УДК 513.83

Л. П. Плахта (Ін-т прикл. пробл. механіки та математики НАН України, Львів;
Ін-т математики, Гдан. ун-т, Польща)

ІНВАРІАНТИ ВУЗЛІВ, ПОВЕРХНІ В $\mathbb{R}^3$ І ШАРУВАННЯ

We give a review of some recent well-known results on combinatorial and geometric properties of finite-order invariants of knots in a three-dimensional space. We study relationships between the Vassiliev invariants and some classical numerical invariants of knots and point out the role of surfaces in the study of these invariants. We also consider some combinatorial and geometric properties of tiled essential tori in closed braid complements by using the braid foliation technique developed in the works of Birman and Menasco and other authors. We study the reductions of link diagrams in the context of finding the braid index of links.

Приведен обзор некоторых известных результатов, касающихся комбинаторных и геометрических свойств инвариантов конечной степени узлов в трехмерном пространстве. Изучаются соотношения между инвариантами Васильева и некоторыми классическими числовыми инвариантами узлов. Отмечена роль поверхностей при исследовании данных инвариантов. Рассматриваются также геометрические и комбинаторные аспекты существенных торов стандартного положения в дополнении к замкнутым косам с использованием техники слоений, развитой в работах Бирман, Менаско и др. Изучаются редукции диаграмм линков в контексте вычисления брейд-индекса линков.

В останні 10 – 15 років в теорії вузлів значне місце в дослідженнях, поряд з відомими класичними комбінаторними та геометричними інваріантами, посідають інваріанти Васильєва скінченного порядку вузлів та лінків у тривимірному просторі. Питання про те, яку топологічну або геометричну інформацію про вузли містять інваріанти Васильєва (які називають також інваріантами скінченного порядку), є одним із найбільш цікавих та актуальних у сучасній теорії вузлів (див., наприклад, [1 – 5]). Досі залишається відкритою гіпотеза Васильєва про те, що інваріанти скінченного порядку розрізняють вузли в тривимірному просторі. Вузли, які не розрізняються інваріантами скінченного порядку $\leq n$, називають n-еквівалентними. Геометричну інтерпретацію n-еквівалентності вузлів було дано Хабіро в термінах локальних рухів на вузлах, а комбінаторну — М. М. Гусаровим у термінах схем. Геометричне тлумачення інваріантів Васильєва наведено в [1]. Крім того, у працях [6 – 9, 2] встановлено ряд цікавих співвідношень між інваріантами Васильєва і класичними комбінаторними та геометричними інваріантами вузлів. Однак повного топологічного і геометричного розуміння інваріантів скінченного порядку досі немає.

У даній статті описано співвідношення між інваріантами скінченного порядку та такими класичними інваріантами вузлів, як рід, канонічний рід, поліном Александера, а також розглянуто деякі комбінаторні та геометричні аспекти перших. Зокрема, у пункті 1 показано, що локальні прості рухи Хабіро C_n на вузлах еквівалентні вставленню, в геометричному сенсі, відповідних комутаторів групи чистих кіс.

У теорії інваріантів скінченного порядку вузлів і лінків у тривимірному просторі важливу роль відіграє градуйований простір (над полем $\mathbf{Q}$) тривалентних діаграм, асоційований з фільтрацією Васильєва – Гусарова вузлів (лінків), а також градуйована алгебра лінійних функціоналів на просторі тривалентних діаграм (див. [10]). Такі функціонали називають ваговими системами. Багато питань, які виникають тут, було розв'язано спочатку в термінах тривалентних діаграм, а потім інтерпретовано в термінах самих інваріантів [10, 2]. Комбінаторні аспекти тривалентних діаграм, які розглядаються як елементи групи (векторного простору) $\mathcal{A}$, тобто за модулем AS- та STU-співвідношень, досліджувались багатьма авторами (див., наприклад, [10, 11]). Зокрема, у працях [10, 12] дано їх геометричну інтерпретацію, а в [13, 2, 9] — їх геометричну реалізацію. Вагові системи піднімаються до так званих канонічних інваріантів Васильєва того ж самого порядку. Теорема 1.2 дає комбінаторно-геометричну конструкцію одного класу вагових систем, які походять з класичних алгебр Лі сімей so і gl. Зазначимо також, що інваріанти Васильєва дали поштовх для систематичного вивчення сингулярних вузлів і лінків як самостійних об'єктів теорії вузлів. Зокрема, виникли такі напрямки в теорії вузлів, як теорія сингулярних кіс, теорія Александера – Маркова для сингулярних лінків та ін. [11]. Топологічно-комбінаторні аспекти теорії сингулярних вузлів розглянуто в п. 1. Отримані результати (теорема 1.3) дозволяють побудувати модифіковану версію відомого класичного алгоритму (див. [14]) обчислення інваріантів порядку $\leq n$. Крім того, даний метод редукції сингулярних вузлів до канонічних поширюється також на клас просторових графів.

У пункті 2 (теорема 2.1, наслідки 2.1 і 2.2) описано конструктивні множини для інваріантів Васильєва порядку не більше ніж n. Множина вузлів називається n-конструктивною, якщо всі інваріанти скінченного порядку однозначно задаються своїми значеннями на вузлах цієї множини. Наведені тут приклади конструктивних множин складаються з вузлів обмеженого канонічного і класичного родів. Розглядаються також для кожного $n \in \mathbf{N}$ класи „геометричних" n-тривіальних вузлів, які задаються відповідними поверхнями Зайферта.

Поряд з n-еквівалентністю в даній статті розглядаємо такі відношення на вузлах, як n-спряженість, n-тривіальність, перебудовна n-тривіальність і т. д., які досліджувались також у працях [3 – 5]. При отриманні результатів (теореми 3.1 і 3.2) використано деякі співвідношення між інваріантами скінченного порядку вузлів і сателітними операціями [15, 16]. Аналоги таких співвідношень мають місце також і у випадку інваріантів скінченного порядку лінків (інваріанти Кірка – Лівінгстона) [17].

Нестискувані поверхні стандартного положення в доповненні до лінків, які репрезентуються замкненими косами, досліджувались у роботі [18]. Для вивчення таких поверхонь ефективно використовується техніка сингулярних шарувань на них, які індукуються природним чином брейд-структурою тривимірного простору $\mathbf{R}^3$ з фіксованою віссю. Моделі таких поверхонь і шарувань описуються в комбінаторних термінах. У пункті 4 вивчається, зокрема, клас суттєвих (нестискуваних і непериферійних) торів у доповненні до лінків (замкнених кіс), які допускають плиткові покриття, а також їх комбінаторні моделі, які називаються плитковими торами.

У працях [19, 20] було введено і досліджено операції на діаграмах лінків, які дозволяють редукувати у діаграмі число циклів Зайферта. Кінцевою метою дослідження редукційних операцій на діаграмах лінків є знаходження або оцінка брейд-індексу лінка, який репрезентується заданою діаграмою. У пункті 5 вивчаються редукційні операції на діаграмах лінків і відповідних графах Зайферта, введені в [19, 20], розглядаються їхні узагальнення й аналізуються гіпотези стосовно властивостей цих операцій і редукованих діаграм, а також співвідношень між числом циклів Зайферта і скрутом діаграми лінка. Отримані приклади графів Зайферта і відповідних діаграм лінків свідчать про негативне вирішення однієї з гіпотез і виявляють всю складність комбінаторних проблем, які виникають при знаходженні брейд-індексу лінків і редукцій діаграм.

1. Інваріанти Васильєва вузлів та тривалентні діаграми. Тут і далі під вузлом ми розуміємо PL- або гладкий орієнтований вузол у тривимірному просторі або тривимірній сфері, якщо не обумовлено протилежне. Сингулярним вузлом називається образ PL- або гладкої імерсії кола S^1 у тривимірному просторі, в якій допускається скінченне число трансверсальних самоперетинів (сингулярностей). Вузол K називається n-сингулярним, якщо він містить рівно n таких трансверсальних самоперетинів [10]. Вузли в S^3 або $\mathbf{R}^3$ розглядаються з точністю до еквівалентності, яка задається ізотопією об'ємного простору. Основні поняття і факти з теорії інваріантів Васильєва вузлів можна знайти в [10, 2, 11].

Позначимо через $\mathcal{K}$ множину всіх орієнтовних вузлів в S^3, через $\mathcal{K}'$ вільну абелеву групу, породжену множиною класів еквівалентних вузлів, а через $\mathcal{K}_n$ підгрупу групи $\mathcal{K}'$, породжену множиною n-сингулярних вузлів. Фільтрацією Васильєва – Гусарова називається послідовність абелевих груп

$$\mathcal{K}' \supset \mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2 \supset \mathcal{K}_3 \supset \ldots .$$

Інваріант ізотопії вузла v із значеннями в абелевій групі H (який можна розглядати як гомоморфізм $v\colon \mathcal{K}' \to H$) називають інваріантом скінченного типу n, якщо він є тотожним нулеві на підгрупі $\mathcal{K}_{n+1}$. Найменше натуральне число m, для якого виконується дана умова, називають порядком інваріанта v. Інваріант v називають адитивним, якщо $v(K_1 \sharp K_2) = v(K_1) + v(K_2)$ для довільних вузлів K_1 і K_2, де $\sharp$ — операція зв'язної суми двох вузлів. Раціональні інваріанти Васильєва утворюють фільтровану послідовність векторних просторів

$$V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n \subset \ldots ,$$

де V_n позначає векторний простір раціональних інваріантів типу n. Градуйований векторний простір, асоційований з даною фільтрацією V, називають простором вагових систем і позначають W. На градуйованому просторі $W = \bigoplus_{n=1}^{\infty} W_n$ можна ввести операції множення і комноження, які перетворюють W в алгебру Хопфа [10]. Відомо, що первісні елементи степеня n в W відповідають адитивним раціональним інваріантам Васильєва порядку n [10]. Вагові системи w степеня n можна розглядати як лінійні функціонали на векторному просторі $\mathcal{A}_n \otimes \mathbf{Q}$ тривалентних діаграм степеня n над $\mathbf{Q}$ [10] (див. нижче).

Під тривалентною діаграмою ми розуміємо зв'язний тривалентний мультиграф, в якому виділено простий цикл (зовнішнє коло) і обумовлено наступне. Вершини, які лежать на зовнішньому колі, називають зовнішніми, а всі інші вершини — внутрішніми. Кожна внутрішня вершина є орієнтованою, тобто задано одну з двох циклічних перестановок трьох ребер, що інцидентні даній вершині. Половину від числа вершин графа називають степенем даної тривалентної діаграми. Вилучаючи з діаграми ребра зовнішнього циклу, отримуємо (можливо, незв'язний) внутрішній граф. У частковому випадку, коли всі вершини внутрішнього графа Γ тривалентної діаграми D містяться в зовнішньому циклі, D називають хордовою діаграмою. З кожним орієнтованим n-сингулярним вузлом K асоціюється деяка хордова діаграма D степеня n [10]. Позначимо через $\mathcal{D}_n$ сукупність усіх тривалентних діаграм степеня n [10]. Покладемо $\mathcal{A}_n = \mathbf{Z}\mathcal{D}_n / \big\{$всі STU-відношення$\big\}$.

Тривалентну діаграму T називають деревоподібною діаграмою, якщо її внутрішній граф є деревом. Далі, тривалентну діаграму D називають гіллястою діаграмою степеня n, якщо її внутрішній граф ізоморфний стандартному n-дереву [2]. Кожній гіллястій діаграмі T степеня n однозначно відповідає підстановка $\sigma \in S_n$ [2]. Позначимо через T_σ гіллясту діаграму степеня n, яка відповідає підстановці σ.

Тривалентну діаграму T, яка допускає розбиття на дві зв'язні компоненти вилученням двох дуг із зовнішнього циклу так, що жодна з компонент не містить весь внутрішній граф, називають розщеплюваною діаграмою. Як показано в [2], для кожного натурального числа n абелева група $\mathcal{A}_n$ породжується розщеплюваними діаграмами і гіллястими діаграмами степеня n. Крім того, довільний адитивний інваріант Васильєва порядку $\leq n$ на $\mathcal{K}_n$ однозначно задається своїми значеннями на гіллястих тривалентних діаграмах степеня n [2].

Аналогічно означають так звані унітривалентні діаграми, які отримують з тривалентних діаграм вилученням зовнішнього циклу. Відповідні відношення на градуйованому просторі (абелевій групі), породженому унітривалентними діаграмами, задаються AS- та IHX-рівностями [10]. Позначимо через $\mathcal{B}_n$ векторний простір над $\mathbf{Q}$ унітривалентних діаграм степеня n за модулем AS- та IHX-співвідношень.

Два вузли називають V_n-еквівалентними (n-еквівалентними), якщо вони не розрізняються інваріантами Васильєва (адитивними інваріантами Васильєва) порядку $\leq n$ із значеннями в довільній абелевій групі H. М. М. Гусаров [21] показав, що для довільного n класи n-еквівалентних вузлів утворюють абелеву групу по відношенню до операції зв'язної суми вузлів. Відомо також, що класи вузлів, які не розрізняються раціональними інваріантами Васильєва, утворюють абелеву групу $\mathcal{C}_n$ без скруту [2]. Нехай P_k позначає групу чистих кіс на k струнах, а $\hat{b}$ — стандартне замикання коси b до вузла чи лінка. Крім того, нехай $LCS_n(P_k)$ є n-ю підгрупою нижнього центрального ряду групи P_k. Вузли K_1 та K_2 називають LCS_n-еквівалентними, якщо існують натуральне число k і коси $p \in LCS_n(P_k)$ і $b \in B_k$ такі, що $K_1 = \hat{b}$ і $K_2 = \widehat{pb}$. Стенфорд [9] показав, що довільні два вузли є V_n-еквівалентними тоді і тільки тоді, коли вони є LCS_{n+1}-еквівалентними. Відомі також інші характеризації V_n-еквівалентності на вузлах. Хабіро [13] описав відношення V_n-еквівалентності на вузлах у термінах локальних C_{n+1}-рухів і показав, що V_n- і n-еквівалентності на вузлах — це одне і те ж. Серед усіх C_n-рухів на вузлах і лінках важливу роль відіграють так звані прості гіллясті рухи, які реалізують у комбінаціях з ізотопією всі інші C_n-рухи. Відношення еквівалентності на вузлах, яке породжується простими гіллястими C_n-рухами, називають sC_n-еквівалентністю. Насправді, прості гіллясті рухи на вузлах відповідають гіллястим тривалентним діаграмам того ж самого степеня, а точніше, є геометричною реалізацією останніх [13, 12]. Геометричну реалізацію довільних тривалентних діаграм описано в [13].

Позначимо через $p_{i,j}, 1 \leq i < j \leq k$, стандартні твірні групи чистих кіс P_k на k струнах. В [12] показано в явному вигляді, що sC_n- і LCS_n-еквівалентності збігаються між собою для вузлів у тривимірному просторі. Точніше, виконується наступне твердження.

Теорема 1.1. *Нехай K і K' — два довільні вузли такі, що K' отримується з K за допомогою простого гіллястого C_n-руху. Тоді існує павутинне відображення $T\colon P_{n+1} \to \{$типи вузлів$\}$, де $n > 1$, таке, що $T(1_{n+1}) = K$ і $T(p_n) = K'$, p_n є n-комутатором групи чистих кіс P_{n+1} вигляду $p_n = \big[p_{n-1,n}, [p_{n-2,n-1}, \ldots, [p_{1,2}, p_{0,1}] \ldots\big]$.*

В [12] знайдено ефект простого гіллястого руху на вузлі в термінах градуйованого модуля, асоційованого з фільтрацією Васильєва – Гусарова ([12], теорема 2.2).

Важливим є також питання про існування необоротного вузла K, який відрізняється від свого оберненого деяким інваріантом скінченного порядку n. В [12] показано, що дана проблема зводиться до проблеми існування деякої нетривіальної непарної діаграми степеня n в категорії градуйованого модуля тривалентних діаграм, асоційованих з фільтрацією Васильєва – Гусарова вузлів (див. також [10]).

В [10] тривалентні та унітривалентні діаграми реалізуються у вигляді маркованих діаграм і компактних поверхонь з маркованими поверхнями краю. Дана конструкція дозволяє побудувати геометрично клас вагових систем, які випливають з простих класичних алгебр і груп Лі. В [22] описано іншу комбінаторно-геометричну реалізацію тривалентних діаграм, яка використовує теорію топологічних графів, а точніше, графи напруг.

Нехай G — довільна скінченна абелева група і $\mathcal{B}^G$ позначає $\mathbf{Z}$-градуйований векторний простір над $\mathbf{Q}$ діаграм з ребрами, маркованими елементами групи G (діаграмами напруг), за модулем відповідних співвідношень [22]. Для кожної фіксованої групи G існує канонічний гомоморфізм $\mu_G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}^G$ градуйованих векторних просторів [22]. Дана реалізація унітривалентних діаграм також задає раціональні вагові системи, які випливають з класичних простих алгебр Лі. Точніше, має місце наступна теорема.

Теорема 1.2. *Кожна вагова система, яка пропускається через гомоморфізм $\mu_G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}^G$, випливає з алгебр Лі з сімей* so *і* gl.

Крім того, в [22] розглянуто марковані діаграми в більш загальному контексті. Питання про те, чи дозволяє дана конструкція отримати новий клас вагових систем, залишається відкритим.

У теорії інваріантів скінченного порядку важливою є процедура (алгоритми) обчислення даних інваріантів. У статті [10] описано стандартний рекурсивний алгоритм обчислення інваріантів Васильєва вузлів, який ґрунтується на методі спуску фіксованої діаграми вузла до діаграми тривіального вузла за допомогою операцій розвузлення (зміни самоперетину у діаграмі). Відомо також [10], що проблема обчислення значень інваріанта Васильєва на вузлах має поліноміальну складність, тобто значення інваріанта на вузлі можна обчислити за час, який поліноміально залежить від числа самоперетинів у діаграмі, що репрезентує даний вузол. Проблема ж обчислення всіх інваріантів Васильєва порядку $\leq n$ є значно складнішою. Стенфорд [23] описав і обґрунтував відповідний алгоритм для обчислення твірних групи (векторного простору) всіх інваріантів порядку $\leq n$. Запропонований алгоритм ґрунтується на процедурі зведення діаграм сингулярних вузлів за допомогою R-рухів (аналогів рухів Райдемейстера для діаграм сингулярних вузлів) до канонічного вигляду і рекурсії. Однак зазначений алгоритм Стенфорда є досить складним. Цей алгоритм допускає суттєве спрощення в обчисленнях за умови позитивної і конструктивної відповіді на одне з двох наступних питань, поставлених у [23].

Запитання 1.1. Чи існує для заданої хордової діаграми D степеня n скінченна множина n-сингулярних вузлів $K_1, \ldots, K_p$ (для яких D є асоційованою хордовою діаграмою) таких, що довільний n-сингулярний вузол K з асоційованою хордовою діаграмою D можна перетворити в один із вузлів K_i, використовуючи при цьому лише операції зміни самоперетину в деякій діаграмі сингулярного вузла K?

Запитання 1.2. Чи існує для заданої хордової діаграми D степеня n скінченна множина n-сингулярних вузлів $K_1, \ldots, K_p$ (для яких D є асоційованою хордовою діаграмою) таких, що довільний n-сингулярний вузол K з асоційованою хордовою діаграмою D можна перетворити в один із вузлів K_i, використовуючи при цьому для деякої вихідної діаграми L вузла K тільки операції зміни самоперетину і локальні R-рухи так, що жодна проміжна діаграма в результаті трансформації не містить більше самоперетинів, ніж в L?

В [24] показано, що при деякому послабленні умов відповідь на запитання 1.1 є позитивною. Більш конкретно, для довільної хордової діаграми D степеня n конструктивно будується скінченний класс $\mathcal{L}^D$ діаграм n-сингулярних вузлів так, що справджується наступна теорема.

Теорема 1.3. *Довільну діаграму* (*сингулярного*) *вузла K з асоційованою хордовою діаграмою D степеня n можна редукувати за допомогою операцій зміни самоперетину і комбінацій локальних рухів $R_1 - R_4$ до деякої діаграми з классу $\mathcal{L}^D$ так, що жодна проміжна діаграма не містить більше самоперетинів, ніж дана діаграма вузла K.*

З іншого боку, в [24] показано, що в загальному випадку немає позитивної відповіді на запитання 1.1. Для цього побудовано відповідні приклади діаграм вузлів. В [24] також отримано деякі оцінки для числа різних вузлів у кожному з класів $\mathcal{L}_D$. Отримані оцінки є не задовільними і потребують уточнення. Зазначимо, що запропонований в [24] метод редукції довільної діаграми сингулярного вузла з асоційованою хордовою діаграмою D до діаграми, поданої у класі $\mathcal{L}_D$, можна продовжити на випадок просторових графів. Використовуючи метод доведення теореми 1.3, в [24] описано модифікований алгоритм обчислення інваріантів Васильєва порядку $\leq n$ (сингулярних) вузлів. Обчислювальна складність модифікованого алгоритму є дещо меншою, ніж стандартного алгоритму.

2. Інваріанти Васильєва вузлів, поверхні Зайферта та конструктивні множини. Дослідження геометричних властивостей інваріантів скінченного порядку започаткували Кальфагіанні і Лін [3]. Вони інтерпретують інваріанти скінченного порядку як перешкоди для того, щоб заданий вузол обмежував регулярну поверхню Зайферта, доповнення до якої, за модулем нижнього центрального ряду фундаментальної групи вузла, виглядає як доповнення до нуль-ізотопії. Вузол в S^3 називають n-тривіальним, якщо він є n-еквівалентним тривіальному вузлові. Кальфагіані і Лін [3] означили для кожного $n \geq 2$ класи „геометричних вузлів", серед яких є класи n-гіперболічних, n-еліптичних і n-параболічних вузлів. Дані геометричні вузли допускають регулярні поверхні Зайферта вказаного вище типу. Більш того, кожний n-гіперболічний або n-еліптичний вузол має тривіальний поліном Александера [3]. Зазначимо, що останні три класи не вичерпують всі n-тривіальні вузли.

У роботі [3] зазначено, що всі 0-гіперболічні (в сенсі нашого означення) вузли є 2-тривіальними, і поставлено питання про те, чи виконується аналогічне твердження для всіх інших натуральних чисел $n \geq 1$, тобто чи кожен n-гіперболічний вузол є $(n+2)$- або $(n+1)$-тривіальним. У роботі [25] (теорема 2.1) дано негативну відповідь на дане питання. Точніше, для довільного непарного натурального числа n існує n-гіперболічний вузол, який не є $(n+2)$-тривіальним. Доведення цього факту є конструктивним і істотно використовує ефект вставлення в діаграму вузла за допомогою павутинного відображення подвоєних комутаторів чистих кіс (дублів кіс) по відношенню до інваріантів скінченного порядку $\leq n$. При доведенні теореми також суттєво використано техніку тривалентних діаграм, про яку йшлося в п. 1.

У теорії інваріантів вузлів скінченного порядку важливим є питання про те, як співвідносяться дані інваріанти з класичними числовими комбінаторними та геометричними інваріантами. Відомо, що Arf-інваріант (другий коефіцієнт полінома Конвея за модулем 2) є інваріантом Васильєва порядку 2. Інші класичні числові геометричні (і комбінаторні) інваріанти вузлів не є, як правило, інваріантами скінченного порядку. Відзначимо тут деякі відомі результати про співвідношення між інваріантами Васильєва та класичними числовими інваріантами вузлів в іншому аспекті. Зокрема, Стоіменов [6] показав, що для довільного вузла K і довільних натуральних чисел n і $u_0 \geq u(K)$, де $u(K)$ є числом розвузлення вузла K, існує вузол K_{n,u_0} такий, що для довільного раціонального інваріанта v порядку $\leq n$ справджуються рівності $u(K_{n,u_0}) = u_0$ і $v(K_{n,u_0}) = v(K)$. Аналогічні результати були отримані Стоіменовим для сигнатури σ, 4-го роду g_s і узагальненої сигнатури Тристрама – Левіна σ_ξ.

Співвідношення між інваріантами Васильєва і класичним та канонічним родами вузла є менш дослідженими. Відомо, що існують раціональні інваріанти Васильєва (коефіцієнти полінома Конвея вузла), які тотожно дорівнюють нулеві на всіх вузлах обмеженого роду [7]. Крім того, Стоіменов довів [7], що для довільного фіксованого $g \in \mathbf{N}$ при $n \to \infty$ існує більше, ніж поліноміальне число, незалежних адитивних (первісних) раціональних інваріантів Васильєва, які набувають тривіальних значень на всіх вузлах K, для яких виконується нерівність $\tilde{g}(K) \leq g$. У зв'язку з цим в [7] було висунуто наступну гіпотезу.

Гіпотеза 2.1. *Довільний адитивний раціональний інваріант Васильєва скінченного порядку $n \in \mathbf{N}$, який набуває тривіальних значень на всіх вузлах обмеженого роду, є тотожним нулеві.*

В [26] отримано результати, які частково підтверджують гіпотезу 2.1 і доповнюють результати Стоіменова. Для їх формулювання введемо спочатку необхідні поняття і деякі означення.

Для довільної коси $b \in B_{n+1}$ на $n+1$ смугах (струнах) позначимо через $\hat{b}$ її стандартне замикання відносно осі A. Замкнена коса $\hat{b}$ репрезентує деякий лінк (сплетення) L в S^3. Поверхня Зайферта S для $\hat{b}$ називається сплетеною поверхнею Зайферта відносно A, якщо S складається з $n+1$ паралельного диска і деяких стрічок, що з'єднують їх, таких, що:

1) вісь A проколює диски в одному й тому ж напрямку;

2) кожна стрічка описується косою $\sigma_{i,j}^{\pm 1} = \sigma_i \dots \sigma_{j-2}\sigma_{j-1}^{\pm 1}\sigma_{j-2}^{-1}\dots\sigma_i^{-1}$ для $0 \leq i < j \leq n$, де σ_k — стандартні твірні Артіна групи кіс B_{n+1}.

Для довільної циклічної підстановки $\tau = (0, i_1, i_2, \dots, i_n) \in S_{n+1}$ позначимо через μ'_τ косу $\sigma_{0,i_i}\dots\sigma_{0,i_n}\hat{p}_{n-1} \in P_{n+1}$, де $\hat{p}_{n-1}$ природно розглядається як елемент групи $P_n \subset P_{n+1}$. Далі, позначимо через μ_τ косу $\sigma_{0,i_i}\dots\sigma_{0,i_n}\hat{p}_n \in P_{n+1}$.

Означимо тепер індуктивно послідовність скінченних (конструктивних) множин $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ вузлів.

1. Нехай $n = 1$. Тоді R_1 складається з єдиного елемента — замикання коси $\sigma_{0,1}p_{0,1}$, що репрезентує тривіальний вузол O;

2. Нехай множину R_{n-1} вже означено. Для циклічної підстановки $\tau = (0, i_1, i_2, \dots, i_n) \in S_{n+1}$ покладемо $K'_\tau = \widehat{\mu'_\tau}$ і $K_\tau = \widehat{\mu}_\tau$. Далі покладемо $R'_n = \{K \mid \exists$ циклічна підстановка $\tau \in S_{n+1} : K = K_\tau$ або $K = K'_\tau\}$ і $R_n = R'_n \cup R_{n-1}$.

Зазначимо, що кожний вузол K'_τ, репрезентований замкненою косою $\widehat{\mu'_\tau}$, є еквівалентним деякому вузлові $L \in R_{n-1}$.

Теорема 2.1 [26]. *Довільний раціональний адитивний інваріант Васильєва порядку $\leq k$ однозначно задається своїми значеннями на вузлах із множини R_k.*

Безпосередньо перевіряється, що вузли з $K \in R_n$ задовольняють умови $g(K) \leq \leq 2n-1$ і $\tilde{g}(K) \leq \dfrac{n^2+3n-2}{2}$.

Наслідок 2.1. *Якщо адитивний раціональний інваріант v порядку $\leq n$ тотожно дорівнює нулеві на всіх вузлах K, для яких виконується умова $g(K) \leq 2n-1$, то $v \equiv 0$.*

Наслідок 2.2. *Якщо адитивний раціональний інваріант v порядку $\leq n$ тотожно дорівнює нулеві на всіх вузлах K, для яких виконується умова $\tilde{g} \leq \leq \dfrac{n^2+3n-2}{2}$, то $v \equiv 0$.*

Аналогічні результати отримано також Стоіменовим з використанням суттєво іншого методу і техніки.

В [4] зміна роду вузла вивчається для пари n-спряжених вузлів у частковому випадку n-еквівалентних вузлів. У загальному ж випадку питання про співвідношення між C_n-рухами Хабіро і родом (канонічним, класичним чи 4-родом) є дуже складним і залишається відкритим. C_2-рух на діаграмах орієнтованих вузлів називають Δ-рухом (з урахуванням орієнтації дуг). Одним із способів контролювати (знизу) зміну роду (канонічного роду) вузла K при застосуванні елементарних C_n-рухів до діаграми D цього вузла є нерівність Беннекена для роду (канонічного роду): $\tilde{g}(K) \geq g(K) \geq (|w(D)| - n(D) + 1)/2$, де $w(D)$ — скрут діаграми D, а $n(D)$ — число циклів Зайферта діаграми D [27].

В [26] отримано часткові результати про зміну роду діаграми вузла при застосуванні до неї Δ-руху і петельного руху (комбінація Δ-руху і рухів Райдемейстера). Крім того, в [28, 17] показано, що для довільного фіксованого n (класичний) рід вузла не є перешкодою зверху для n-еквівалентності вузлів.

Далі, в [3] показано, що для довільного натурального числа $n \geq 1$ існує n-тривіальний вузол, який має нетривіальний поліном Александера. Доведення цього твердження не є конструктивним і не дає в явному вигляді прикладів відповідних вузлів. В [29] для кожного n побудовано в явному вигляді приклади $(2n-1)$-тривіальних вузлів, які мають нетривіальний поліном Александера [29]. Підхід і техніка, які використовуються при доведенні даного факту, опираються на характеризацію n-еквівалентності вузлів у термінах комутаторів груп чистих кіс і локальних C_n-рухів Хабіро, про які йшлося вище.

Нехай $\mathcal{S}$ позначає векторний простір над полем $\mathbf{Q}$, породжений матрицями Зайферта вузлів, за модулем відповідних співвідношень [30]. Муракамі і Огцукі [31] описали фільтрацію векторного простору $\mathcal{S}$,

$$\mathcal{S} \supset \mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2 \supset \mathcal{S}_3 \supset \ldots,$$

і співставили це з фільтрацією Васильєва – Гусарова вузлів. Далі, вони показали, що кожний раціональний інваріант Васильєва порядку n походить з полінома Александера (тобто може бути поданий у вигляді суми добутків коефіцієнтів полінома Александера – Конвея) тоді і тільки тоді, коли він допускає факторизацію відображення фактор-простору $\mathcal{S}/\mathcal{S}_{n+1}$ у раціональні числа. З використанням результатів Муракамі і Огцукі, наведених вище, в [29] отримано достатню умову для того, щоб заданий n-тривіальний вузол, де $n \geq 2$, мав тривіальний поліном Александера. Крім того, для кожного $n \geq 1$ побудувано клас (нетривіальних) n-тривіальних вузлів, які мають тривіальний поліном Александера.

Зазначимо також, що Конант і Тайхнер [1] дали геометричну інтерпретацію інваріантів скінченного порядку вузлів у термінах гроуп-кобордизмів у тривимірному просторі.

3. Інваріанти скінченного порядку вузлів та сателітні операції. Нехай K є вузлом, вкладеним у внутрішність повнотора $V \subset S^3$. Ми будемо використовувати термін „K є n-тривіальним всередині V”, якщо існують вкладення вузла K в $\mathrm{int}(V)$ і сім'я $n+1$ диз'юнктних множин $C_1, \ldots, C_{n+1}$ дисків із самоперетинами, кожен з яких знаходиться всередині V, таких, що для кожного $0 < m \leq n+1$ одночасна зміна всіх самоперетинів у довільних m множинах з даної сім'ї вздовж відповідних дисків приводить до незавузленої кривої, яка може бути здеформована ізотопією всередину 3-кулі в $\mathrm{int}(V)$. Позначимо через s_Q сателітну операцію на вузлах [15], задану за допомогою моделі (V, Q), де V є стандартним повнотором в S^3, а $Q \subset V$ — геометрично суттєвим вузлом у V. Куперберг показав, що довільна сателітна операція переводить n-еквівалентні вузли в n-еквівалентні. В [16] було отримано умову на сателітну операцію s_Q, при якій s_Q переводить n-еквівалентні вузли в $(n+1)$-еквівалентні. У [17] доведено також аналог даних результатів для лінків й інваріантів скінченного порядку в сенсі Кірка і Лівінгстона [32].

Кальфагіані [5] означила для кожного невід'ємного цілого числа n клас перебудовно n-тривіальних вузлів і дослідила їхні властивості.

n-Колекцією для вузла $K \subset S^3$ називається пара $(\mathcal{D}, \bar{q})$ така, що:

1) $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_n\}$ є множиною, яка складається з n диз'юнктних дисків для K, так що алгебраїчне число перетину K з кожним D_i дорівнює нулю;

2) $\bar{q} = \left\{\dfrac{1}{q_1}, \ldots, \dfrac{1}{q_n}\right\}$, де $q_i \in \mathbf{Z} - \{0\}$.

3) вузли $K_1, \ldots, K_n$ є маркованими числами $\dfrac{1}{q_1}, \ldots, \dfrac{1}{q_n}$ відповідно, де $K_i = \partial D_i$.

n-Колекцію $(\mathcal{D}, \bar{q})$ називають *неунітарною* (відповідно, *унітарною*), якщо існує $i \leq n$ таке, що $|q_i| > 1$ (відповідно, $|q_i| = 1$ для кожного $i = 1, \ldots, n$). Нехай $i_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \ldots, n$, і $\bar{i} = (i_1, \ldots, i_n)$ для заданого вузла K і n-колекції $(\mathcal{D}, \bar{q})$. Для заданого $\bar{i}$ позначимо через $K(\bar{i})$ вузол, отриманий з вузла K перебудовою порядку q_j (відповідно, 0) вздовж ∂D_j при $i_j = 1$ (відповідно, при $i_j = 0$).

Означення 3.1. *Вузол K називають перебудовно n-тривіальним, якщо для K існує така $(n+1)$-колекція $(\mathcal{D}, \bar{q})$, що $K(\bar{i})$ є тривіальним вузлом для кожного $\bar{i} \neq (0, \ldots, 0)$. Лінк $T = K_0 \cup K_1 \cdots \cup K_n$ називають тоді n-тривіалізатором вузла K. Вузол називають n-спряженим до тривіального вузла, якщо він є перебудовно n-тривіальним і допускає колекцію $(\mathcal{D}, \bar{q})$ таку, що внутрішність кожного диска з $\mathcal{D}$ перетинає K у двох точках. n-Тривіалізатор називають унітарним, якщо відповідна n-колекція є унітарною. У противному разі він називається неунітарним.*

Відомо, що для довільного n кожний перебудовно n-тривіальний вузол є n-тривіальним. Частковим випадком перебудовної n-тривіальності вузлів є n-спряженість їх тривіальному вузлові. Крім того, справджується наступна теорема.

Теорема 3.1 [16]. *Для кожного n існують n-тривіальні вузли, які не допускають неунітарних n-тривіалізаторів.*

При доведенні теореми суттєво використовуються результати робіт [12, 33]. Сенс даного твердження полягає в тому, що за модулем унітарних тривіалізаторів перебудовна n-тривіальність вузла є суттєво сильнішою умовою, ніж його n-тривіальність.

Пшитицький [34] показав, що коли вузол Q, вкладений у повнотор V, є тривіальним в S^3 і k-тривіальним всередині V, а також якщо вузол $\hat{K}$ є m-тривіальним, то сателітний вузол $K = s_Q(\hat{K})$ є $(k+m+1)$-тривіальним. У [16] отримано наступний аналог результату Пшитицького.

Теорема 3.2. *Нехай $V \subset S^3$ — повнотор, стандартно вкладений в S^3, а $Q \subset V$ — геометрично суттєвий вузол у V. Припустимо, що вузол Q є тривіальним в S^3 і вкладеним у V так, що Q є k-спряженим із тривіальним вузлом всередині V. Крім того, нехай $\hat{K}$ є вузлом, який є m-спряженим із тривіальним вузлом. Тоді сателітний вузол $\hat{K} = s_Q(K)$ є перебудовно $(k+m+1)$-тривіальним.*

4. Суттєві тори в доповненні до замкнених кіс: комбінаторні та геометричні аспекти. В геометрії і топології тривимірних многовидів (зокрема, в доповненні до лінків) важливу роль відіграють нестискувані тори і, більш загально, нестискувані поверхні. В цьому контексті потрібно відзначити результати Джако і Шаллена в [35] про декомпозицію многовидів Хакена скінченною множиною диз'юнктних суттєвих торів.

У [36] вивчаються нестискувані поверхні в доповненні до замкнених кіс. Для дослідження їх геометрії використовуються природні (сингулярні) шарування на цих поверхнях, які індукуються брейд-структурою тривимірного простору $\mathbf{R}^3$ або S^3 з віссю A, тобто розбиттям його на півплощини $\{H_\theta\colon \theta \in [0, 2\pi]\}$ з краєм на осі A. Даний підхід до вивчення нестискуваних поверхонь у доповненнях до замкнених кіс був закладений і розвинений Дж. Бірман і В. Менаско в [18], Дж. Бірман і Е. Фінкельштейн в [37] та ін.

Нехай L є нерозщеплюваним лінком, репрезентованим деякою замкненою косою з віссю A, і T є суттєвим тором в $S^3 \setminus L$, який виникає в декомпозиції Джако – Шаллена – Йогансона тривимірного многовиду $S^3 \setminus L$. Бірман і Менаско показали [18], що кожний такий тор T може бути стандартизованим за допомогою послідовності контрольованих рухів на замкнених косах, що репрезентують L, та ізотопій у доповненні до лінка, так що результуючий тор буде в стандартному положенні в доповненні до нової замкненої коси, яка також репрезентує L. Контрольовані рухи, які використовувались у [18] для зведення тора в стандартне положення, є двох типів: ізотопія кос і так звані змінні рухи. Поняття тора в стандартному положенні в доповненні до лінка відносно осі A визначається в термінах сингулярного шарування $\mathcal{F}$ на даному торі, яке індукується брейд-структурою тривимірного простору S^3 або $\mathbf{R}^3$ з віссю A. Позначимо через $\mathcal{F}$ відповідне шарування на суттєвому торі T, а через $\mathcal{T}$ комбінаторну модель даного шарування. В [38] показано, що кожне таке шарування $\mathcal{F}$ є орієнтовним, тобто допускає гладкий потік класу C^{r-1}, траєкторії якого збігаються з його шарами (r — порядок гладкості вкладеної поверхні). Опис суттєвих торів стандартного положення складається з трьох наступних випадків [18].

У першому випадку тор T є трансверсальним до кожного шару H_θ декомпозиції $\mathcal{H}$ і перетинає його по меридіану повнотора обмеженого T (тор типу 0). У другому випадку тор T допускає стандартну мішану декомпозицію. Повний геометричний опис стандартних торів типу 1 був наведений у [18]. У третьому випадку вкладений тор T допускає стандартне плиткове покриття. Тори із стандартним плитковим покриттям мають значно складнішу конфігурацію. Комбінаторні моделі таких торів були описані в [18, 39]. Геометричні (вкладені в $\mathbf{R}^3$) тори типу $n \geq 2$ [18] є окремим випадком стандартних торів із плитковим покриттям, але вони далеко не вичерпують клас останніх. Повного геометричного опису торів із стандартним плитковим покриттям не було.

У роботі [36] наведено опис торів із стандартним плитковим покриттям за допомогою так званих меридіально-паралельних моделей. Дану комбінаторну модель можна відтворити, виходячи із стандартних моделей $\mathcal{T}$ торів із даного класу. На відміну від інших комбінаторних моделей вона безпосередньо містить інформацію про відповідні вкладені тори і може бути використана для геометричного опису останніх.

У [36] запропоновано також алгоритм для знаходження зрізаних геометричних і комбінаторних меридіанів на вкладених торах даного типу або їх комбінаторних моделях.

Теорема 4.1 [36]**.** *Нехай $\mathcal{T}$ є комбінаторним тором із стандартним плитковим покриттям, який допускає вкладення T в $\mathbf{R}^3$. Тоді існують $\theta \in [0, 2\pi)$ і компонента C несингулярного зрізу T_θ така, що коло C обмежує меридіальний диск у повноторі $\mathbf{T}$, обмеженому тором T.*

Крім того, в [36] доведено також наступну теорему.

Теорема 4.2. *Довільний вкладений плитковий тор T' є суттєвим* (*тобто нестискуваним і непериферійним*) *у доповненні до деякого нерозщеплюваного лінка L, репрезентованого замкненою косою з віссю A.*

5. Діаграми лінків, графи Зайферта та брейд-індекс. Класична гіпотеза теорії вузлів стверджує, що для кожної замкненої коси D, яка репрезентує лінк L і має мінімальне число струн $b(D)$ серед усіх замкнених кіс, які задають L, скрут $w(D)$ діаграми D є однозначно визначеним. Крім того, для довільної іншої замкненої коси D', яка репрезентує L і має $b(D) + k$ струн, виконується подвійна нерівність

$$w(D) - k \leq w(D') \leq w(D) + k.$$

Позначимо через $G(D)$ граф Зайферта діаграми D. Відомо, що $G(D)$ є завжди знаковим планарним і дводольним графом [20], хоч і не має канонічного вкладення в площину. З результату Ямади [40] випливає, що вказана вище гіпотеза еквівалентна наступній.

Гіпотеза 5.1. *Для кожної діаграми D лінка L, яка має мінімальне число циклів Зайферта серед усіх можливих діаграм для L, скрут $w(D)$ діаграми D є однозначно заданим. Крім того, для довільної іншої діаграми D' лінка L, яка має $b(D) + k$ циклів Зайферта, виконується подвійна нерівність*

$$w(D) - k \leq w(D') \leq w(D) + k.$$

Циклічний індекс $\mathrm{ind}(G(D)$ графа Зайферта $G(D)$, за означенням, є максимальним числом циклічно незалежних ребер в $G(D)$. Позначимо через $\mathrm{ind}_-(G(D))$ і $\mathrm{ind}_+(G(D))$ максимальні числа циклічно незалежних додатних і від'ємних ребер відповідно в знаковому графі $G(D)$. Очевидно, що нерівність

$$\mathrm{ind}_-(G(D)) + \mathrm{ind}_+(G(D)) \geq \mathrm{ind}(G(D))$$

виконується для довільної діаграми лінка D і її графа Зайферта $G(D)$.

Мурасугі і Пшитицький [19] означили операцію на діаграмах лінків, яка дозволяє зменшувати число циклів Зайферта у діаграмі лінка деяким контрольованим способом. Пояснимо тут важливе значення, яке відіграють редукційні операції в контексті обчислення брейд-індексу лінків (див., наприклад, [20, 19]). Як відомо, одним із методів знаходження брейд-індексу лінка є нерівності Мортона – Френка – Вільямса для діаграм лінків [30, 41], які дають нижню оцінку для брейд-індексу $b(L)$ лінка L у термінах HOMFLY-полінома від двох змінних. Нехай $P_L(v,z)$ позначає HOMFLY-поліном лінка L від змінних v, z, а $\mathrm{span}_v P_L(v,z)$ є різницею між максимальним і мінімальним степенями змінної v в даному поліномі (Лорана). Тоді нижня оцінка Мортона – Френка – Вільямса для брейд-індексу $b(L)$ має вигляд

$$\mathrm{span}_v P_L(v,z) \leq 2(b(L)-1).$$

На жаль, нерівності Мортона – Френка – Вільямса для діаграм лінків і наведена нижня оцінка для брейд-індексу лінка не є точними, а похибка може бути як завгодно великою [19, 20, 8, 42]. Останній факт і був основною мотивацією для вивчення редукцій лінків до деякого стандартного (в певному сенсі оптимального) вигляду за допомогою спеціальних операцій. Як результат, було висунуто кілька гіпотез стосовно можливих редукцій і властивостей результуючих діаграм лінків (див. вище). З іншого боку, відомо (див. [42]), що коли нерівність Мортона – Френка – Вільямса є точною для лінка L або деякого кабеля лінка L, то L не може бути контрприкладом до (першого твердження) гіпотези 5.1.

Мурасугі і Пшитицький [19] покращили нерівності Мортона – Френка – Вільямса для діаграм і показали, що для довільної діаграми D лінка L виконується наступне:

$$\mathrm{span}_v P_L(v,z) \leq 2(s(D) - \mathrm{ind}_-(G(D)) - \mathrm{ind}_+(G(D)) - 1).$$

Крім того, в [19] було показано, що для довільної діаграми лінка D число $s(D)$ циклів Зайферта може бути зменшене на величину $\mathrm{ind}(G(D))$ при повторному застосуванні до D редукційної операції Мурасугі – Пшитицького.

Малешіч і Трачик в [20] висунули наступну гіпотезу.

Гіпотеза 5.2. *Нехай D — діаграма деякого орієнтованого лінка L. Припустимо, що число циклів Зайферта в D дорівнює s, а скрут діаграми D — c. Тоді існує інша діаграма лінка L, для якої число циклів Зайферта дорівнює $s - \mathrm{ind}_+(G(D)) - \mathrm{ind}_-(G(D))$, а скрут — $c - \mathrm{ind}_+(G(D)) + \mathrm{ind}_-(G(D))$.*

Зазначимо, що із справедливості гіпотези 5.2 випливає наступна нижня оцінка для брейд-індексу лінка L з діаграмою D:

$$b(L) \leq s(D) - \mathrm{ind}_-(G(D)) - \mathrm{ind}_+(G(D)).$$

Крім того, Малешіч і Трачик припустили, що потрібну редукцію на довільній діаграмі лінка можна виконати за допомогою п'яти спеціальних операцій, які вони означили в [20]. Граф Зайферта діаграми лінка відіграє в редукційному процесі важливу роль. В [20] останню гіпотезу Малешіча і Трачика (тобто гіпотезу 1.3 [43]) було сформульовано в термінах теорії графів. В [43] показано, що гіпотеза 1.3 є хибною як на рівні графів, так і на рівні діаграм лінків. Крім того, було спростовано слабшу версію гіпотези 1.3, в якій допускається деяке узагальнення п'яти редукційних операцій Малешіча – Трачика. Спочатку було розв'язано проблему на рівні графів Зайферта (знакових графів) побудовою серії відповідних контрприкладів, а потім за знаковими графами відновлено діаграми лінків, які дають відповідні контрприклади до гіпотези 1.3.

Нарешті, в [43] було показано, що п'ять редукційних операцій Малешіча – Трачика на діаграмах лінків є суттєво недостатніми для бажаних редукцій таких діаграм. Точніше, побудовано серію прикладів діаграм лінків, які допускають редукції, обумовлені гіпотезою 5.2, але не допускають жодної редукційної операції в сенсі Малешіча і Трачика.

Зазначимо однак, що гіпотеза 5.2 справджується для однорідних діаграм лінків (які включають в себе позитивні і альтерновані діаграми), оскільки в цьому випадку маємо $\mathrm{ind}_+(G(D)) + \mathrm{ind}_-(G(D)) = \mathrm{ind}(G(D))$ [19]). Більш того, існує зв'язок між гіпотезами 5.1 і 5.2. Як показано в [20], довільний контрприклад до гіпотези 5.2 є водночас таким і для гіпотези 5.1.

В [43] обговорюються також можливі контрприклади до гіпотези 5.2.

Автор висловлює подяку професору В. В. Шарку за обговорення результатів праці, корисні поради і підтримку.

1. *Conant J., Teichner P.* Group cobordism of classical knots // Topology. – 2004. – **43**. – P. 119 – 156.
2. *Ng K. Y., Stanford T.* On Gusarov's groups of knots // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1999. – **126**. – P. 63 – 76.
3. *Kalfagianni E., Lin X.-S.* Regular seifert surfaces and Vassiliev knot invariants. – Preprint, math.GT/1998/9804032S.
4. *Kalfagianni E., Lin X.-S.* Knot adjacency, genus and essential tori (with an Appendix by Darryl McCullough). – Preprint 2002.
5. *Kalfagianni E.* Surgery n-triviality and companion tori // J. Knot Theory Ramif. – 2004. – **13**. – P. 441 – 456.
6. *Stoimenow A.* Vassiliev invariants and rational knots of unknotting number one // Topology. – 2003. – **42**, № 1. – P. 227 – 241.
7. *Stoimenow A.* Knots of genus one // Proc. Amer. Math. Soc. – 2001. – **129**, № 7. – P. 2141 – 2156.
8. *Stoimenow A.* On cabled knots and Vasssiliev invariants (not)contained in knot polynomials // Can. J. Math. – 2007. – **59**, № 2. – P. 418 – 448.
9. *Stanford T.* Vassiliev invariants and knots modulo pure braid subgroups. – Preprint, math.GT/1998/9805092.
10. *Bar-Natan D.* On the Vassiliev knot invariants // Topology . – 1995. – **34**. – P. 423 – 472.
11. *Мантуров В.* Теория узлов. – Москва; Ижевск: НИЦ „Регуляр. и хаот. динамика", 2005. – 512 с.
12. *Plachta L.* C_n-moves, braid commutators and Vassiliev knot invariants // J. Knot Theory Ramif. – 2004. – **13**. – P. 809 – 828.
13. *Habiro K.* Claspers and finite type invariants of links // Geom. and Top. – 2000. – **4**. – P. 1 – 83.
14. *Birman J. S., Lin X.-S.* Knot polynomials and Vassiliev invariants // Invent. math. – 1993. – **111**. – P. 225 – 270.
15. *Kuperberg G.* Detecting knot invertibility // J. Knot Theory Ramif. – 1996. – **5**. – P. 173 – 181.
16. *Plachta L.* Knots, satellite operarions and invariants of finite order // Ibid. – 2006. – **15**, № 8. – P. 1061 – 1077.
17. *Plachta L.* Remarks on n-equivalence of knots and links // Math. Methods and Phys.-Mech. Fields. – 2006. – **49**, № 4. – P. 7 – 18.
18. *Birman J. S., Menasco W. W.* Special positions for essential tori in link complement // Topology. – 1994. – **33**. – P. 525 – 556.
19. *Murasugi K., Przytycki J. H.* An index of a graph with applications to knot theory // Mem. AMS. – 1993. – **508**.
20. *Malešič J., Traczyk P.* Seifert circles, braid index and the algebraic crossing number // Top. and Appl. – 2005. – **153**. – P. 303 – 317.

21. *Gusarov M. N.* On n-equivalence of knots and invariants of finite degree // Topology of Manifolds and Varieties / Ed. O. Viro: Adv. Sov. Math. – 1994. – **18**. – P. 173 – 192.
22. *Plachta L.* Voltage graphs, weight systems and odd symmetry // Discrete Math. – 2001. – **236**. – P. 287 – 313.
23. *Stanford T.* Computing Vassiliev invariants // Top. and Appl. – 1997. – **77**. – P. 261 – 276.
24. *Plachta L.* On Stanford's questions concerning singular knots // Univ. Iagel. Acta Math. – 2000. – **38**. – P. 41 – 65.
25. *Plachta L.* Double trivalent diagrams and n-hyperbolic knots // Methods Func. Anal. and Top. – 2004. – **10**. – P. 43 – 56.
26. *Плахта Л.* Рід вузлів, конструктивні множини та інваріанти Васильєва // Доп. НАН України. Сер. А. – 2005. – № 10. – С. 29 – 34.
27. *Stoimenow A.* Positive knots, closed braids and the Jones polynomial. – Preprint, math.GT/9805078
28. *Plachta L.* Genera, band sums of knots and invariants of finite order // Top. and Appl. – 2007. – **154**. – P. 2880 – 2887.
29. *Plachta L.* n-Trivial knots and the Alexander polynomial // Visnyk Lviv Univ. – 2003. – **61**. – P. 161 – 171.
30. *Lickorish W. B. R.* An introduction to Knot Theory // Grad. Texts Math. – 1997. – **175**.
31. *Murakami H., Ohtsuki T.* Finite type invariants of knots via their Seifert matrices // Asian J. Math. – 2001. – **5**. – P. 239 – 256.
32. *Kirk P., Livingston C.* Vassiliev invariants of two component links and the Casson – Walker invariant // Topology. – 1997. – **36**. – P. 1333 – 1353.
33. *Lackenby M.* Surfaces, surgery and unknotting operations // Math. Ann. – 1997. – **308**. – P. 615 – 632.
34. *Przytycki J.* Vassiliev – Goussarov skein modules of 3-manifolds and criteria for peridicity of knots (Knoxville, TN, 1992) // Conf. Proc. Lect. Notes Geom. and Top. III. – Cambridge: Int. Press, 1994. – P. 143 – 162.
35. *Jaco W. H., Shalen P. B.* Seifert fibered spaces in 3-manifolds // Mem. AMS. – 1979. – **21**, № 220.
36. *Plachta L.* Essential tori admitting standard tiling // Fund. math. – 2006. – **189**, № 3. – P. 195 – 226.
37. *Birman J. S., Finkelstein E.* Studying surfaces via closed braids // J. Knot Theory Ramif. – 1998. – **7**. – P. 267 – 334.
38. *Plachta L.* On orientability of singular foliations of surfaces in closed braid complements // Mat. Studii. – 2005. – **24**, № 2. – P. 192 – 196.
39. *Ng K. Y.* Essential tori in link complements // J. Knot Theory Ramif. – 1998. – **7**. – P. 205 – 216.
40. *Yamada S.* The minimal number of Seifert circles equals the braid index of a link // Invent. math. – 1987. – **89**. – P. 347 – 356.
41. *Frank J., Williams R. F.* Braids and the Jones polynomial // Trans. Amer. Math. Soc. – 1987. – **303**. – P. 97 – 108.
42. *Stoimenow A.* On the crossing number of positive knots and braids and braid index criteria of Jones and Morton – Frank – Williams // Ibid. – 2002. – **354**, № 10. – P. 3927 – 3954.
43. *Плахта Л.* Редукції діаграм сплетень і графів Зайферта // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 7 – 16.

Одержано 27.10.2006,
після доопрацювання – 25.04.2007