УДК 517.5

В. В. Савчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ СЕРЕДНІМИ ТЕЙЛОРА – АБЕЛЯ – ПУАССОНА

We investigate approximations of functions f holomorphic in the unit disk by means $A_{\rho,r}(f)$ for $\rho \to \to 1-$. In terms of an error of the approximation by these means, the constructive characteristic of classes of holomorphic functions $H_p^r \operatorname{Lip}\alpha$ is given. The problem of the saturation of $A_{\rho,r}(f)$ in the Hardy space H_p is solved.

Исследуются приближения голоморфных в единичном круге функций f средними $A_{\rho,r}(f)$ при $\rho \to 1-$. В терминах погрешности приближения этими средними приведена конструктивная характеристика классов голоморфных функций $H_p^r \operatorname{Lip}\alpha$. Решена задача о насыщении $A_{\rho,r}(f)$ в пространстве Гарди H_p.

1. Постановка задач та основні результати. Нехай $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} = = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ і $\operatorname{Hol}(\mathbb{D})$ — множина усіх функцій, голоморфних у крузі $\mathbb{D}$.

Простір Гарді H_p, $p > 0$, — це множина усіх функцій $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D})$, для яких

$$\|f\|_{Hp} := \sup_{0<\rho<1} M_p(\rho, f) < \infty,$$

де

$$M_p(\rho, f) := \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\rho w)|^p d\sigma(w)\right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$M_\infty(\rho, f) := \max_{|z|=\rho} |f(z)|,$$

і σ — нормована міра Лебега на колі $\mathbb{T}$.

Відомо, що якщо функція f належить H_p, $1 \le p \le \infty$, то на колі $\mathbb{T}$ існують її кутові граничні значення (за якими залишаємо позначення f), які належать просторові $L_p = L_p(\mathbb{T})$, причому

$$\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p} := \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma\right)^{1/p}.$$

Зважаючи на це, домовимося далі завжди під $\|f\|_{H_p}$ розуміти норму функції $f \in H_p$, а під $\|f\|_{L_p}$ — норму її граничних значень в L_p.

Нехай $\rho \in [0, 1)$, $r \in \mathbb{N}$. Розглянемо лінійний оператор $A_{\rho,r}$, визначений на $\operatorname{Hol}(\mathbb{D})$, який діє за правилом

$$A_{\rho,r}(f)(z) := \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(\rho z)}{k!}(1-\rho)^k z^k, \quad z \in \mathbb{D}, \quad f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{D}).$$

Значення цього оператора на функції f будемо називати середніми Тейлора – Абеля – Пуассона функції f. Вибір такої назви пояснюється тим, що, з одного боку, оператор $A_{\rho,r}$ будується як многочлен Тейлора степеня $r-1$ функції f в точці ρz, а з іншого — як лінійна комбінація середніх Абеля – Пуассона функції f та її похідних до r-го порядку включно. Зокрема, при $\rho = 0$ оператор $A_{0,\,r}$ ставить у відповідність функції $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ частинну суму порядку $r-1$ її ряду Тейлора, а при $r = 1$ — звичайні середні Абеля – Пуассона ряду Тейлора.

Розглянемо функціональні класи $H_p^r \operatorname{Lip}\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, і KH_p^r, $r \in \mathbb{Z}_+$, які означаються таким чином:

$$H_p^r \operatorname{Lip}\alpha := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \colon \sup_{0<h\le t} \left\| f^{(r)}(e^{ih}\cdot) - f^{(r)}(\cdot) \right\|_{L_p} = O(t^\alpha) \right\}, \quad 1 \le p < \infty,$$

і

$$KH_p^r := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \colon \left\| f^{(r)} \right\|_{H_p} \le K \right\}, \quad K > 0, \quad 1 \le p \le \infty.$$

При $p = \infty$ під $H_p^r \operatorname{Lip}\alpha$ розуміємо клас голоморфних в $\mathbb{D}$ і неперервних в $\overline{\mathbb{D}}$ функцій f, для яких $\max_{z\in\mathbb{T}} \left| f^{(r)}(e^{ih}z) - f^{(r)}(z) \right| = O(h^\alpha)$. Згідно з теоремою Гарді – Літтлвуда [1] (теорема 48) (див. також [2, с. 78]) клас $H_p^r \operatorname{Lip}1$, $1 \le$ $\le p < \infty$, збігається з множиною функцій $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, для яких $f^{(r+1)} \in H_p$, тобто $H_p^r \operatorname{Lip}1 = \bigcup_{K>0} KH_p^{r+1}$.

У даній роботі наведено конструктивну характеристику класів $H_p^r \operatorname{Lip}\alpha$ в термінах операторів $A_{\rho,\,r}$. Також розв'язано задачу про насичення оператора $A_{\rho,\,r}$ як лінійного методу підсумовування рядів Тейлора.

Нагадаємо (див., наприклад, [3], [4], гл. 2, і [5, с. 434]), що метод підсумовування, породжений оператором $A_{\rho,\,r}$, є насиченим у просторі H_p, якщо існує додатна функція φ, визначена на відрізку $[0, 1)$, монотонна спадна до нуля і така, що кожна функція $f \in H_p$, для якої

$$\left\| f - A_{\rho,r}(f) \right\|_{H_p} = o(\varphi(\rho)), \quad \rho \to 1,$$

є інваріантним елементом оператора $A_{\rho,\,r}$ (тобто $A_{\rho,r}(f) = f$), і якщо множина

$$\Phi(A_{\rho,r})_{H_p} := \left\{ f \in H_p \colon \left\| f - A_{\rho,r}(f) \right\|_{H_p} = O(\varphi(\rho)),\ \rho \to 1 \right\}$$

містить принаймні один неінваріантний елемент. При цьому функція φ називається порядком насичення, а множина $\Phi(A_{\rho,r})_{H_p}$ — класом насичення.

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p \le \infty$ *і* $0 < \alpha \le 1$. *Голоморфна в* $\mathbb{D}$ *функція* f *належить класові* $H_p^r \operatorname{Lip}\alpha$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\left\| f - A_{\rho,r+1}(f) \right\|_{H_p} = O\left((1-\rho)^{r+\alpha} \right), \quad \rho \to 1-. \tag{1}$$

***Зауваження* 1.** Якщо $f \in H_p^r$, то з тотожності

$$f(z) - A_{\rho,r+1}(f)(z) = f(z) - f(\rho z) - \sum_{k=1}^{r} \frac{f^{(k)}(\rho z)}{k!}(1-\rho^k) z^k \frac{(1-\rho)^k}{1-\rho^k} =$$

$$= f(z) - f(\rho z) - \left(\sum_{k=1}^{r} \left(f^{(k)}(z) - f^{(k)}(\rho z) \right) z^k - \left(z^k f^{(k)}(z) - \rho^k z^k f^{(k)}(\rho z) \right) \right) \frac{(1-\rho)^k}{k!(1-\rho^k)}$$

за теоремою Фату (див., наприклад, [2, с. 5]) про збіжність $f^{(k)}(\rho\cdot) \to f^{(k)}(\cdot)$ випливає, що майже скрізь на $\mathbb{T}$ $A_{\rho,r+1}(f) \to f$, $\rho \to 1$.

***Зауваження* 2.** Як буде видно з доведення теореми 1 (див. співвідношення (8)), для величини

$$A_{\rho,r}(KH_p^r, H_p) \;:=\; \sup\left\{ \left\| f - A_{\rho,r}(f) \right\|_{H_p} :\; f \in KH_p^r \right\}, \quad K > 0,$$

виконуються рівності

$$A_{\rho,r}(KH_p^r, H_p) \;=\; \left| f_*(z) - A_{\rho,r}(f_*)(z) \right| \;=\; \frac{K}{r!}(1-\rho)^r \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

в яких

$$f_*(z) \;:=\; Q_{r-1}(z) + \frac{e^{i\alpha}K}{r!}\, z^r,$$

α — довільне дійсне число і Q_{r-1} — будь-який алгебраїчний многочлен степеня $r-1$.

У випадку, коли $r = 0$, твердження теореми 1 набирає вигляду

$$f \in H_p \operatorname{Lip}\alpha \Leftrightarrow \| f(\cdot) - f(\rho\cdot) \|_{H_p} \;=\; O\big((1-\rho)^{\alpha}\big), \quad \rho \to 1- . \tag{2}$$

Уперше твердження (2) доведено при $p = \infty$ в [1]. Для загального випадку, коли $p \geq 1$, це твердження та бібліографію можна знайти в [5, с. 111].

Розв'язок задачі про насичення методу підсумовування рядів Тейлора, породженого оператором $A_{\rho,r}$, міститься в наступному твердженні.

Теорема 2. *Нехай* $1 \leq p \leq \infty$ *і* $r \in \mathbb{N}$. *Оператор* $A_{\rho,r}$ *породжує лінійний метод підсумовування рядів Тейлора, який є насиченням в* H_p *з порядком насичення* $(1-\rho)^r$ *та класом насичення* $H_p^{r-1}\operatorname{Lip}1$.

2. Доведення. Наведемо спочатку властивості оператора $A_{\rho,r}$, які доцільно сформулювати у вигляді окремих тверджень.

Лема 1. *Нехай* $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ *і* $0 \leq \rho < 1$. *Якщо функція* $f \in H_p^r$, *то для будь-якого* $z \in \mathbb{D}$ *і майже кожного* $z \in \mathbb{T}$

$$f(z) - A_{\rho,r}(f)(z) \;=\; \frac{z^r}{(r-1)!}\int_{\rho}^{1} f^{(r)}(\zeta z)(1-\zeta)^{r-1}\, d\zeta. \tag{3}$$

При $r = 2$ рівність (3) доведено в [6] (див. також [7, с. 421]) за умови

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\operatorname{Re} f(\rho e^{i\theta}) \;=\; O\left(\frac{1}{1-\rho}\right),$$

яка, очевидно, є слабшою, ніж умова $f'' \in H_p$.

Доведення рівності (3) у випадку, коли $z \in \mathbb{D}$, є елементарним; воно ґрунтується на формулі Тейлора. Тому вважаємо, що $z \in \mathbb{T}$, а під f розуміємо граничні значення функції.

Нехай $\mathcal{M}$ — множина точок z на $\mathbb{T}$, в яких для кожного $k = 0, \ldots, r$ існують радіальні граничні значення $f^{(k)}(z) = \lim_{R\to 1-} f^{(k)}(Rz)$.

Зафіксуємо $z \in \mathcal{M}$ і розглянемо на відрізку $[\rho, 1]$ функцію $g(\zeta) := f(\zeta z)$. Згідно з теоремою Привалова – Рісса (див., наприклад, [2, с. 42]) похідні $f^{(k)}$ для кожного $k = 0, \ldots, r-1$ є неперервними в $\overline{\mathbb{D}}$ і абсолютно неперервними на $\mathbb{T}$. Далі, оскільки $f^{(r)} \in H_p$, то згідно з теоремою Фейєра – Рісса (див., наприклад, [2, с. 46])

$$\int_0^1 \left| g^{(r)}(\zeta) \right|^p d\zeta \;=\; \int_0^1 \left| f^{(r)}(\zeta z) \right|^p d\zeta \;\leq\; \pi \left\| f^{(r)} \right\|_{H_p}^p \;<\; \infty.$$

Отже, функція g є неперервною разом зі своїми похідними до порядку $r-1$ включно на відрізку $[\rho, 1]$, а її похідна r-го порядку є сумовною на $[\rho, 1)$. Ці факти дозволяють застосувати до функції g формулу Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі

$$g(1) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{g^{(k)}(\rho)}{k!}(1-\rho)^k + \frac{1}{(r-1)!}\int_{\rho}^{1} g^{(r)}(\zeta)(1-\zeta)^{r-1} d\zeta.$$

Повертаючись до функції f, з урахуванням того, що $g^{(k)}(\zeta) = z^k f^{(k)}(\zeta z)$ і $\sigma(\mathcal{M}) = 1$, звідси робимо висновок, що рівність (3) виконується в кожній точці $\mathcal{M}$, а отже, майже скрізь на $\mathbb{T}$.

У наступних двох твердженнях йдеться про комутативність оператора $A_{\rho, r}$ при різних параметрах ρ_1 і ρ_2 та про вигляд нерівності типу Бернштейна для похідних вищих порядків $A_{\rho,r}^{(r)}$.

Лема 2. *Нехай* $r \in \mathbb{N}$. *Для будь-якої функції* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ *і будь-яких* ρ_1, $\rho_2 \in [0, 1)$

$$A_{\rho_1,r}\big(A_{\rho_2,r}(f)\big) = A_{\rho_2,r}\big(A_{\rho_1,r}(f)\big).$$

Доведення. Нехай функція $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ і

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \hat{f}_\nu z^\nu, \quad \hat{f}_\nu := \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!},$$

— її ряд Тейлора. Зафіксуємо ρ_1, $\rho_2 \in [0, 2)$ і покладемо

$$\varphi_k(z) := \frac{z^k f^{(k)}(\rho_1 z)}{k!} = \sum_{\nu=k}^{\infty} \binom{\nu}{k} \hat{f}_\nu \rho_1^{\nu-k} z^\nu, \quad z \in \mathbb{D},$$

де

$$\binom{\nu}{k} := \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}.$$

Легко бачити, що для будь-якого $z \in \mathbb{D}$ і будь-якого $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\frac{z^m \varphi_k^{(m)}(\rho_2 z)}{m!} = \sum_{\nu=\max(k,m)}^{\infty} \binom{\nu}{k}\binom{\nu}{m} \hat{f}_\nu \rho_1^{\nu-k} \rho_2^{\nu-m} z^\nu.$$

На основі цієї формули та лінійності оператора $A_{\rho, r}$ для будь-якого $z \in \mathbb{D}$ маємо рівність

$$A_{\rho_2,r}\big(A_{\rho_1,r}(f)\big)(z) = A_{\rho_2,r}\left(\sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(\rho_1 \cdot)}{k!}(\cdot)^k (1-\rho_1)^k\right)(z) =$$

$$= A_{\rho_2,r}\left(\sum_{k=0}^{r-1} \varphi_k(\cdot)(1-\rho_1)^k\right)(z) = \sum_{k=0}^{r-1} A_{\rho_2,r}(\varphi_k)(z)(1-\rho_1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1}\sum_{m=0}^{r-1} \frac{z^m \varphi_k^{(m)}(\rho_2 z)}{m!}(1-\rho_2)^m (1-\rho_1)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1}\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{\nu=\max(k,m)}^{\infty} \binom{\nu}{k}\binom{\nu}{m} \hat{f}_\nu \rho_1^{\nu-k}\rho_2^{\nu-m} z^\nu (1-\rho_1)^m (1-\rho_2)^m. \tag{4}$$

Аналогічно можна довести, що і для $A_{\rho_1,r}\big(A_{\rho_2,r}(f)\big)(z)$ виконується така ж рівність, тому лема 2 є правильною.

Лема 3. *Нехай* $r \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$ *і* $\rho \in [0, 1)$. *Для будь-якої функції* $r \in H_p$

$$\left\| \frac{d^r}{dz^r} A_{\rho,r}(f)(\cdot) \right\|_{H_p} \le C_r \frac{\|f\|_{H_p}}{(1-\rho)^r},$$

де C_r *— стала, що залежить тільки від* r.

Доведення. Для $k = 0, \ldots, r-1$ маємо рівність

$$\frac{d^r}{dz^r}\Big(z^k f^{(k)}(\rho z)\Big) = \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} \frac{d^{r-\nu}}{dz^{r-\nu}} z^k \frac{d^\nu}{dz^\nu} f^{(k)}(\rho z) =$$

$$= \sum_{\nu=r-k}^{r} \binom{r}{\nu} \frac{k!}{(k-r+\nu)!} z^{k-r+\nu} f^{(k+\nu)}(\rho z)\rho^\nu.$$

Отже,

$$\left\| \frac{d^r}{dz^r} A_{\rho,r}(f)(\cdot) \right\|_{H_p} \le \sum_{k=0}^{r-1} \left\| \frac{d^r}{dz^r}\Big(z^k f^{(k)}(\rho z)\Big) \right\|_{H_p} \frac{(1-\rho)^k}{k!} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{\nu=r-k}^{r} \binom{r}{\nu} \frac{1}{(k-r+\nu)!} \left\| f^{(k+\nu)}(\rho\,\cdot) \right\|_{H_p} (1-\rho)^k. \tag{5}$$

Оцінку $\left\| f^{(k+\nu)}(\rho\,\cdot) \right\|_{H_p}$ легко отримати з формули Коші

$$\left\| f^{(k+\nu)}(\rho\,\cdot) \right\|_{H_p} \le (k+\nu)!\|f\|_{H_p} \int_{\mathbb{T}} \frac{d\sigma(w)}{|1-\overline{w}\rho z|^{k+\nu+1}} \le \frac{2(k+\nu)!\|f\|_{H_p}}{(1-\rho)^{k+\nu}}.$$

Продовжуючи далі оцінку (5), з урахуванням попередньої нерівності остаточно одержуємо

$$\left\| \frac{d^r}{dz^r} A_{\rho,r}(f)(\cdot) \right\|_{H_p} \le \|f\|_{H_p} 2 \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{\nu=r-k}^{r} \binom{r}{\nu} \frac{(k+\nu)!}{(k-r+\nu)!} \frac{1}{(1-\rho)^\nu} \le C_r \frac{\|f\|_{H_p}}{(1-\rho)^r},$$

де

$$C_r = 2 \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{\nu=r-k}^{r} \binom{r}{\nu} \frac{(k+\nu)!}{(k-r+\nu)!}.$$

У наступному твердженні йдеться про зображення оператора $A_{\rho,r}$ у вигляді лінійного методу підсумовування рядів Тейлора і, відтак, у вигляді згортки з ядром методу.

Лема 4. *Нехай* $r \in \mathbb{N}$, $0 \le \rho < 1$ *і функція* $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$. *Тоді*

$$A_{\rho,r}(f)(z) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \hat{f}_\nu z^\nu + \sum_{\nu=r}^{\infty} \lambda_{\nu,r}(\rho) \hat{f}_\nu z^\nu \quad \forall z \in \mathbb{D}, \tag{6}$$

де

$$\lambda_{\nu,r}(\rho) := \sum_{k=0}^{r-1} \binom{\nu}{k} (1-\rho)^k \rho^{\nu-k} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(1-\rho)^k}{k!} \frac{d^k}{d\rho^k} \rho^\nu, \quad \nu = \overline{r, \infty}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Зокрема, якщо $f \in H_1$, *то для будь-якого* $z \in \mathbb{D}$

$$A_{\rho,r}(f)(z) = \int_{\mathbb{T}} f(w) K_{\rho,r}(w,z)\, d\sigma(w), \tag{7}$$

де

$$K_{\rho,r}(w,z) := \sum_{\nu=0}^{r-1} z^{\nu}\,\overline{w}^{\nu} + \sum_{\nu=r}^{\infty} \lambda_{\nu,r}(\rho) z^{\nu}\,\overline{w}^{\nu}.$$

Доведення. Зрозуміло, що достатньо довести рівність (7), з якої легко отримати (6).

Отже, з формули Коші

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} f(w) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\,\overline{w}^{\nu} \right) d\sigma(w)$$

випливає

$$A_{\rho,r}(f)(z) = \int_{\mathbb{T}} f(w) \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \zeta^k} \left(\sum_{\nu=0}^{r-1} + \sum_{\nu=r}^{\infty} \right) \zeta^{\nu}\,\overline{w}^{\nu} \Bigg|_{\zeta=\rho z} (1-\rho)^k z^k\, d\sigma(w).$$

Ця рівність з урахуванням того, що за формулою Тейлора

$$\sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \zeta^k} \left(\sum_{\nu=0}^{r-1} \zeta^{\nu}\,\overline{w}^{\nu} \right) \Bigg|_{\zeta=\rho z} (1-\rho)^k z^k = \sum_{\nu=0}^{r-1} z^{\nu}\,\overline{w}^{\nu},$$

і доводить (7).

Перейдемо тепер до доведення теорем.

***Доведення теореми* 1.** *Необхідність.* За формулою (3) для будь-якого $R \in (0,1)$, маємо рівність

$$M_p\big(R, f - A_{\rho,r+1}(f)\big) = \big\| f(R\cdot) - A_{\rho,r+1}(f)(R\cdot) \big\|_{L_p} = \frac{1}{r!} \left\| \int_{\rho}^{1} f^{(r+1)}(R\zeta\cdot)(1-\zeta)^r\, d\zeta \right\|_{L_p}.$$

Далі, оцінюючи праву частину цієї рівності за інтегральною нерівністю Мінковського, з урахуванням того, що функція $M_p(\cdot, f^{(r+1)})$ є неспадною, одержуємо

$$M_p\big(R, f - A_{\rho,r+1}(f)\big) \le \frac{1}{r!} \int_{\rho}^{1} \big\| f^{(r+1)}(R\zeta\cdot) \big\|_{L_p} (1-\zeta)^r\, d\zeta \le$$

$$\le \frac{1}{r!} \int_{\rho}^{1} M_p\big(\zeta, f^{(r+1)}\big)(1-\zeta)^r\, d\zeta. \tag{8}$$

За теоремою Гарді – Літтлвуда [8] (див., наприклад, [2, с. 78]), якщо $f \in$ $\in H_p^r \operatorname{Lip}\alpha$, то

$$C_f := \sup_{\zeta \in \mathbb{D}} \big(1 - |\zeta|\big)^{1-\alpha} M_p\big(|\zeta|, f^{(r+1)}\big) < \infty.$$

З урахуванням цього факту з оцінки (8) одержуємо співвідношення

$$\big\| f - A_{\rho,r+1}(f) \big\|_{H_p} = \sup_{0<R<1} M_p\big(R, f - A_{\rho,r+1}(f)\big) \le \frac{1}{r!} \int_{\rho}^{1} M_p(\zeta, f^{(r+1)})(1-\zeta)^r\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{r!} \int_{\rho}^{1} M_p(\zeta, f^{(r+1)})(1-\zeta)^{1-\alpha}(1-\zeta)^{r+\alpha-1}\, d\zeta \le \frac{C_f}{r!} \int_{\rho}^{1} (1-\zeta)^{r+\alpha-1}\, d\zeta =$$

$$= \frac{C_f}{r!}\frac{(1-\rho)^{r+\alpha}}{r+\alpha} \quad \forall\, \rho \in [0,1),$$

які і доводять необхідність умов теореми.

Достатність. Покладемо $\rho_n = 1 - 2^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, і $A_n(z) := A_n(f)(z) :=$ $:= A_{\rho_n, r+1}(f)(z)$. Покажемо, що

$$\left\| A_k^{(r+1)}(\rho\cdot) - A_{k-1}^{(r+1)}(\rho\cdot)\right\|_{L_p} = O(2^{k(1-\alpha)}), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, \rho \in [0,1).$$

Далі домовимось це записувати так:

$$A_k^{(r+1)}(\rho w) - A_{k-1}^{(r+1)}(\rho w) = O_p(2^{k(1-\alpha)}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, \rho \in [0,1), \quad w \in \mathbb{T}. \tag{9}$$

Справді, використовуючи леми 2, 3 та умову (1), одержуємо

$$\left\| A_k^{(r+1)}(\rho\cdot) - A_{k-1}^{(r+1)}(\rho\cdot)\right\|_{L_p} \le \left\| A_k^{(r+1)} - A_{k-1}^{(r+1)}\right\|_{H_p} =$$

$$= \left\| A_k^{(r+1)}(f - A_{k-1}(f)) - A_{k-1}^{(r+1)}(f - A_k(f))\right\|_{H_p} \le$$

$$\le \left\| A_k^{(r+1)}(f - A_{k-1}(f))\right\|_{H_p} + \left\| A_{k-1}^{(r+1)}(f - A_k(f))\right\|_{H_p} \le$$

$$\le C_1 \frac{\| f - A_{k-1}(f)\|_{H_p}}{(1-\rho_k)^{r+1}} + C_1 \frac{\| f - A_k(f)\|_{H_p}}{(1-\rho_{k-1})^{r+1}} \le$$

$$\le C_2 \frac{(1-\rho_{k-1})^{r+\alpha}}{(1-\rho_k)^{r+1}} + C_2 \frac{(1-\rho_k)^{r+\alpha}}{(1-\rho_{k-1})^{r+1}} =$$

$$= (C_2 2^r + C_2 2^{-r-1}) 2^{k(1-\alpha)} \le C_3 2^{k(1-\alpha)}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, \rho \in [0,1),$$

де C_1, C_2, C_3 — різні константи, що залежать від f і r.

Далі, за формулою Коші маємо рівність

$$f^{(r+1)}(z) - A_\rho^{(r+1)}(z) = \frac{(r+1)!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = R} \big(f(\zeta) - A_\rho(\zeta)\big) \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^{r+2}},$$

$$|z| < R, \quad 0 < R < 1,$$

з якої при $R \to 1$ випливає оцінка

$$\left\| f^{(r+1)}(\rho_N\cdot) - A_{\rho, r+1}^{(r+1)}(\rho_N\cdot)\right\|_{L_p} \le C_4 \frac{\| f - A_N(f)\|_{H_p}}{(1-\rho_N)^{r+1}} \le$$

$$\le C_5 (1-\rho_N)^{-(1-\alpha)} = C_5 2^{N(1-\alpha)},$$

тобто

$$f^{(r+1)}(\rho_N w) - A_N^{(r+1)}(\rho_N w) = O_p(2^{N(1-\alpha)}). \tag{10}$$

Тепер, підсумовуючи рівності (9), в яких покладено $\rho = \rho_N$, по k від 1 до N, $N \in \mathbb{N}$, і додаючи до них рівність (10), з урахуванням того, що $A_0(\rho_N w) =$ $= S_{r-1}(f)(\rho_N w)$, одержуємо

$$f^{(r+1)}(\rho_N w) - S_{r-1}(f)(\rho_N w) = O_p\left(\sum_{k=1}^{N} 2^{k(1-\alpha)}\right) =$$

$$= O_p(2^{N(1-\alpha)}) = O_p\left(\frac{1}{(1-\rho_N)^{1-\alpha}}\right), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Звідси, оскільки $1-\rho_N \le 1-\rho \le 2(1-\rho_N)$ для $\rho \in [\rho_{N-1}, \rho_N]$, випливає оцінка

$$M_p(\rho, f^{(r+1)}) = O\left(\frac{1}{(1-\rho)^{1-\alpha}}\right) + O(1) = O\left(\frac{1}{(1-\rho)^{1-\alpha}}\right).$$

Отже, за теоремою Гарді – Літтлвуда [1] (теорема 48) (див. також [2, с. 78]) $f^{(r)} \in H_p^0 \mathrm{Lip}\,\alpha$, тобто $f \in H_p^r \mathrm{Lip}\,\alpha$.

Доведення теореми 2. Покажемо, що множина голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій, для яких виконується співвідношення $\left\| f - A_{\rho,r}(f)\right\|_{L_p} = o\big((1-\rho)^r\big)$, $\rho \to 1-$, збігається з множиною інваріантних елементів оператора $A_{\rho,r}$, а такою, як видно з рівності (3), є множина алгебраїчних многочленів степеня не більше $r-1$.

Дійсно, згідно з (6) і (7) маємо рівність

$$\int_{\mathbb{T}} \big(f(w) - A_{\rho,r}(f)(w)\big)\overline{w}^{\nu}\, d\sigma(w) = \begin{cases} 0, & \nu = \overline{0, r-1}, \\ \left(1 - \sum\limits_{k=0}^{r-1}\binom{\nu}{k}(1-\rho)^k\rho^{\nu-k}\right)\hat{f}_\nu, & \nu = \overline{r, \infty}, \end{cases}$$

з якої випливає оцінка

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{r-1}\binom{\nu}{k}(1-\rho)^k\rho^{\nu-k}\right)\left|\hat{f}_\nu\right| \le \left\| f - A_{\rho,r}(f)\right\|_{L_p} \quad \forall\, \rho \in [0,1), \quad \nu \ge r. \tag{11}$$

Оскільки

$$\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}(1-\rho)^k\rho^{\nu-k} = ((1-\rho)+\rho)^{\nu} = 1,$$

то для всіх $\nu \ge r$ з нерівності (11) випливає

$$\left|\hat{f}_\nu\right|\binom{\nu}{r} = \left|\hat{f}_\nu\right| \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{(1-\rho)^r}\sum_{k=r}^{\nu}\binom{\nu}{k}(1-\rho)^k\rho^{\nu-k} =$$

$$= \left|\hat{f}_\nu\right| \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{(1-\rho)^r}\left(1 - \sum_{k=0}^{r-1}\binom{\nu}{k}(1-\rho)^k\rho^{\nu-k}\right) \le$$

$$\le \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{(1-\rho)^r}\left\| f - A_{\rho,r}(f)\right\|_{L_p} = 0, \quad \nu \ge r,$$

тобто функція f є алгебраїчним многочленом степеня не більше $r-1$.

Отже, оператор $A_{\rho,r}$ є насиченим з порядком насичення $(1-\rho)^r$, а згідно з теоремою 1 його клас насичення $\Phi(A_{\rho,r})$ збігається з класом $H_p^{r-1}\mathrm{Lip}\,1$.

1. *Hardy G., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II // Math. Z. – 1931. – **34**. – P. 403 – 439.
2. *Duren P.* Theory of H_p spaces. – New York: Acad. Press, 1970. – 258 p.
3. *Гаврилюк В. Т., Степанец А. И.* Вопросы насыщения линейных методов // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 3. – С. 291 – 308.
4. *Степанец А. И.* Методы теории приближений : В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
5. *Butzer P., Nessel J. R.* Fourier analysis and approximation. – Basel: Birkhäuser, 1971. – 553 p.
6. *Zygmund A.* Smooth functions // Duke Math. J. – 1945. – **12**. – P. 47 – 76.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.

Одержано 23.08.2006