions of the real numbers via alternating series // Int. J. Math. and Math. Sci. – 1989. – **12**, № 3. – P. 603 – 613.
22. *Shallit J.* Pierce expansions and rules for the determination of leap years // Fibonacci Quart. – 1994. – **32**, № 5. – P. 416 – 423.
23. *Paradís J., Bibiloni L., Viader P.* On actually computable bijections between $\mathbb{N}$ and $\mathbb{Q}^+$ // Order. – 1996. – **13**, № 4. – P. 369 – 377.
24. *Барановський О. М.* Деякі задачі метричної теорії чисел, представлених рядами Остроградського 1-го виду // Наук. зап. НПУ імені М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. – 2002. – № 3. – С. 391 – 402.
25. *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2004. – № 70. – С. 131 – 144.
26. *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Про міру Лебега деяких множин чисел, визначених властивостями їх розкладу в ряд Остроградського // Наук. часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки. – 2004. – № 5. – С. 217 – 227.
27. *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The Ostrogradsky series and related probability measures. – Bonn, 2006. – (Preprint / Bonn Univ., SFB-611), arXiv:math.PR/0605747.
28. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – 3-е изд. – М.: Физматгиз, 1961. – 112 с.

Одержано 18.08.2006