УДК 517.5

І. В. Кальчук (Волин. ун-т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ (ψ,β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ, ОПЕРАТОРАМИ ВЕЙЄРШТРАССА

Asymptotic equalities are obtained for upper bounds of approximations by the Weierstrass operators on the functional classes $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ and $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ in metrics of the spaces $\hat{C}$ and $\hat{L}_1$, respectively.

Получены асимптотические равенства для верхних граней приближений операторами Вейерштрасса на функциональных классах $\hat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ и $\hat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ в метриках пространств $\hat{C}$ и $\hat{L}_1$ соответственно.

1. Основні означення. Нехай $\hat{L}_p$, $p \geq 1$, — множина функцій $f(\cdot)$, що задані на всій дійсній осі R і мають скінченну норму $\|f\|_{\widehat{p}}$, де

$$\|f\|_{\widehat{p}} = \begin{cases} \sup\limits_{a\in R}\left(\displaystyle\int_a^{a+2\pi} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, & p\in[1,\infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in R}|f(t)|, & p=\infty, \end{cases}$$

і $\widehat{C}$ — множина неперервних, заданих на дійсній осі функцій із скінченною нормою $\|f\|_{\widehat{C}} = \max\limits_{t\in R}|f(t)|$.

Нехай $\mathfrak{A}$ — множина додатних неперервних при $t \geq 0$ функцій $\psi(t)$, які задовольняють умови:

1) $\psi(0) = 0$;
2) $\psi(t)$ опукла донизу на $[1,\infty)$ і $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t) = 0$;
3) $\psi'(t) = \psi'(t+0)$ є функцією обмеженої варіації на $[0,\infty)$.

Підмножину функцій $\psi \in \mathfrak{A}$, для яких $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\psi(t)}{t}dt < \infty$, позначають через $\mathfrak{A}'$.

Якщо $\psi \in \mathfrak{A}'$ і $\beta \in R$, то відомо, що перетворення $\hat{\psi}_\beta(t)$ вигляду

$$\widehat{\psi}_\beta(t) = \widehat{\psi}\,(t;\beta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\psi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right)dv \tag{1}$$

є сумовним на всій дійсній осі (див. [1, с. 194]).

Через $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ (див., наприклад, [2, 3]) позначимо множину функцій $f \in \widehat{L}_1$, які майже для всіх $x \in R$ можна подати у вигляді

$$f(x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\,(x+t)\,\widehat{\psi}_\beta(t)dt = A_0 + \left(\varphi * \widehat{\psi}_\beta\right)(x), \tag{2}$$

де A_0 — деяка стала і $\varphi \in \widehat{L}_1$, а інтеграл слід розуміти як границю інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються. Якщо $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}$ і при цьому $\varphi \in \mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина із $\widehat{L}_1$, то покладають $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Підмножини неперервних функцій із $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}$, $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ позначають відповідно через $\widehat{C}^{\psi}_{\beta}$, $\widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Функцію $\varphi(\cdot)$ у (2) називають (ψ,β)-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$.

Через $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ позначають множину функцій $f \in \widehat{C}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ у випадку, коли $\mathfrak{N}$ збігається з одиничною кулею простору $\widehat{L}_{\infty}$, тобто $\mathfrak{N} = S_{\infty} = \left\{\varphi \in \widehat{L}_{\infty} \colon \operatorname*{ess\,sup}_{t \in R} |\varphi(t)| \leq \leq 1\right\}$, а через $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ — множину функцій $f \in \widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, коли $\mathfrak{N}$ є одиничною кулею простору $\widehat{L}_1$, тобто $\mathfrak{N} = S_1 = \left\{\varphi \in \widehat{L}_1 \colon \|\varphi\|_{\hat{1}} \leq 1\right\}$.

У роботі [1, с. 169] показано, що якщо $\varphi(\cdot)$ — 2π-періодична функція така, що $\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, dt = 0$, то в цьому випадку класи $\widehat{L}^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ і $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ переходять у відомі класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, $L^{\psi}_{\beta,1}$ і $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ відповідно.

Нехай, далі,

$$\mathfrak{A}_0 := \left\{\psi \in \mathfrak{A} \colon 0 < \frac{t}{\eta(t) - t} \leq K < \infty \quad \forall t \geq 1\right\},$$

де

$$\eta(t) = \eta(\psi, t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right),$$

а ψ^{-1} — функція, обернена до функції ψ.

Розглянемо тепер сукупність функцій $\Lambda = \left\{\lambda_{\sigma}\left(\frac{v}{\sigma}\right)\right\}$, які є неперервними при $v \geq 0$ і залежать від дійсного параметра σ. Кожній функції $f \in \hat{L}^{\psi}_{\beta}$ поставимо у відповідність вираз вигляду

$$U_{\sigma}(f; x; \Lambda) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}\,(x + t)\, \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \psi(v) \lambda_{\sigma}\left(\frac{v}{\sigma}\right) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv dt. \qquad (3)$$

Ми будемо наближати функції з класів $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ і $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ операторами вигляду (3) у випадку $\lambda_{\sigma}\left(\frac{v}{\sigma}\right) = e^{-\frac{v^2}{\sigma}}$. Такі оператори будемо позначати $W_{\sigma}(f; x)$, $\sigma \in (0, \infty)$, і називати операторами Вейєрштрасса

$$W_{\sigma}(f; x) = A_0 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x + t) \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} \psi(v) e^{-\frac{v^2}{\sigma}} \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv\, dt, \quad \sigma \in (0, \infty). \qquad (4)$$

Застосовуючи твердження 1.1 з роботи [1, с. 169], неважко переконатися, що якщо функція f є 2π-періодичною, то оператори $W_{\sigma}(f; x)$ збігаються з відомими інтегралами Вейєрштрасса

$$W_{\sigma}(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\sigma}} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right), \quad \sigma > 0$$

(див., наприклад, [4, с. 150]).

У роботі будемо досліджувати асимптотичну поведінку величин

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; W_{\sigma}\right)_{\widehat{C}} = \sup_{f \in \widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f(x) - W_{\sigma}(f; x)\|_{\widehat{C}},$$

$$\mathcal{E}\left(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1};W_\sigma\right)_{\widehat{1}}=\sup_{f\in\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}}\|f(x)-W_\sigma(f;x)\|_{\widehat{1}}$$

при $\sigma\to\infty$.

Якщо в явному вигляді знайдено функцію $h(\sigma)=h(\mathfrak{N};\sigma)$ таку, що при $\sigma\to\infty$

$$\mathcal{E}\left(\mathfrak{N};W_\sigma\right)_X=h\left(\sigma\right)+o\left(h\left(\sigma\right)\right),$$

то кажуть, що на класі $\mathfrak{N}$ для оператора Вейєрштрасса розв'язано задачу Колмогорова – Нікольського в метриці простору X.

Відмітимо, що задачу Колмогорова – Нікольського для інтегралів Вейєрштрасса на класах W^r_β, W^r, класах Зигмунда та інших розв'язано в роботах П. П. Коровкіна [5], Л. І. Баусова [6, 7], Я. С. Бугрова [8], В. А. Баскакова [9], Л. П. Фалалєєва [10]. Результати даної роботи тісно пов'язані із результатами роботи Ю. І. Харкевича та І. В. Кальчук [11], де було знайдено розв'язки задачі Колмогорова – Нікольського для інтегралів Вейєрштрасса на класах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, $L^{\psi}_{\beta,1}$.

2. Оцінка верхніх меж наближень функцій на класах $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ їх операторами Вейєрштрасса. Покладемо

$$\tau(v)=\tau_\sigma(v,\psi)=\left(1-e^{-v^2}\right)\frac{\psi(\sqrt{\sigma}v)}{\psi(\sqrt{\sigma})},\quad v\geq 0, \tag{5}$$

де $\psi(v)$ — функція, визначена і неперервна при всіх $v\geq 0$. Далі будемо вважати, що функція $\psi(v)$ є монотонно зростаючою і опуклою донизу на $[0,1]$ і має неперервну другу похідну при всіх $v\geq 0$ за винятком точки $v=1$. Множину функцій $\psi\in\mathfrak{A}$ або $\psi\in\mathfrak{A}_0$, що мають вказані вище властивості, позначимо відповідно через $\mathfrak{A}^*$ або $\mathfrak{A}^*_0$.

Теорема 1. *Нехай $\psi\in\mathfrak{A}^*_0\cap\mathfrak{A}'$, функція $g(v)=v^2\psi(v)$ опукла вгору або донизу на $[b,\infty)$, $b\geq 1$. Тоді при $\sigma\to\infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty};W_\sigma\right)_{\widehat{C}}=\psi(\sqrt{\sigma})A(\tau), \tag{6}$$

де величина $A(\tau)$ означається формулою

$$A(\tau)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^{\infty}\tau(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt \tag{7}$$

і для неї справедливою є оцінка

$$A(\tau)=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_1^{\sqrt{\sigma}}v\psi(v)dv+\frac{1}{\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_{\sqrt{\sigma}}^{\infty}\frac{\psi(v)}{v}dv\right)+$$
$$+O\left(1+\frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\right). \tag{8}$$

Доведення. Як випливає з леми 1 з роботи [12], для доведення рівності (6) досить показати сумовність перетворення $\widehat{\tau}_\beta(t)$ функції $\tau(v)$ вигляду

$$\widehat{\tau}_\beta(t) = \widehat{\tau}(t,\beta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv, \qquad (9)$$

тобто збіжність інтеграла (7).

Згідно з теоремою 1 з роботи [7, с. 24] для збіжності інтеграла (7) необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} v\,|d\tau'(v)|\,, \qquad \int\limits_{\frac{1}{2}}^\infty |v-1|\,|d\tau'(v)|\,, \qquad (10)$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^\infty \frac{|\tau(v)|}{v}dv, \qquad \int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv. \qquad (11)$$

Оцінимо перший інтеграл з (10). Для цього розіб'ємо проміжок інтегрування на дві частини: $\left[0, \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right]$ і $\left[\frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \frac{1}{2}\right]$ (при $\sigma > 4b^2$).

Враховуючи, що $\tau''(v) \geq 0$ на $\left[0, \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right]$, а також нерівність

$$1 - e^{-v^2} \leq v^2, \quad v \in R, \qquad (12)$$

одержуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} v\,|d\tau'(v)| = (v\tau'(v) - \tau(v))\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} =$$

$$= \frac{\psi'(1-0)}{\psi\left(\sqrt{\sigma}\right)}(1 - e^{-\frac{1}{\sigma}}) + \frac{2\psi(1)}{\psi\left(\sqrt{\sigma}\right)}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{1}{\sigma}} - \frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\sigma})}\left(1 - e^{-\frac{1}{\sigma}}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\sigma\psi\left(\sqrt{\sigma}\right)}\right). \qquad (13)$$

Як випливає з рівностей (21), (27) – (29) з роботи [11], має місце оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{\frac{1}{2}} v\,|d\tau'(v)| = O\left(1 + \frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\right), \quad \sigma \to \infty. \qquad (14)$$

Об'єднуючи співвідношення (13) та (14), отримуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} v\,|d\tau'(v)| = O\left(1 + \frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\right), \quad \sigma \to \infty. \qquad (15)$$

Враховуючи рівність (34) з роботи [11], робимо висновок, що для другого інтеграла з (10) справедливою є оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |v-1|\, |d\tau'(v)| = O(1). \tag{16}$$

Для оцінки першого інтеграла з (11) розіб'ємо проміжок $[0,\infty)$ на дві частини: $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{\sigma}}\right]$, $\left[\dfrac{1}{\sqrt{\sigma}}, \infty\right)$.

Нехай $v \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{\sigma}}\right]$. Враховуючи нерівність (12) та той факт, що функція $\psi(v)$ монотонно зростає на $[0,1]$, одержуємо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} \frac{|\tau(v)|}{v} dv = \frac{1}{\psi\left(\sqrt{\sigma}\right)} \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} \left(1-e^{-v^2}\right) \psi\left(\sqrt{\sigma} v\right) \frac{dv}{v} \le$$

$$\le \frac{\psi(1)}{\psi\left(\sqrt{\sigma}\right)} \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} v dv = O\left(\frac{1}{\sigma \psi\left(\sqrt{\sigma}\right)}\right). \tag{17}$$

На підставі оцінок (36) та (37) з роботи [11] отримуємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{\infty} \frac{|\tau(v)|}{v} dv = \frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})} \int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} v\psi(v) dv +$$

$$+ \frac{1}{\psi(\sqrt{\sigma})} \int\limits_{\sqrt{\sigma}}^{\infty} \frac{\psi(v)}{v} dv + O\left(1 + \frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\right). \tag{18}$$

Об'єднуючи рівності (17) і (18), робимо висновок, що для першого інтеграла з (11) має місце рівність

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{|\tau(v)|}{v} dv = \frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})} \int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} v\psi(v) dv + \frac{1}{\psi(\sqrt{\sigma})} \int\limits_{\sqrt{\sigma}}^{\infty} \frac{\psi(v)}{v} dv + O\left(1 + \frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\right). \tag{19}$$

Покажемо, що для другого інтеграла з (11) справедливою є оцінка

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-v) - \tau(1+v)|}{v} dv = O\left(1 + \frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\right), \quad \sigma \to \infty. \tag{20}$$

Із співвідношення (5) знаходимо

$$\tau(1-v) = \left(1 - e^{-(1-v)^2}\right) \frac{\psi\left(\sqrt{\sigma}(1-v)\right)}{\psi(\sqrt{\sigma})}, \quad v \le 1, \tag{21}$$

$$\tau(1+v) = \left(1 - e^{-(1+v)^2}\right) \frac{\psi\left(\sqrt{\sigma}(1+v)\right)}{\psi(\sqrt{\sigma})}, \quad v \ge -1. \tag{22}$$

Подамо інтеграл з лівої частини рівності (20) у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv = \left(\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} + \int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^1 \right) \frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv. \qquad (23)$$

Оцінимо спочатку перший доданок у правій частині рівності (23). Для цього віднімемо і додамо під знаком модуля в підінтегральній функції величину $e^{-(1-v)^2} - e^{-(1+v)^2}$ і отримаємо

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} \frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv = O\left(\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} \frac{\left|e^{-(1-v)^2} - e^{-(1+v)^2}\right|}{v}dv + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} \frac{\left|\tau(1-v)-\tau(1+v)+e^{-(1-v)^2} - e^{-(1+v)^2}\right|}{v}dv \right). \qquad (24)$$

Очевидно, що

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} \frac{\left|e^{-(1-v)^2} - e^{-(1+v)^2}\right|}{v}dv = O(1). \qquad (25)$$

Оцінимо тепер другий інтеграл з правої частини рівності (24). Оскільки мають місце співвідношення (21) і (22), то

$$e^{-(1-v)^2} = 1 - \frac{\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(\sqrt{\sigma}(1-v))}\tau(1-v), \quad v \le 1, \qquad (26)$$

$$e^{-(1+v)^2} = 1 - \frac{\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(\sqrt{\sigma}(1+v))}\tau(1+v), \quad v \ge -1. \qquad (27)$$

Тоді

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} \frac{\left|\tau(1-v)-\tau(1+v)+e^{-(1-v)^2} - e^{-(1+v)^2}\right|}{v}dv \le$$

$$\le \int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} |\tau(1-v)| \left|1 - \frac{\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(\sqrt{\sigma}(1-v))}\right| \frac{dv}{v} +$$

$$+ \int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} |\tau(1+v)| \left|1 - \frac{\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(\sqrt{\sigma}(1+v))}\right| \frac{dv}{v}. \qquad (28)$$

З огляду на (15) та (16) на підставі леми 2 з роботи [7, c. 19] отримаємо рівність

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} |\tau(1-v)| \left|1 - \frac{\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(\sqrt{\sigma}(1-v))}\right| \frac{dv}{v} +$$

$$+\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}|\tau(1+v)|\left|1-\frac{\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(\sqrt{\sigma}(1+v))}\right|\frac{dv}{v}=$$

$$=H(\tau)O\left(\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}\frac{|\psi(\sqrt{\sigma}(1-v))-\psi(\sqrt{\sigma})|}{v\psi(\sqrt{\sigma}(1-v))}dv+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}\frac{|\psi(\sqrt{\sigma}(1+v))-\psi(\sqrt{\sigma})|}{v\psi(\sqrt{\sigma}(1+v))}dv\right), \tag{29}$$

де

$$H(\tau)=|\tau(0)|+|\tau(1)|+\int\limits_0^{\frac12}v\,|d\tau'(v)|+\int\limits_{\frac12}^{\infty}|v-1|\,|d\tau'(v)|\,. \tag{30}$$

Покажемо, що при $\sigma\to\infty$

$$I_{1,\sigma}:=\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}\frac{|\psi(\sqrt{\sigma}(1-v))-\psi(\sqrt{\sigma})|}{v\psi(\sqrt{\sigma}(1-v))}dv=O(1), \tag{31}$$

$$I_{2,\sigma}:=\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}\frac{|\psi(\sqrt{\sigma}(1+v))-\psi(\sqrt{\sigma})|}{v\psi(\sqrt{\sigma}(1+v))}dv=O(1), \tag{32}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по σ.

Дійсно, функція $\dfrac{1-\psi(\sqrt{\sigma})/\psi(\sqrt{\sigma}(1-v))}{v}$ обмежена при всіх $v\in\left[\theta,\ 1-\dfrac{1}{\sqrt{\sigma}}\right]$, $0<\theta<1-\dfrac{1}{\sqrt{\sigma}}$, і, крім того, з урахуванням теореми 3.12.1 з роботи [13, с. 161]

$$\lim_{v\to0}\frac{1-\psi(\sqrt{\sigma})/\psi(\sqrt{\sigma}(1-v))}{v}=\frac{\sqrt{\sigma}\,|\psi'(\sqrt{\sigma})|}{\psi(\sqrt{\sigma})}\le K.$$

Отже, $I_{1,\sigma}=O(1)$, $\sigma\to\infty$.

Переходячи до оцінки інтеграла $I_{2,\sigma}$, відмітимо, що

$$I_{2,\sigma}<\frac{1}{\psi(2\sqrt{\sigma}-1)}\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}\frac{\psi(\sqrt{\sigma})-\psi\left(\sqrt{\sigma}\,(1+v)\right)}{v}dv.$$

Після заміни змінної $u=\sqrt{\sigma}(1+v)$ отримаємо

$$I_{2,\sigma}<\frac{1}{\psi(2\sqrt{\sigma}-1)}\int\limits_{\sqrt{\sigma}}^{2\sqrt{\sigma}-1}\frac{\psi(\sqrt{\sigma})-\psi\left(u\right)}{u-\sqrt{\sigma}}du<\frac{1}{\psi(2\sqrt{\sigma}-1)}\int\limits_{\sqrt{\sigma}}^{2\sqrt{\sigma}}\frac{\psi(\sqrt{\sigma})-\psi\left(u\right)}{u-\sqrt{\sigma}}du.$$

Застосовуючи до правої частини останньої нерівності лему 3.5.5 з роботи [14, с. 97], а також теорему 3.16.1 з роботи [13, с. 175], одержуємо

$$I_{2,\sigma} < \frac{K_1\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(2\sqrt{\sigma}-1)} \leq \frac{K_2\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi\left(2\sqrt{\sigma}\right)} \leq K_3.$$

Отже, рівності (31) та (32) виконуються.

Поєднуючи співвідношення (28) – (32), маємо

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} \frac{\left|\tau(1-v)-\tau(1+v)+e^{-(1-v)^2}-e^{-(1+v)^2}\right|}{v}dv = H(\tau)O(1). \tag{33}$$

Згідно зі співвідношеннями (15) та (16) для величини $H\left(\tau\right)$, що означена рівністю (30), справедливою є оцінка

$$H(\tau) = O\left(1+\frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\right). \tag{34}$$

Із формул (24), (25), (33) та (34) одержуємо

$$\int\limits_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} \frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv = O\left(1+\frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\right). \tag{35}$$

Оцінимо другий доданок з правої частини рівності (23). Для цього віднімемо і додамо під знаком модуля в підінтегральній функції величину

$$\frac{\psi(\sqrt{\sigma}(1-v))}{\psi(1)}\left(e^{-(1-v)^2}-e^{-(1+v)^2}\right),$$

врахуємо, що функція $\psi\left(\sqrt{\sigma}(1-v)\right)$ є монотонно спадною на $\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{\sigma}},1\right]$, і одержимо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1} \frac{|\tau(1-v)-\tau(1+v)|}{v}dv \leq$$

$$\leq \frac{1}{\psi(1)}\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1} \frac{\psi\left(\sqrt{\sigma}(1-v)\right)\left|e^{-(1-v)^2}-e^{-(1+v)^2}\right|}{v}dv+$$

$$+\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1} \frac{\left|\tau(1-v)-\tau(1+v)+\frac{\psi\left(\sqrt{\sigma}(1-v)\right)}{\psi(1)}\left(e^{-(1-v)^2}-e^{-(1+v)^2}\right)\right|}{v}dv \leq$$

$$\leq \int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1} \frac{\left|e^{-(1-v)^2}-e^{-(1+v)^2}\right|}{v}dv+$$

$$+\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1}\frac{\left|\tau(1-v)-\tau(1+v)+\dfrac{\psi\left(\sqrt{\sigma}(1-v)\right)}{\psi(1)}\left(e^{-(1-v)^2}-e^{-(1+v)^2}\right)\right|}{v}\,dv. \qquad (36)$$

Очевидно, що має місце оцінка

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1}\frac{\left|e^{-(1-v)^2}-e^{-(1+v)^2}\right|}{v}\,dv=O(1). \qquad (37)$$

Врахувавши співвідношення (26) та (27), а також лему 2 з роботи [7, с. 19], отримаємо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1}\frac{\left|\tau(1-v)-\tau(1+v)+\dfrac{\psi\left(\sqrt{\sigma}(1-v)\right)}{\psi(1)}\left(e^{-(1-v)^2}-e^{-(1+v)^2}\right)\right|}{v}\,dv=$$

$$=\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1}\frac{1}{v}\left|\tau(1-v)-\tau(1+v)+\frac{\psi\left(\sqrt{\sigma}(1-v)\right)}{\psi(1)}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi\left(\sqrt{\sigma}(1-v)\right)}\tau(1-v)+\frac{\psi\left(\sqrt{\sigma}\right)}{\psi\left(\sqrt{\sigma}(1+v)\right)}\tau(1+v)\right)\right|dv\leq$$

$$\leq\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1}|\tau(1-v)|\left|1-\frac{\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(1)}\right|\frac{dv}{v}+$$

$$+\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1}|\tau(1+v)|\left|1-\frac{\psi\left(\sqrt{\sigma}(1-v)\right)\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(1)\psi\left(\sqrt{\sigma}(1+v)\right)}\right|\frac{dv}{v}=$$

$$=H(\tau)O\left(\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1}\left|1-\frac{\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(1)}\right|\frac{dv}{v}+\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1}\left|1-\frac{\psi\left(\sqrt{\sigma}(1-v)\right)\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(1)\psi\left(\sqrt{\sigma}(1+v)\right)}\right|\frac{dv}{v}\right), \qquad (38)$$

де $H(\tau)$ означається рівністю (30).

Оцінимо перший інтеграл у правій частині рівності (38):

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1}\left|1-\frac{\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(1)}\right|\frac{dv}{v}=\left(1-\frac{\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(1)}\right)\ln\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}=O(1). \qquad (39)$$

Оскільки функція $\left|1-\dfrac{\psi\left(\sqrt{\sigma}(1-v)\right)\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(1)\psi\left(\sqrt{\sigma}(1+v)\right)}\right|$ є обмеженою на $\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{\sigma}},1\right]$, то

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1} \left| 1 - \frac{\psi\left(\sqrt{\sigma}(1-v)\right)\psi(\sqrt{\sigma})}{\psi(1)\psi\left(\sqrt{\sigma}(1+v)\right)} \right| \frac{dv}{v} = O(1). \tag{40}$$

На підставі співвідношень (38) – (40) маємо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1} \frac{\left| \tau(1-v) - \tau(1+v) + \dfrac{\psi\left(\sqrt{\sigma}(1-v)\right)}{\psi(1)} \left(e^{-(1-v)^2} - e^{-(1+v)^2} \right) \right|}{v} dv =$$

$$= H(\tau) O(1). \tag{41}$$

Враховуючи формули (36), (37), (41) та оцінку (34), отримуємо

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1} \frac{|\tau(1-v) - \tau(1+v)|}{v} dv = O\left(1 + \frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\right). \tag{42}$$

Поєднуючи співвідношення (35) та (42), приходимо до рівності (20).

Із нерівностей (2.14) і (2.15) з роботи [7, с. 24] з урахуванням формул (19), (20) і (34) одержуємо співвідношення (8).

Теорему 1 доведено.

Із теореми 1 випливають наступні твердження.

Наслідок 1. *Якщо виконано умови теореми* 1, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0$ *і* $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$, *де*

$$\alpha(t) = \frac{\psi(t)}{t\,|\psi'(t)|}, \tag{43}$$

то при $\sigma \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; W_\sigma\right)_{\widehat{C}} = \frac{2}{\pi} \left| \sin\frac{\beta\pi}{2} \right| \int\limits_{\sqrt{\sigma}}^{\infty} \frac{\psi(v)}{v} dv + O\left(\psi(\sqrt{\sigma})\right). \tag{44}$$

Прикладом функцій, які задовольняють умови наслідку 1, є функції $\psi \in \mathfrak{A}^*$, які на проміжку $[1,\infty)$ мають вигляд $\psi(v) = \dfrac{1}{\ln^\alpha(v+K)}$, де $\alpha > 1$, $K > 0$.

Наслідок 2. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{A}_0^*$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *функція* $v^2\psi(v)$ *опукла вгору або донизу на проміжку* $[b,\infty)$, $b \geq 1$, *і*

$$\lim_{v\to\infty} v^2\psi(v) = \infty,$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})} \int\limits_{1}^{\sqrt{\sigma}} v\psi(v) dv = \infty.$$

Тоді при $\sigma \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; W_\sigma\right)_{\widehat{C}} = \frac{2}{\pi} \left| \sin\frac{\beta\pi}{2} \right| \frac{1}{\sigma} \int\limits_{1}^{\sqrt{\sigma}} v\psi(v) dv + O\left(\psi(\sqrt{\sigma})\right). \tag{45}$$

Відмітимо, що умови наслідку 2 задовольняють, наприклад, функції $\psi \in \mathfrak{A}^*$, які при $v \geq 1$ мають вигляд $\psi(v) = \dfrac{1}{v^2}\ln^{\alpha}(v+K)$, $K>0$, $\alpha>0$.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $\psi \in \mathfrak{A}_0^*$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *функція* $v^2\psi(v)$ *опукла донизу на проміжку* $[b,\infty)$, $b \geq 1$, *і*

$$\lim_{v\to\infty} v^2\psi(v) = K < \infty,$$

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} v\psi(v)dv = \infty.$$

Тоді при $\sigma \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; W_\sigma\right)_{\widehat{C}} = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\sigma}\int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} v\psi(v)dv + O\left(\frac{1}{\sigma}\right). \tag{46}$$

Прикладом функцій $\psi \in \mathfrak{A}^*$, для яких має місце наслідок 3, є функції, які при $v \geq 1$ мають вигляд $\psi(v) = \dfrac{1}{v^2}(K+e^{-v})$, $\psi(v) = \dfrac{1}{v^2\ln^{\alpha}(v+K)}$, $K>0$, $0\leq\alpha\leq 1$.

Зауважимо, що при виконанні умов наслідків 1 – 3 рівності (44) – (46) дають розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для операторів Вейєрштрасса W_σ на класах $\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}$ у рівномірній метриці.

Нехай G^* — множина функцій $\psi \in \mathfrak{A}^*$, що задовольняють наступну умову: для довільної сталої $K>0$ існує точка $v_0 = v_0(K) \geq 1$ така, що при $v > v_0$ для функції $\alpha(v)$ вигляду (43) виконується нерівність $\alpha(v) < \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{K}{v^2}\right)$.

Теорема 2. *Нехай* $\psi \in G^*$, *функція* $g(v) = v^2\psi(v)$ *опукла донизу на* $[b,\infty)$, $b\geq 1$, *і*

$$\int\limits_1^{\infty} v\psi(v)dv < \infty. \tag{47}$$

Тоді при $\sigma\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; W_\sigma\right)_{\widehat{C}} = \frac{1}{\sigma}\sup_{f\in\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}}\left\|f^{(2)}(x)\right\|_{\widehat{C}} + O\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma}}\int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} t^2\psi(t)dt + \frac{1}{\sigma}\int\limits_{\sqrt{\sigma}}^{\infty} t\psi(t)dt\right), \tag{48}$$

де $f^{(2)}(x)$ — *друга похідна функції* $f(x)$.

Доведення. Подамо функцію $\tau(v)$, що задана за допомогою співвідношення (5), у вигляді $\tau(v) = \varphi(v) + \mu(v)$, де

$$\varphi(v) = v^2\frac{\psi(\sqrt{\sigma}v)}{\psi(\sqrt{\sigma})}, \quad v \geq 0, \tag{49}$$

$$\mu(v) = (1-e^{-v^2}-v^2)\frac{\psi(\sqrt{\sigma}v)}{\psi(\sqrt{\sigma})}, \quad v\geq 0. \tag{50}$$

Переконаємось у сумовності перетворень $\hat{\varphi}_\beta(t)$ і $\hat{\mu}_\beta(t)$ функцій $\varphi(v)$ та $\mu(v)$ (див. (9)).

Покажемо збіжність інтеграла

$$A(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_0^\infty \varphi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt.$$

Застосовуючи двічі інтегрування частинами і враховуючи, що $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\lim\limits_{v\to\infty} \varphi(v) = \lim\limits_{v\to\infty} \varphi'(v) = 0$, маємо

$$\int\limits_0^\infty \varphi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv = \left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^\infty \right) \varphi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv =$$

$$= -\frac{1}{t^2} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^\infty \right) \varphi''(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv +$$

$$+ \frac{1}{t^2} \frac{\psi'(1-0) - \psi'(1+0)}{\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} t + \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

звідки

$$\left| \int\limits_0^\infty \varphi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| \le \frac{1}{t^2} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^\infty \right) |\varphi''(v)| dv + \frac{1}{t^2} \frac{K}{\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})}.$$

Функція $\varphi(v)$ є опуклою донизу на кожному з проміжків $\left[0, \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)$ та $\left[\frac{b}{\sqrt{\sigma}}, \infty\right)$, а на проміжку $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \frac{b}{\sqrt{\sigma}}\right]$ — обмеженою. Тому з останньої нерівності одержуємо

$$\left| \int\limits_0^\infty \varphi(v)\cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| \le$$

$$\le \frac{1}{t^2} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}} + \int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}}^\infty \right) |\varphi''(v)| dv + \frac{1}{t^2} \frac{K}{\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})} =$$

$$= \frac{1}{t^2} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} + \int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}}^\infty \right) \varphi''(v)\, dv + \frac{1}{t^2} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}} |\varphi''(v)|\, dv + \frac{1}{t^2} \frac{K}{\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})} \le$$

$$\le \frac{K_1}{t^2\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})} + \frac{1}{t^2\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})} \int\limits_1^b \left(2\psi(v) + 4v\psi'(v) + v^2\psi''(v)\right) dv \le \frac{K_2}{t^2\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})}.$$

Тоді

$$\int\limits_{|t|\geq\sqrt{\sigma}} \left|\int\limits_0^\infty \varphi(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt = O\left(\frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\right), \quad \sigma\to\infty. \tag{51}$$

Оскільки функція $v^2\psi(v)$ спадає на $[b,\infty)$ і є обмеженою на $[1,b]$, а функція $\psi(v)$ зростає на $[0,1]$, то, використовуючи (49) і рівність (4.16) з роботи [14, с. 59], отримуємо

$$\int\limits_0^{\sqrt{\sigma}} \left|\int\limits_0^\infty \varphi(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{\sigma}} \left|\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}} + \int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}}^{\infty}\right)\varphi(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt \leq$$

$$\leq \sqrt{\sigma}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}}\right)|\varphi(v)|\,dv + \int\limits_0^{\sqrt{\sigma}} \int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}}^{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}+\frac{2\pi}{t}} \frac{v^2\psi(\sqrt{\sigma}v)}{\psi(\sqrt{\sigma})}dvdt \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{\sigma}\psi(1)}{\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} v^2dv + \frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_1^b v^2\psi(v)\ dv +$$

$$+\frac{1}{\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_0^{\sqrt{\sigma}} \int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}}^{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}+\frac{2\pi}{t}} v^2\psi(\sqrt{\sigma}v)dvdt \leq$$

$$\leq \frac{K}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})} + \frac{1}{\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_0^{\sqrt{\sigma}} \int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}}^{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}+\frac{2\pi}{t}} v^2\psi(\sqrt{\sigma}v)dvdt. \tag{52}$$

Враховуючи рівності (66) – (70) роботи [11], можемо записати наступну оцінку:

$$\frac{1}{\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_0^{\sqrt{\sigma}} \int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}}^{\frac{b}{\sqrt{\sigma}}+\frac{2\pi}{t}} v^2\psi(\sqrt{\sigma}v)dvdt = O\left(\frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\right). \tag{53}$$

Об'єднуючи (52) та (53), одержуємо

$$\int\limits_0^{\sqrt{\sigma}} \left|\int\limits_0^\infty \varphi(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt = O\left(\frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\right), \quad \sigma\to\infty. \tag{54}$$

Аналогічно можна показати, що

$$\int\limits_{-\sqrt{\sigma}}^{0} \left| \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt = O\left(\frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\right), \quad \sigma \to \infty. \tag{55}$$

Із формул (51), (54) та (55) маємо

$$A(\varphi) = O\left(\frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\right), \quad \sigma \to \infty.$$

Покажемо тепер збіжність інтеграла

$$A(\mu) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \int\limits_{0}^{\infty} \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt.$$

Застосувавши двічі інтегрування частинами і врахувавши, що $\mu(0) = \mu'(0) = 0$, $\lim\limits_{v\to\infty} \mu(v) = \lim\limits_{v\to\infty} \mu'(v) = 0$, матимемо

$$\int\limits_{0}^{\infty} \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv = \left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{\infty} \right) \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv =$$

$$= -\frac{1}{t^2} \left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{\infty} \right) \mu''(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv -$$

$$-\frac{1}{t^2} \left(1 - e^{-\frac{1}{\sigma}} - \frac{1}{\sigma}\right) \frac{\sqrt{\sigma}\left(\psi'(1-0) - \psi'(1+0)\right)}{\psi(\sqrt{\sigma})} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\sigma}} + \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

звідки

$$\left| \int\limits_{0}^{\infty} \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| \le$$

$$\le \frac{1}{t^2} \left(\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{\infty} \right) |\mu''(v)|\, dv + \frac{1}{t^2} \frac{K}{\sigma\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})}. \tag{56}$$

Оцінимо інтеграли в правій частині нерівності (56). Враховуючи, що $\mu''(v) < 0$, $v \in \left[0, \dfrac{1}{\sqrt{\sigma}}\right]$, маємо

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} |\mu''(v)|\, dv = -\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} \mu''(v) dv = \frac{2\psi(1)}{\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})} \left(1 - e^{-\frac{1}{\sigma}}\right) -$$

$$-\frac{\sqrt{\sigma}\psi'(1-0)}{\psi(\sqrt{\sigma})} \left(1 - e^{-\frac{1}{\sigma}} - \frac{1}{\sigma}\right) \le \frac{K}{\sigma\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})}. \tag{57}$$

Згідно з нерівністю (79) з роботи [11] для другого інтеграла з правої частини нерівності (56) має місце оцінка

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{\infty} |\mu''(v)|\,dv \le K + \frac{K_1}{\sigma\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})} + \frac{K_2}{\sigma\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} v^2\psi(v)dv. \tag{58}$$

Згідно з (56), враховуючи (57), (58), а також те, що

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} v^2\psi(v)dv \ge \lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})}\sigma\psi(\sqrt{\sigma})\int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} dv = 1, \tag{59}$$

отримуємо

$$\int\limits_{|t|\ge\pi}\left|\int\limits_0^{\infty}\mu(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt = O\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} v^2\psi(v)dv\right). \tag{60}$$

Розглянемо тепер

$$\int\limits_0^{\pi}\left|\int\limits_0^{\infty}\mu(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt \le$$

$$\le \int\limits_0^{\pi}\left|\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} + \int\limits_1^{\infty}\right)\mu(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt. \tag{61}$$

Враховуючи, що функція $\psi(v)$ зростає на $[0,1]$, та використовуючи нерівність

$$e^{-v^2}+v^2-1 \le v^2, \quad v\in R, \tag{62}$$

одержуємо

$$\int\limits_0^{\pi}\left|\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}\mu(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt \le \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}|\mu(v)|\,dvdt \le$$

$$\le \frac{\pi\psi(1)}{\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}\left(e^{-v^2}+v^2-1\right)dv \le \frac{\pi\psi(1)}{\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}} v^2dv \le \frac{K}{\sigma\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})}. \tag{63}$$

Згідно з формулою (85) з роботи [11] має місце наступна оцінка:

$$\int\limits_0^{\pi}\left|\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\sigma}}}^{1}\mu(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt = O\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} v^2\psi(v)dv\right). \tag{64}$$

Оскільки функція $\psi\in G^*$, то, як неважко переконатися, функція $-\mu(v) = (e^{-v^2} + v^2-1)\psi(\sqrt{\sigma}v)$ буде монотонно спадною починаючи з деякого значення $v_1\ge 1$.

З огляду на те, що функція $-\mu(v)$ є монотонно спадною на $[v_1, \infty)$, $v_1 \geq 1$, невід'ємною і прямує до нуля при $v \to \infty$, можемо скористатись нерівністю (4.16) з роботи [14, с. 59]. Враховуючи також нерівність (62), отримуємо

$$\int\limits_0^\pi \left| \int\limits_1^\infty \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt = \int\limits_0^\pi \left| \int\limits_1^\infty (-\mu(v)) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\pi \left| \int\limits_1^{v_1} (-\mu(v)) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt + \tag{65}$$

$$+ \int\limits_0^\pi \left| \int\limits_{v_1}^\infty (-\mu(v)) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\pi \int\limits_1^{v_1} (-\mu(v))\, dvdt + \int\limits_0^\pi \int\limits_{v_1}^{v_1 + \frac{2\pi}{t}} (-\mu(v))\, dvdt =$$

$$= \int\limits_0^\pi \int\limits_1^{v_1 + \frac{2\pi}{t}} (-\mu(v))\, dvdt \leq \frac{1}{\psi(\sqrt{\sigma})} \int\limits_0^\pi \int\limits_1^{v_1 + \frac{2\pi}{t}} v^2 \psi(\sqrt{\sigma} v) dvdt. \tag{66}$$

Згідно з формулою (93) з роботи [11] для останнього інтеграла з (65) дістаємо оцінку

$$\frac{1}{\psi(\sqrt{\sigma})} \int\limits_0^\pi \int\limits_1^{v_1 + \frac{2\pi}{t}} v^2 \psi(\sqrt{\sigma} v) dvdt = O\left(1 + \frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})} \int\limits_{\sqrt{\sigma}}^\infty v\psi(v) dv\right). \tag{67}$$

Об'єднуючи співвідношення (65), (66), одержуємо

$$\int\limits_0^\pi \left| \int\limits_1^\infty \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt = O\left(1 + \frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})} \int\limits_{\sqrt{\sigma}}^\infty v\psi(v) dv\right). \tag{68}$$

Із (61), враховуючи (63), (64) і (67), а також (59), маємо

$$\int\limits_0^\pi \left| \int\limits_0^\infty \mu(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt =$$

$$= O\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})} \int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} v^2\psi(v) dv + \frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})} \int\limits_{\sqrt{\sigma}}^\infty v\psi(v) dv\right). \tag{69}$$

Аналогічно можна показати, що справедливою є оцінка

$$\int\limits_{-\pi}^{0}\left|\int\limits_{0}^{\infty}\mu(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt=$$

$$=O\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_{1}^{\sqrt{\sigma}}v^2\psi(v)dv+\frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_{\sqrt{\sigma}}^{\infty}v\psi(v)dv\right). \qquad (70)$$

Об'єднуючи формули (60), (68) та (69), отримуємо

$$A\left(\mu\right)=O\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma}\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_{1}^{\sqrt{\sigma}}v^2\psi(v)dv+\frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\int\limits_{\sqrt{\sigma}}^{\infty}v\psi(v)dv\right). \qquad (71)$$

Враховуючи співвідношення (5), із (2) та (4) маємо рівність

$$f(x)-W_\sigma\left(f,x\right)=$$

$$=\psi(\sqrt{\sigma})\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sqrt{\sigma}}\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\tau(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\ dt. \qquad (72)$$

Тоді

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi;W_\sigma\right)_{\widehat{C}}=\sup_{f\in\widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi}\|f(x)-W_\sigma(f;x)\|_{\widehat{C}}=$$

$$=\sup_{f\in\widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi}\left\|\psi(\sqrt{\sigma})\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sqrt{\sigma}}\right)\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\tau(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dvdt\right\|_{\widehat{C}}=$$

$$=\sup_{f\in\widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi}\left\|\psi(\sqrt{\sigma})\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sqrt{\sigma}}\right)\widehat{\tau}_\beta(t)dt\right\|_{\widehat{C}}=$$

$$=\sup_{f\in\widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi}\left\|\psi(\sqrt{\sigma})\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sqrt{\sigma}}\right)\left(\widehat{\varphi}_\beta(t)+\widehat{\mu}_\beta(t)\right)dt\right\|_{\widehat{C}}=$$

$$=\sup_{f\in\widehat{C}_{\beta,\infty}^\psi}\left\|\psi(\sqrt{\sigma})\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sqrt{\sigma}}\right)\widehat{\varphi}_\beta(t)dt\right\|_{\widehat{C}}+O\left(\psi(\sqrt{\sigma})A(\mu)\right). \qquad (73)$$

Легко бачити, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi\left(x+\frac{t}{\sqrt{\sigma}}\right)\widehat{\varphi}_\beta(t)dt=$$

$$=\frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\beta^\psi(x+t)\int\limits_{0}^{\infty}v^2\psi(v)\times$$

$$\times \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv\, dt = -f^{(2)}(x), \tag{74}$$

де $f^{(2)}(x)$ — друга похідна функції $f(x)$.

Підставляючи (73) в (72), отримуємо

$$\mathcal{E}\left(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}; W_\sigma\right)_{\widehat{C}} = \frac{1}{\sigma} \sup_{f \in \widehat{C}^{\psi}_{\beta,\infty}} \left\| f^{(2)}(x) \right\|_{\widehat{C}} + O\left(\psi(\sqrt{\sigma}) A(\mu)\right), \quad \sigma \to \infty. \tag{75}$$

Із рівностей (74) та (70) випливає рівність (48).

Теорему 2 доведено.

Прикладом функцій, для яких має місце теорема 2, є функції $\psi \in \mathfrak{A}^*$, які на $[1, \infty)$ мають вигляд $\psi(v) = \dfrac{1}{v^2 \ln^\alpha(v+K)}$, $K > 0$, $\alpha > 1$; $\psi(v) = \dfrac{1}{v^r} \ln^\alpha(v+K)$, $\psi(v) = \dfrac{1}{v^r} \operatorname{arctg} v$, $\psi(v) = \dfrac{1}{v^r}(K + e^{-v})$, $K > 0$, $r > 2$, $\alpha \in R$.

3. Оцінка верхніх меж наближень функцій з класу $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ операторами Вейєрштрасса в інтегральній метриці. Як випливає з леми з роботи [15] та леми 1 з роботи [12], для функції $\tau(v)$, що задана співвідношенням (5), має місце рівність

$$\mathcal{E}\left(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}; W_\sigma\right)_{\widehat{1}} = \mathcal{E}\left(\widehat{C}^{\psi}_{\beta,1}; W_\sigma\right)_{\widehat{C}} + O\left(\psi(\sqrt{\sigma})\gamma(\sigma)\right), \quad \sigma \to \infty,$$

де $\gamma(\sigma) \le 0$ і

$$|\gamma(\sigma)| = O\left(\int\limits_{|t| \ge \frac{\sqrt{\sigma}\pi}{2}} \left| \int\limits_0^\infty \tau(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt\right). \tag{76}$$

Справедливою є така теорема.

Теорема 3. *Нехай $\psi \in \mathfrak{A}^*_0 \cap \mathfrak{A}'$, функція $g(v) = v^2\psi(v)$ опукла вгору або донизу на $[b, \infty)$, $b \ge 1$. Тоді при $\sigma \to \infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}\left(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}; W_\sigma\right)_{\widehat{1}} = \psi(\sqrt{\sigma}) A(\tau) + O\left(\frac{1}{\sigma} + \frac{\psi(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{\sigma}}\right),$$

де величина $A(\tau)$ означається за допомогою рівності (7) *і для неї справджується оцінка* (8).

Справедливість теореми 3 випливає із теореми 1 та оцінки (див. (48) з роботи [11])

$$\int\limits_{|t| \ge \frac{\sqrt{\sigma}\pi}{2}} \left| \int\limits_0^\infty \tau(v) \cos\left(vt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dv \right| dt = O\left(\frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})} + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right), \quad \sigma \to \infty.$$

***Наслідок* 4.** *Якщо виконуються умови теореми* 1, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \ne 0$ *і* $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$, *де величина $\alpha(t)$ означена рівністю* (43), *то при $\sigma \to \infty$ має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}; W_\sigma\right)_{\widehat{1}} = \frac{2}{\pi} \left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int\limits_{\sqrt{\sigma}}^\infty \frac{\psi(v)}{v} dv + O\left(\psi(\sqrt{\sigma})\right). \tag{77}$$

***Наслідок* 5.** *Нехай* $\psi \in \mathfrak{A}_0^*$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *функція* $v^2\psi(v)$ *опукла вгору або донизу на* $[b,\infty)$, $b \geq 1$, *і*

$$\lim_{v\to\infty} v^2\psi(v) = \infty,$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{\sigma\psi(\sqrt{\sigma})} \int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} v\psi(v)dv = \infty.$$

Тоді при $\sigma \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}; W_\sigma\right)_{\widehat{1}} = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{1}{\sigma} \int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} v\psi(v)dv + O\left(\psi(\sqrt{\sigma})\right). \tag{78}$$

***Наслідок* 6.** *Нехай* $\psi \in \mathfrak{A}_0^*$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2} \neq 0$, *функція* $v^2\psi(v)$ *опукла донизу на* $[b,\infty)$, $b \geq 1$, *і*

$$\lim_{v\to\infty} v^2\psi(v) = K < \infty,$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} \int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} v\psi(v)dv = \infty.$$

Тоді при $\sigma \to \infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}; W_\sigma\right)_{\widehat{1}} = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \frac{1}{\sigma} \int\limits_1^{\sqrt{\sigma}} v\psi(v)dv + O\left(\frac{1}{\sigma}\right). \tag{79}$$

Зауважимо, що при виконанні умов наслідків 4 – 6 рівності (76) – (78) дають розв'язок задачі Колмогорова – Нікольського для операторів Вейєрштрасса W_σ на класах $\widehat{L}^{\psi}_{\beta,1}$ в інтегральній метриці.

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 468 с.
2. *Степанец А. И.* Классы функций, заданные на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102 – 112.
3. *Степанец А. И.* Классы функций, заданные на действительной оси, и их приближение целыми функциями. II // Там же. – 1990. – **42**, № 1. – С. 210 – 222.
4. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории апроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
5. *Коровкин П. П.* О наилучшем приближении функций класса Z_2 некоторыми линейными операторами // Докл. АН СССР. – 1959. – **127**, № 3. – С. 143 – 149.
6. *Баусов Л. И.* О приближении функций класса Z_α положительными методами суммирования рядов Фурье // Успехи мат. наук. – 1961. – **16**, № 3. – С. 513 – 515.
7. *Баусов Л. И.* Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов. – 1965. – **46**, № 3. – С. 15 – 31.
8. *Бугров Я. С.* Неравенства типа неравенств Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка // Math. Cluj. – 1963. – **5**, № 1. – P. 5 – 25.
9. *Баскаков В. А.* О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля – Пуассона // Мат. заметки. – 1975. – **17**, № 2. – С. 169 – 180.

10. *Фалалеев Л. П.* О приближении функций обобщенными операторами Абеля – Пуассона // Сиб. мат. журн. – 2001. – **1**, № 4. – С. 926 – 936.
11. *Харкевич Ю. І., Кальчук І. В.* Наближення (ψ, β)-диференційовних функцій інтегралами Вейєрштрасса // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 8. – С. 953 – 978.
12. *Рукасов В. И.* Приближение операторами Валле Пуссена функций, заданных на действительной оси // Там же. – 1992. – **44**, № 5. – С. 682 – 691.
13. *Степанец А. И.* Методы теориии приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
14. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
15. *Харкевич Ю. І., Жигалло Т. В.* Наближення функцій, заданих на дійсній осі, операторами, що породжуються λ-методами підсумовування їх інтегралів Фур'є // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, №. 9. – С. 1267 – 1280.

Одержано 01.12.2006