УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, Д. С. Скороходов (Днепропетр. нац. ун-т)

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ПОЛУОСИ

Necessary and sufficient conditions for the existence of a function from the class S^- with prescribed values of integral norms of three successive derivatives (generally speaking, of a fractional order) are obtained.

Встановлено необхідні і достатні умови існування функції класу S^- із заданими інтегральними нормами трьох послідовних похідних (взагалі кажучи, дробового порядку).

1. Введение. Пусть G — действительная ось $\mathbb{R}$ или полуось (положительная $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ либо отрицательная $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$). Обозначим через $L_p = L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, пространство функций $x: G \to \mathbb{R}$, интегрируемых в степени p (существенно ограниченных при $p = \infty$) с обычной нормой

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_G |x(t)|^p dt\right)^{1/p}, & \text{если} \quad 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{esssup}\{|x(t)|: t \in G\}, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Пусть $L_p^r = L_p^r(G)$, $r \in \mathbb{N}$, — пространство функций $x: G \to \mathbb{R}$, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $x^{(r-1)}$ и таких, что $x^{(r)} \in L_p$. Для $1 \le p$, $s \le \infty$ положим $L_{p,s}^r = L_{p,s}^r(G) = L_s^r(G) \bigcap L_p(G)$.

Неравенства для норм промежуточных производных функций $x \in L_{p,s}^r(G)$ вида

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le K\|x\|_p^{\lambda}\left\|x^{(r)}\right\|_s^{1-\lambda} \tag{1}$$

играют важную роль во многих вопросах анализа и его приложений. Наиболее важны точные неравенства или неравенства с наименьшей возможной постоянной K.

Один из первых полных результатов в этом направлении принадлежит А. Н. Колмогорову [1] (см. также [2]): *Для любых k, $r \in \mathbb{N}$, $k < r$, и любой функции $x \in L_{\infty,\infty}^r(\mathbb{R})$ имеет место неравенство*

$$\left\|x^{(k)}\right\|_\infty \le \frac{\left\|\varphi_{r-k}\right\|_\infty}{\left\|\varphi_r\right\|_\infty^{1-k/r}}\|x\|_\infty^{1-k/r}\left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r},$$

где φ_r — r-й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$.

Общие необходимые и достаточные условия существования неравенств вида (1) получены В. Н. Габушиным [3]. Им доказана следующая теорема.

Теорема А. *Пусть* $1 \le q,\ p,\ s \le \infty$, $k,\ r \in \mathbb{N}$, $k < r$. *Для любой функции* $x \in L^r_{p,s}(G)$ *неравенство* (1) *выполняется с некоторой константой* K, *не зависящей от функции* x, *тогда и только тогда, когда*

$$\frac{r-k}{p} + \frac{k}{s} \ge \frac{r}{q},$$

и при этом $\lambda = \dfrac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}$.

Кроме вышеупомянутого неравенства Колмогорова полные решения задачи о неулучшаемых неравенствах вида (1) для $G = \mathbb{R}$ известны в таких случаях:

1) $p = q = s = 2$ (Харди, Литлвуд, Полиа [4]);
2) $p = q = s = 1$ (Стейн [5]);
3) $q = \infty$, $p = s = 2$ (Л. В. Тайков [6]).

Для $G = \mathbb{R}_+$ эти результаты таковы:

1) $p = q = s = \infty$ (Ландау [7], А. П. Маторин [8], Шенберг и Каваретта [9, 10]);
2) $p = q = s = 2$ (Ю. И. Любич [11], Н. П. Купцов [12]);
3) $q = \infty$, $p = s = 2$ (В. Н. Габушин [3]).

Отметим, что при $G = \mathbb{R}_+$ и $r > 3$ неулучшаемая константа K имеет неявный вид.

Обзор других известных результатов и дальнейшие ссылки можно найти в [13 – 15].

Обозначим через $L^{r,+}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ множество r-монотонных функций, т. е. функций $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$, у которых все производные до $(r-1)$-го порядка включительно неотрицательны. В. М. Оловянишников [16] доказал следующую теорему.

Теорема В. *Пусть* $k,\ r \in \mathbb{N}$, $k < r$. *Тогда для любой функции* $x \in L^{r,+}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_-)$ *выполнено неравенство*

$$\left\| x^{(k)} \right\|_\infty \le \frac{(r!)^{1-k/r}}{(r-k)!} \| x \|_\infty^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{k/r}.$$

В дальнейшем результат В. М. Оловянишникова обобщался в разных направлениях (см., например, [17 – 19]). Так, в [19] было доказано, что для любых $1 \le p,\ q \le \infty$, $k,\ r \in \mathbb{N}$, $k < r$, и любой функции $x \in L^{r,+}_{p,\infty}(\mathbb{R}_-)$ выполняется неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{(r!)^{\frac{k+1/p-1/q}{r+1/p}} (rq+1)^{\frac{k+1/p-1/q}{p(r+1/p)}}}{(r-k)!\,((r-k)q+1)^{1/q}} \| x \|_p^{\frac{r-k+1/q}{r+1/p}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{k+1/p-1/q}{r+1/p}}.$$

В [20] точное неравенство типа Колмогорова было доказано для класса абсолютно монотонных функций при любых $1 \le p,\ q,\ s \le \infty$ и при $k,\ r \in \mathbb{N}$, $k < r$.

Пусть класс S^- — множество, состоящее из аналитических функций $x(z)$, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) функция $x(z)$ регулярна во всей комплексной плоскости с разрезом вдоль полуоси $(-\infty, 0)$;
2) $\dfrac{\operatorname{Im} x(z)}{\operatorname{Im} z} < 0$ при $\operatorname{Im} z \ne 0$.

В [18] было показано, что для $x \in S^-$ при всех $k < r$

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{k!}{((k+1)q-1)^{1/q}(r!)^{\frac{qk-1}{qr}}} \| x \|_\infty^{\frac{r-k+1/q}{r}} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{\frac{k-1/q}{r}},$$

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{k!}{((k+1)q-1)^{1/q}((r-1)!)^{\frac{qk-1}{q(r-1)}}} \| x \|_\infty^{\frac{r-1-k+1/q}{r-1}} \left\| x^{(r)} \right\|_1^{\frac{k-1/q}{r-1}}.$$

2. Основные определения и результаты. В данной работе будут получены точные неравенства вида (1) для функций класса S^- при всех $1 \le q, p, s \le \le \infty$ и всех $k, r \in \mathbb{R}$, $0 < k < r$.

Функции класса S^- характеризуются тем (см. [21, с. 255]), что они допускают представление

$$x(z) = \xi + \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t+z}, \tag{2}$$

где $\xi \ge 0$, а $\sigma(t)$, $0 < t < \infty$, — некоторая неубывающая функция и

$$\int_0^\infty (1+t)^{-1} d\sigma(t) < \infty.$$

Отметим, что $\left| x^{(k)}(z) \right| = k! \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{(z+t)^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $x = x(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ и $\alpha > 0$. Для $t \ge 0$ положим

$$(I^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (\tau - t)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau.$$

Теперь производная Римана – Лиувилля дробного порядка $D^\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, определяется следующим образом:

$$D^\alpha x = \frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}} \mathrm{I}^{[\alpha]-\alpha+1} x,$$

где $[z]$ — целая часть числа z.

Из определения производной дробного порядка следует, что для функции $x \in S^-$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$$\left| x^{(\alpha)}(z) \right| = \Gamma(1+\alpha) \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{(z+t)^{1+\alpha}}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Определим $L_p^\alpha = L_p^\alpha(\mathbb{R}_+)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, как пространство функций $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ таких, что $x^{(\alpha)} \in L_p$. Для $1 \le p, s \le \infty$ положим $L_{p,s}^\alpha = L_{p,s}^\alpha(\mathbb{R}_+) = L_s^\alpha(\mathbb{R}_+) \cap \cap L_p(\mathbb{R}_+)$.

Для $1 \le p, s \le \infty$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+$ положим $S_{p,s}^{\alpha,-} = S^- \cap L_{p,s}^\alpha$, $S_p^{\alpha,-} = S^- \cap L_p^\alpha$ и $S_p^- = S^- \cap L_p$. Также для любых $1 \le p, q \le \infty$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ положим $S_{p,q}^{\alpha,\beta,-} = S_p^{\alpha,-} \cap S_q^{\beta,-}$. Из представления (2) функций класса S^- видно, что $x(z) \ge \xi$ при любом $z \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $E(S^-)$ — множество функций вида $e(z) = e(C, D; z) = \dfrac{D}{z+C}$, где $C > 0$ и $D > 0$. Положим

$$K(\gamma, \alpha, \beta; p, q, s) = \frac{\left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|_q}{\left\|\varphi^{(\gamma)}\right\|_p^{\lambda}\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_s^{1-\lambda}}, \text{ где } \lambda = \frac{\beta-\alpha-1/s+1/q}{\beta-\gamma-1/s+1/p} \text{ и } \varphi\in E(S^-).$$

Покажем, что $K(\gamma, \alpha, \beta; p, q, s)$ не зависит от выбора функции φ из класса $E(S^-)$. Действительно, пусть $\varphi(z) = \dfrac{D}{z+C}$, где $D > 0$ и $C > 0$. Тогда $\left|\varphi^{(\alpha)}(z)\right| = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)D}{(z+C)^{\alpha+1}}$ и

$$\left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|_q = D\Gamma(\alpha+1)\left[\int\limits_0^{\infty}\frac{dz}{(z+C)^{(\alpha+1)q}}\right]^{1/q} = \frac{D\Gamma(\alpha+1)}{[(\alpha+1)q-1]^{1/q}C^{\alpha+1-1/q}}, \quad 1 \le q < \infty.$$

В случае $q = \infty$ получим $\left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|_\infty = \dfrac{D\Gamma(\alpha+1)}{C^{\alpha+1}}$. Поскольку $[(\alpha+1)q-1]^{1/q} \to$ $\to 1$ при $q\to\infty$, можно считать, что

$$\left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|_q = \frac{D\Gamma(\alpha+1)}{[(\alpha+1)q-1]^{1/q}C^{\alpha+1-1/q}} \quad \text{для} \quad 1 \le q \le \infty.$$

Найдем значение $K(\gamma, \alpha, \beta; p, q, s)$ для функции $\varphi(z)$:

$$K(\gamma, \alpha, \beta; p, q, s) = \frac{\left\|\varphi^{(\alpha)}\right\|_q}{\left\|\varphi^{(\gamma)}\right\|_p^{\lambda}\left\|\varphi^{(\beta)}\right\|_s^{1-\lambda}} =$$

$$= \frac{\dfrac{D\Gamma(\alpha+1)}{[(\alpha+1)q-1]^{1/q}C^{\alpha+1-1/q}}}{\left\{\dfrac{D\Gamma(\gamma+1)}{[(\gamma+1)p-1]^{1/p}C^{\gamma+1-1/p}}\right\}^{\lambda}\left\{\dfrac{D\Gamma(\beta+1)}{[(\beta+1)s-1]^{1/s}C^{\beta+1-1/s}}\right\}^{1-\lambda}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{[(\alpha+1)q-1]^{1/q}}}{\left\{\dfrac{\Gamma(\gamma+1)}{[(\gamma+1)p-1]^{1/p}}\right\}^{\lambda}\left\{\dfrac{\Gamma(\beta+1)}{[(\beta+1)s-1]^{1/s}}\right\}^{1-\lambda}}\cdot\frac{\dfrac{D}{C^{\alpha+1-1/q}}}{\left\{\dfrac{D}{C^{\gamma+1-1/p}}\right\}^{\lambda}\left\{\dfrac{D}{C^{\beta+1-1/s}}\right\}^{1-\lambda}}.$$

Так как $C^{(\gamma+1-1/p)\lambda+(\beta+1-1/s)(1-\lambda)-(\alpha+1-1/q)} = 1$, то

$$K(\gamma, \alpha, \beta; p, q, s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)[(\gamma+1)p-1]^{1/p}[(\beta+1)s-1]^{1/s}}{[\Gamma(\gamma+1)]^{\lambda}[\Gamma(\beta+1)]^{1-\lambda}[(\alpha+1)q-1]^{1/q}}.$$

Таким образом, мы показали, что $K(\gamma, \alpha, \beta; p, q, s)$ не зависит от выбора функции $\varphi\in E(S^-)$.

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Для любых чисел* $\alpha, \gamma, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\gamma \le \alpha - 1/q \le \beta$ *и* $\gamma < \beta$, $1 \le$ $\le q \le \infty$ *и любой функции* $x \in S_{\infty,\infty}^{\gamma,\beta,-}$ *выполняется неравенство*

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_q \le K(\gamma, \alpha, \beta; \infty, q, \infty)\left\|x^{(\gamma)}\right\|_\infty^{\frac{\beta-\alpha+1/q}{\beta-\gamma}}\left\|x^{(\beta)}\right\|_\infty^{\frac{\alpha-\gamma-1/q}{\beta-\gamma}}. \tag{3}$$

Неравенство (3) *обращается в равенство для любой функции* $x \in E(S^{-})$.

Неравенство (3) — это обобщение неравенства, полученного в [18]. Эта теорема используется при доказательстве следующей общей теоремы.

Теорема 2. *Для любой функции* $x \in S^{\beta,-}_{p,s}$, *где*

$$\alpha \ \geq\ 1/q \ +\ \max\left\{1,\ \frac{\alpha+1-1/q}{p}+\frac{1}{(\beta+1)s-1}\right\}, \qquad (\alpha+1-1/q)(1-1/p)\ \leq\ \beta,$$

$1 \leq q,\ s \leq \infty$ *и* $\alpha+2-1/q \leq p \leq \infty$, *выполняется неравенство*

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_q \ \leq\ K(0,\alpha,\beta;p,q,s)\,\|x\|_p^{\frac{\beta-\alpha-1/s+1/q}{\beta-1/s+1/p}}\,\left\|x^{(\beta)}\right\|_s^{\frac{\alpha+1/p-1/q}{\beta-1/s+1/p}}. \tag{4}$$

Неравенство (4) *обращается в равенство для любой функции* $x \in E(S^{-})$.

Известная задача Колмогорова (см., например, [1, 2]) о существовании функций, имеющих заданные значения норм последовательных производных, формулируется так. Пусть $i = 1, 2, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$. Для заданных чисел M_{ν_i,p_i}, $1 \leq p_i \leq \infty$, $0 \leq \nu_1 < \ldots < \nu_m \leq r$, $r \in \mathbb{N}$, и для некоторого класса X гладких функций найти необходимые и достаточные условия существования функции $x \in X$ такой, что $\left\|x^{(\nu_i)}\right\|_{p_i} = M_{\nu_i,p_i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Мы приведем решение этой задачи для $X = S^{\beta,-}_{p,s}$ и $m = 3$.

Теорема 3. *Пусть параметры* α, β, p, q *и* s *удовлетворяют условиям* $1 \leq q,\ s \leq \infty$,

$$\alpha \ \geq\ 1/q \ +\ \max\left\{1,\ \frac{\alpha+1-1/q}{p}+\frac{1}{(\beta+1)s-1}\right\}, \qquad (\alpha+1-1/q)(1-1/p)\ \leq\ \beta,$$

и $\alpha+2-1/q \leq p \leq \infty$. *Тогда для любых трех положительных чисел* $M_{0,p}$, $M_{\alpha,q}$, $M_{\beta,s}$ *существует функция* $x \in S^{\beta,-}_{p,s}$ *такая, что*

$$\|x\|_p = M_{0,p}, \qquad \left\|x^{(\alpha)}\right\|_q = M_{\alpha,q}, \qquad \left\|x^{(\beta)}\right\|_s = M_{\beta,s}$$

тогда и только тогда, когда

$$M_{\alpha,q} \ \leq\ K(0,\alpha,\beta;p,q,s)\,M_{0,p}^{\lambda}\,M_{\beta,s}^{1-\lambda}, \tag{5}$$

где $\lambda = \dfrac{\beta-\alpha-1/s+1/q}{\beta-1/s+1/p}$.

Отметим, что теорема 2 показывает, что условие (5) является необходимым в теореме 3.

3. Доказательство неравенств типа Колмогорова для функций из класса S^{-} и следствия из них.

Лемма. *Пусть функция* $x \in S^{-}$ *и* $\alpha,\gamma,\beta \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \gamma \leq \alpha \leq \beta$, $\beta > \gamma$. *Тогда при любом* $z \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ *имеет место неравенство*

$$\left|x^{(\alpha)}(z)\right| \ \leq\ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\Gamma(\gamma+1))^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}}\,(\Gamma(\beta+1))^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}}\left|x^{(\gamma)}(z)\right|^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}}\left|x^{(\beta)}(z)\right|^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}.$$

Доказательство. Действительно, при любом $z \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, используя неравенство Гельдера с показателями $\dfrac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}$ и $\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}$, получаем

$$\left|x^{(\alpha)}(z)\right| = \Gamma(\alpha+1)\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{(z+t)^{\alpha+1}} = \Gamma(\alpha+1)\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{(z+t)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}(\gamma+1)}(z+t)^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}(\beta+1)}} \le$$

$$\le \Gamma(\alpha+1)\left(\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{(z+t)^{\gamma+1}}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}}\left(\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{(z+t)^{\beta+1}}\right)^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\Gamma(\gamma+1)\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}}\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}}\left|x^{(\gamma)}(z)\right|^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}}\left|x^{(\beta)}(z)\right|^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}.$$

Таким образом, мы получили требуемое неравенство.

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть $K = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\left((\alpha+1)q-1\right)^{1/q}}$. Воспользуемся обобщенным неравенством Минковского и далее неравенством Гельдера с показателями $\dfrac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha+1/q}$ и $\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma-1/q}$:

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_q = \left\|\int_0^\infty \frac{\Gamma(\alpha+1)d\sigma(t)}{((\cdot)+t)^{\alpha+1}}\right\|_q \le \Gamma(\alpha+1)\int_0^\infty \left\|\frac{1}{((\cdot)+t)^{\alpha+1}}\right\|_q d\sigma(t) =$$

$$= \Gamma(\alpha+1)\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{dz}{(z+t)^{(\alpha+1)q}}\right)^{1/q} d\sigma(t) = K\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t^{\alpha+1-1/q}} =$$

$$= K\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t^{\frac{(\beta-\alpha+1/q)(\gamma+1)}{\beta-\gamma}}\, t^{\frac{(\alpha-\gamma-1/q)(\beta+1)}{\beta-\gamma}}} \le K\left(\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t^{\gamma+1}}\right)^{\frac{\beta-\alpha+1/q}{\beta-\gamma}}\left(\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t^{\beta+1}}\right)^{\frac{\alpha-\gamma-1/q}{\beta-\gamma}}.$$

Отметим, что для функции $x \in S_\infty^{\alpha,-}$ значение нормы производной порядка α, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, есть $\left\|x^{(\alpha)}\right\|_\infty = \Gamma(\alpha+1)\int_0^\infty \dfrac{d\sigma(t)}{t^{\alpha+1}}$. Таким образом, мы получаем требуемое неравенство

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_q \le \frac{K}{(\Gamma(\gamma+1))^{\frac{\beta-\alpha+1/q}{\beta-\gamma}}(\Gamma(\beta+1))^{\frac{\alpha-\gamma-1/q}{\beta-\gamma}}}\left\|x^{(\gamma)}\right\|_\infty^{\frac{\beta-\alpha+1/q}{\beta-\gamma}}\left\|x^{(\beta)}\right\|_\infty^{\frac{\alpha-\gamma-1/q}{\beta-\gamma}}.$$

***Следствие* 1.** *Для любой функции* $x \in S_\infty^{\alpha-1/q,-}$, *где* $\alpha \ge 1/q$ *и* $1 \le q \le \infty$, *выполняется неравенство*

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_q \le ((\alpha+1)q+1)^{-1/q}\left\|x^{(\alpha-1/q)}\right\|_\infty.$$

Неравенство обращается в равенство для любой функции $x \in E(S^-)$.

Теорема 4. *Для любой функции* $x \in S^{\gamma,\beta,-}_{\frac{\alpha+1}{\gamma+1}p,\frac{\alpha+1}{\beta+1}p}$, *где* $0 \le \gamma \le \alpha \le \beta$ *и* $1 \le p \le \infty$, *выполняется неравенство*

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_p \le K\left(\gamma,\alpha,\beta;\frac{\alpha+1}{\gamma+1}p,q,\frac{\alpha+1}{\beta+1}p\right)\left\|x^{(\gamma)}\right\|_{\frac{\alpha+1}{\gamma+1}p}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}}\left\|x^{(\beta)}\right\|_{\frac{\alpha+1}{\beta+1}p}^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}. \qquad (6)$$

Неравенство (6) *обращается в равенство для любой функции* $x \in E(S^-)$.

Доказательство. Для краткости обозначим

$$K = K\left(\gamma, \alpha, \beta; \frac{\alpha+1}{\gamma+1}p, q, \frac{\alpha+1}{\beta+1}p\right) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\Gamma(\gamma+1)\right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}}\left(\Gamma(\beta+1)\right)^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}}.$$

Используя лемму и неравенство Гельдера с показателями $\dfrac{(\alpha+1)(\beta-\gamma)}{(\gamma+1)(\beta-\alpha)}$ и $\dfrac{(\alpha+1)(\beta-\gamma)}{(\beta+1)(\alpha-\gamma)}$, имеем

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_p^p = \int_0^\infty \left|x^{(\alpha)}(z)\right|^p dz \le \int_0^\infty \left[K\left|x^{(\gamma)}(z)\right|^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}}\left|x^{(\beta)}(z)\right|^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}\right]^p dz \le$$

$$\le K^p \int_0^\infty \left|x^{(\gamma)}(z)\right|^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}p}\left|x^{(\beta)}(z)\right|^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}p} dz \le$$

$$\le K^p \left(\int_0^\infty \left|x^{(\gamma)}(z)\right|^{\frac{\alpha+1}{\gamma+1}p} dz\right)^{\frac{(\gamma+1)(\beta-\alpha)}{(\alpha+1)(\beta-\gamma)}} \left(\int_0^\infty \left|x^{(\beta)}(z)\right|^{\frac{\alpha+1}{\beta+1}p} dz\right)^{\frac{(\beta+1)(\alpha-\gamma)}{(\alpha+1)(\beta-\gamma)}} =$$

$$= K^p \left\|x^{(\gamma)}\right\|_{\frac{\alpha+1}{\gamma+1}p}^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}p} \left\|x^{(\beta)}\right\|_{\frac{\alpha+1}{\beta+1}p}^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}p}.$$

Таким образом, мы получили неравенство (6).

Теорема 5. *Для любой функции* $x \in S^{\gamma,\beta,-}_{\frac{\alpha+1+1/p}{\gamma+1}p,\,\frac{\alpha+1+1/p}{\beta+1}p}$, *где* $0 \le \gamma \le \alpha \le \le \beta - 1$ *и* $\dfrac{\beta}{\alpha+1} \le p \le \infty$, *выполняется неравенство*

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_\infty \le K\left(\gamma, \alpha, \beta; \frac{\alpha+1+1/p}{\gamma+1}p, \infty, \frac{\alpha+1+1/p}{\beta+1}p\right)\left\|x^{(\gamma)}\right\|_{\frac{\alpha+1+1/p}{\gamma+1}p}^{\frac{\beta-\alpha-1/p}{\beta-\gamma}} \left\|x^{(\beta)}\right\|_{\frac{\alpha+1+1/p}{\beta+1}p}^{\frac{\alpha-\gamma+1/p}{\beta-\gamma}}. \tag{7}$$

Неравенство (7) *обращается в равенство для любой функции* $x \in E(S^-)$.

Доказательство. Поскольку любая функция x из класса S^- является убывающей вместе со своими производными, то $\left\|x^{(\alpha)}\right\|_\infty = x^{(\alpha)}(0)$. Также $x^{(\alpha)}(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Поэтому имеют место соотношения

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_\infty^p = \left|x^{(\alpha)}(0)\right|^p = \left|\int_0^\infty d\left(x^{(\alpha)}(z)\right)^p\right| = p\int_0^\infty \left|x^{(\alpha)}(z)\right|^{p-1}\left|x^{(\alpha+1)}(z)\right| dz.$$

Используя неравенство Гельдера для показателей $\dfrac{p\alpha+p+1}{p\alpha+p-\alpha-1}$ и $\dfrac{p\alpha+p+1}{\alpha+2}$, а также неравенство (6), получаем

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_\infty^p \le p\left(\int_0^\infty \left|x^{(\alpha)}(z)\right|^{\frac{p\alpha+p+1}{\alpha+1}} dz\right)^{\frac{(\alpha+1)(p-1)}{p\alpha+p+1}} \left(\int_0^\infty \left|x^{(\alpha+1)}(z)\right|^{\frac{p\alpha+p+1}{\alpha+2}} dz\right)^{\frac{\alpha+2}{p\alpha+p+1}} =$$

$$= p\left\|x^{(\alpha)}\right\|^{p-1}_{\frac{p\alpha+p+1}{\alpha+1}}\left\|x^{(\alpha+1)}\right\|_{\frac{p\alpha+p+1}{\alpha+2}} \le p\cdot K^{p-1}\left(\gamma,\alpha,\beta;\ \frac{\alpha+1}{\gamma+1}p, q, \frac{\alpha+1}{\beta+1}p\right)\times$$

$$\times K\left(\gamma,\alpha+1,\beta;\ \frac{\alpha+2}{\gamma+1}p, q, \frac{\alpha+2}{\beta+1}p\right)\left\|x^{(\gamma)}\right\|^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}(p-1)+\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\gamma}}_{\frac{p\alpha+p+1}{\gamma+1}}\left\|x^{(\beta)}\right\|^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}(p-1)+\frac{\alpha-\gamma-1}{\beta-\gamma}}_{\frac{p\alpha+p+1}{\beta+1}}.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (7).

Перепишем неравенство (7) в более наглядном виде.

Следствие 2. *Для любой функции* $x\in S^{\gamma,\beta,-}_{p,\frac{\gamma+1}{\beta+1}p}$, *где* $0\le\gamma\le\alpha\le\beta-1$ *и* $\frac{\beta+1}{\gamma+1}\le p\le\infty$, *выполняется неравенство*

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_{\infty} \le K\left(\gamma,\alpha,\beta;\ p,\infty,\frac{\gamma+1}{\beta+1}p\right)\left\|x^{(\gamma)}\right\|^{\lambda}_{p}\left\|x^{(\beta)}\right\|^{1-\lambda}_{\frac{\gamma+1}{\beta+1}p}, \tag{8}$$

где $\lambda = \dfrac{\beta-\alpha-\frac{\beta+1}{(\gamma+1)p}}{\beta-\gamma-\frac{\beta+1}{(\gamma+1)p}+\frac{1}{p}}$. *Неравенство* (8) *обращается в равенство для любой функции* $x\in E(S^-)$.

Теорема 6. *Для любой функции* $x\in S^{\gamma,\beta,-}_{p,\frac{\gamma+1}{\beta+1}p}$, *где* $0\le\gamma\le\alpha-1/q\le\beta-1$, $\frac{\beta+1}{\gamma+1}\le p\le\infty$, $1\le q\le\infty$ *и* $\gamma^2+(p-1)^2>0$, *имеет место неравенство*

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_{q} \le K\left(\gamma,\alpha,\beta;\ p,q,\frac{\gamma+1}{\beta+1}p\right)\left\|x^{(\gamma)}\right\|^{\lambda}_{p}\left\|x^{(\beta)}\right\|^{1-\lambda}_{\frac{\gamma+1}{\beta+1}p}, \tag{9}$$

где $\lambda = \dfrac{\beta-\alpha-\frac{\beta+1}{(\gamma+1)p}+\frac{1}{q}}{\beta-\gamma-\frac{\beta+1}{(\gamma+1)p}+\frac{1}{p}}$. *Неравенство* (9) *обращается в равенство для любой функции* $x\in E(S^-)$.

Доказательство. Для доказательства неравенства (9) последовательно применим неравенства (3) и (8). Неравенство (9) обращается в равенство для любой функции из $E(S^-)$, так как для функций из $E(S^-)$ в равенства обращаются неравенства (3) и (8).

Заметим, что условие $\gamma^2+(p-1)^2>0$ вытекает из того факта, что при $\gamma=0$ не существует $\int_0^\infty x^{(\gamma)}(z)dz$ для функции $x\in E(S^-)$, так как в этом случае он обратится в $\int_0^\infty \frac{D\,dz}{C+z}$.

Теорема 7. *Для любой функции* $x\in S^{\beta,-}_{(\alpha+1)q,\frac{p+1}{\beta+1}}$, *где* $\alpha\ge\max\{1, 1/p+1/q\}$, $\beta\ge\alpha+1-1/q$, $\beta\le p\le\infty$ *и* $1\le q\le\infty$, *выполняется неравенство*

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_q \le K\left(0,\alpha,\beta;\ (\alpha+1)q,q,\frac{p+1}{\beta+1}\right)\|x\|^{\lambda}_{(\alpha+1)q}\ \left\|x^{(\beta)}\right\|^{1-\lambda}_{\frac{p+1}{\beta+1}}, \tag{10}$$

где $\lambda = \dfrac{\beta-\alpha-\dfrac{\beta+1}{p+1}+\dfrac{1}{q}}{\beta-\dfrac{\beta+1}{p+1}+\dfrac{1}{(\alpha+1)q}}$. *Неравенство* (10) *обращается в равенство для любой функции* $x \in E(S^-)$.

Доказательство. В силу неравенства (9) будем иметь

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_q \le K\left(1/p,\alpha,\beta;\ p,q,\frac{p+1}{\beta+1}\right)\left\|x^{(1/p)}\right\|_p^{\frac{\beta-\alpha-\frac{\beta+1}{p+1}+\frac{1}{q}}{\beta-\frac{\beta+1}{p+1}}}\ \left\|x^{(\beta)}\right\|_{\frac{p+1}{\beta+1}}^{\frac{\alpha-\frac{1}{q}}{\beta-\frac{\beta+1}{p+1}}}.$$

Применяя для оценки $\left\|x^{(1/p)}\right\|_p$ еще раз неравенство (9) в виде

$$\left\|x^{(1/p)}\right\|_p \le K\left(0,1/p,\alpha;\ (\alpha+1)q,p,q\right)\|x\|_{(\alpha+1)q}^{\frac{\alpha-\frac{1}{q}}{\alpha-\frac{1}{q}+\frac{1}{(\alpha+1)q}}}\ \left\|x^{(\alpha)}\right\|_q^{\frac{\frac{1}{(\alpha+1)q}}{\alpha-\frac{1}{q}+\frac{1}{(\alpha+1)q}}},$$

получаем неравенство (10).

***Следствие* 3.** *Для любой функции* $x \in S^{\beta,-}_{(\alpha+1)q,s}$, *где* $\alpha \ge \max\left\{1,\dfrac{1}{(\beta+1)s-1}+\dfrac{1}{q}\right\}$, $\beta \ge \alpha+1-1/q$ *и* $1 \le q,\ s \le \infty$, *имеет место неравенство*

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_q \le K\left(0,\alpha,\beta;\ (\alpha+1)q,q,s\right)\|x\|^{\lambda}_{(\alpha+1)q}\ \left\|x^{(\beta)}\right\|^{1-\lambda}_{s}, \tag{11}$$

где $\lambda = \dfrac{\beta-\alpha-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{q}}{\beta-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{(\alpha+1)q}}$. *Неравенство* (11) *обращается в равенство для любой функции* $x \in E(S^-)$.

Теорема 8. *Для любой функции* $x \in S^{\beta,-}_{(\alpha-1/q+1)p,s}$, *где* $\alpha \ge \dfrac{1}{q} + \max\left\{1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{(\beta+1)s-1}\right\}$, $\alpha+1-1/q-1/p \le \beta$, $1+\dfrac{1}{\alpha+1-1/q} \le p \le \infty$ *и* $1 \le q,\ s \le \infty$, *выполняется неравенство*

$$\left\|x^{(\alpha)}\right\|_q \le K\left(0,\alpha,\beta;\ (\alpha-1/q+1)p,q,s\right)\|x\|^{\lambda}_{(\alpha-1/q+1)p}\ \left\|x^{(\beta)}\right\|^{1-\lambda}_{s}, \tag{12}$$

где $\lambda = \dfrac{\beta-\alpha-1/s+1/q}{\beta-1/s+1/\left(p(\alpha-1/q+1)\right)}$. *Неравенство* (12) *обращается в равенство для любой функции* $x \in E(S^-)$.

Доказательство. В силу неравенства (9) для чисел γ, α, $\beta = \omega$ и норм p, q и $\dfrac{\gamma+1}{\omega+1}p$ имеем

$$\left\| x^{(\alpha)} \right\|_q \le K\left(\gamma, \alpha, \omega; p, q, \frac{\gamma+1}{\omega+1}p\right) \left\| x^{(\gamma)} \right\|_p^{\eta} \left\| x^{(\omega)} \right\|_{\frac{\gamma+1}{\omega+1}p}^{1-\eta},$$

где $\eta = \dfrac{\omega - \alpha - \dfrac{\omega+1}{(\gamma+1)p} + \dfrac{1}{q}}{\omega - \gamma - \dfrac{\omega+1}{(\gamma+1)p} + \dfrac{1}{p}}$. Применяя для оценки $\left\| x^{(\gamma)} \right\|_p$ неравенство (11) для чисел $\beta = \gamma,\ \beta$ и норм $(\alpha+1)p,\ p$ и s, а для оценки $\left\| x^{(\omega)} \right\|_{\frac{\gamma+1}{\omega+1}p}$ неравенство (11) для чисел $\alpha = \omega,\ \beta$ и норм $(\gamma+1)p,\ \dfrac{\gamma+1}{\omega+1}p$ и s, получаем

$$\left\| x^{(\gamma)} \right\|_p \le K\left(0, \gamma, \beta; (\gamma+1)p, p, s\right) \| x \|_{(\gamma+1)p}^{\mu} \left\| x^{(\beta)} \right\|_s^{1-\mu},$$

$$\left\| x^{(\omega)} \right\|_{\frac{\gamma+1}{\omega+1}p} \le K\left(0, \omega, \beta; (\gamma+1)p, \frac{\gamma+1}{\omega+1}p, s\right) \| x \|_{(\gamma+1)p}^{\tau} \left\| x^{(\beta)} \right\|_s^{1-\tau},$$

где $\mu = \dfrac{\beta - \gamma - 1/s + 1/p}{\beta - 1/s + 1/((\gamma+1)p)}$ и $\tau = \dfrac{\beta - \omega - 1/s + (\omega+1)/((\gamma+1)p)}{\beta - 1/s + 1/((\gamma+1)p)}$. Окончательно имеем

$$\left\| x^{\alpha} \right\|_q \le K\left(0, \alpha, \beta; (\gamma+1)p, q, s\right) \| x \|_{(\gamma+1)p}^{\lambda} \left\| x^{(\beta)} \right\|_s^{1-\lambda}.$$

Подставляя $\gamma = \alpha - 1/q$ и $\omega = \alpha - 1/q + 1$, получаем неравенство (12).

Заметим, что теорема 2 — это переформулировка теоремы 8 в более удобном виде.

4. Доказательство теоремы 3. Необходимость условия (5) следует из неравенства (4).

Покажем достаточность условия (5). Пусть $0 < a,\ c < \infty,\ 0 \le b < \infty$ и $\varphi_{a,b,c}(z) = \int_0^\infty \dfrac{d\sigma(t)}{z+t}$, причем

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad t \le c, \\ (at)/(bc) - a/b \quad \text{при} \quad c < t \le bc + c, \\ a \quad \text{при} \quad t > bc + c. \end{cases}$$

Производную порядка $\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}_+$, функции $\varphi_{a,b,c}(z)$ можно представить в виде

$$\varphi_{a,b,c}^{(\alpha)}(z) = \Gamma(\alpha+1) \int\limits_c^{bc+c} \frac{a\,dt}{(z+t)^{\alpha+1}} = a\Gamma(\alpha+1)c^{\alpha} \int\limits_1^{1+b} \frac{dm}{(z/c+m)^{\alpha+1}}.$$

Норма производной порядка $\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}_+$, функции $\varphi_{a,b,c}(z)$ в метрике $L_q,\ 1 \le q < \infty$, имеет вид

$$\left\| \varphi_{a,b,c}^{(\alpha)} \right\|_q = a\Gamma(\alpha+1)c^{\alpha} \left\| \int\limits_1^{1+b} \frac{dm}{((\cdot)/c+m)^{\alpha+1}} \right\|_q =$$

$$= a\Gamma(\alpha+1)c^{\alpha} \left(\int\limits_0^{\infty} \left(\int\limits_1^{1+b} \frac{dm}{((\cdot)/c+m)^{\alpha+1}} \right)^q dz \right)^{1/q} =$$

$$= a\Gamma(\alpha+1)c^{\alpha-1/q}\left(\int_0^\infty\left(\int_1^{1+b}\frac{dm}{(w+m)^{\alpha+1}}\right)^q dw\right)^{1/q} = ac^{\alpha-1/q}\left\|\varphi_{1,b,1}^{(\alpha)}\right\|_q.$$

При $q=\infty$ имеем

$$\left\|\varphi_{a,b,c}\right\|_\infty = ac\int_1^{1+b}\frac{dm}{m} = ac\ln(1+b) = ac\left\|\varphi_{1,b,1}\right\|_\infty,$$

а при $\alpha>0$

$$\left\|\varphi_{a,b,c}^{(\alpha)}\right\|_\infty = a\Gamma(\alpha+1)c^\alpha\int_1^{1+b}\frac{dm}{m^{\alpha+1}} =$$

$$= a\Gamma(\alpha+1)c^\alpha\frac{1}{\alpha}\left[1-\frac{1}{(1+b)^\alpha}\right] = ac^\alpha\left\|\varphi_{1,b,1}^{(\alpha)}\right\|_\infty.$$

Предположим, что числа $M_{0,p}$, $M_{\alpha,q}$ и $M_{\beta,s}$ положительны и удовлетворяют неравенству (5). Покажем, что найдутся такие коэффициенты $0<a,\ c<<\infty$ и $0\le b<\infty$, что выполнены равенства

$$M_{0,p} = \left\|\varphi_{a,b,c}\right\|_p = ac^{-1/p}\left\|\varphi_{1,b,1}\right\|_p, \tag{13}$$

$$M_{\alpha,q} = \left\|\varphi_{a,b,c}^{(\alpha)}\right\|_q = ac^{\alpha-1/q}\left\|\varphi_{1,b,1}^{(\alpha)}\right\|_q, \tag{14}$$

$$M_{\beta,s} = \left\|\varphi_{a,b,c}^{(\beta)}\right\|_s = ac^{\beta-1/s}\left\|\varphi_{1,b,1}^{(\beta)}\right\|_s. \tag{15}$$

Из равенств (13)–(15) мы можем исключить коэффициент a:

$$\frac{M_{\alpha,q}}{M_{0,p}} = T_\alpha(b,c) = \frac{c^{\alpha-1/q+1/p}\left\|\varphi_{1,b,1}^{(\alpha)}\right\|_q}{\left\|\varphi_{1,b,1}\right\|_p}, \tag{16}$$

$$\frac{M_{\beta,s}}{M_{0,p}} = T_\beta(b,c) = \frac{c^{\beta-1/s+1/p}\left\|\varphi_{1,b,1}^{(\beta)}\right\|_s}{\left\|\varphi_{1,b,1}\right\|_p}. \tag{17}$$

Таким образом, если мы найдем коэффициенты $0<c<\infty$ и $0\le b<\infty$, удовлетворяющие равенствам (16) и (7), то, положив $a := \dfrac{M_{\alpha,q}c^{1/p}}{T_\alpha\left\|\varphi_{1,b,1}\right\|_p} = \dfrac{M_{\beta,s}c^{1/p}}{T_\beta\left\|\varphi_{1,b,1}\right\|_p} > 0$, найдем коэффициенты a, b и c, удовлетворяющие равенствам (13) – (15). Заметим, что из равенств (16) и (17) исключается также коэффициент c:

$$\frac{M_{\alpha,q}}{M_{0,p}}\left(\frac{M_{0,p}}{M_{\beta,s}}\right)^{\frac{\alpha-1/q+1/p}{\beta-1/s+1/p}} = \frac{M_{\alpha,q}}{M_{0,p}^\lambda M_{\beta,s}^{1-\lambda}} = \frac{\left\|\varphi_{1,b,1}^{(\alpha)}\right\|_q}{\left\|\varphi_{1,b,1}\right\|_p^\lambda\left\|\varphi_{1,b,1}^{(\beta)}\right\|_s^{1-\lambda}}. \tag{18}$$

Рассмотрим функцию $F(b) = \dfrac{\left\|\varphi_{1,b,1}^{(\alpha)}\right\|_q}{\left\|\varphi_{1,b,1}\right\|_p^\lambda\left\|\varphi_{1,b,1}^{(\beta)}\right\|_s^{1-\lambda}}$. В случае, если мы найдем коэффициент b, $0\le b<\infty$, удовлетворяющий равенству (18), мы сразу же найдем коэффициенты a и c, $0 < a$, $c < \infty$, удовлетворяющие равенствам (13) – (15), положив

$$a = \frac{M_{\alpha,q} c^{1/p}}{T_\alpha \left\| \varphi_{1,b,1} \right\|_p} = \frac{M_{\beta,s} c^{1/p}}{T_\beta \left\| \varphi_{1,b,1} \right\|_p} > 0, \quad c = \left[F(b) \left(\frac{M_{\beta,s}}{M_{0,p}} \right)^{1-\lambda} \frac{\left\| \varphi_{1,b,1} \right\|_p}{\left\| \varphi_{1,b,1}^{(\alpha)} \right\|_q} \right]^{\frac{1}{\alpha - 1/q + 1/p}}.$$

В силу неравенства (5) $0 < F(b) \le K(0, \alpha, \beta; p, q, s)$. В случае, когда $\dfrac{M_{\alpha,q}}{M_{0,p}^{\lambda} M_{\beta,s}^{1-\lambda}} = K(0, \alpha, \beta; p, q, s)$, возьмем $b = 0$. Для такого выбора коэффициента b функция $\varphi_{1,b,1}$ принадлежит классу $E(S^-)$, а для функций из этого класса неравенство (4) обращается в равенство, следовательно, $F(0) = K(0, \alpha, \beta; p, q, s) = \dfrac{M_{\alpha,q}}{M_{0,p}^{\lambda} M_{\beta,s}^{1-\lambda}}$.

Пусть теперь неравенство (5) строгое. Обозначим $\xi = \dfrac{M_{\alpha,q}}{M_{0,p}^{\lambda} M_{\beta,s}^{1-\lambda}}$. Тогда $0 < \xi < K(0, \alpha, \beta; p, q, s)$ и при этом ξ — фиксированная величина. Покажем, что $F(b)$ принимает все значения из интервала $(0, K(0, \alpha, \beta; p, q, s))$, если b пробегает $(0, \infty)$. Для этого отметим, что функция $F(b) = \dfrac{\left\| \varphi_{1,b,1}^{(\alpha)} \right\|_q}{\left\| \varphi_{1,b,1} \right\|_p^{\lambda} \left\| \varphi_{1,b,1}^{(\beta)} \right\|_s^{1-\lambda}}$ непрерывно зависит от b, $b \in (0, \infty)$. Кроме того, покажем, что $F(b) \to K(0, \alpha, \beta; p, q, s)$ при $b \to 0$ и $F(b) \to 0$ при $b \to \infty$.

Подробное доказательство этих фактов мы приведем для $1 \le p, q, s < \infty$. В случае, когда некоторые (или все) из параметров p, q, s равны ∞, в приведенные ниже выкладки надо внести несложные изменения, учитывающие специфику явного вида $\left\| \varphi_{1,b,1} \right\|_\infty$ и $\left\| \varphi_{1,b,1}^{(\alpha)} \right\|_\infty$.

Функцию $F(b)$ представим в виде

$$F(b) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{[\Gamma(\beta+1)]^{\lambda}} \cdot \frac{\left(\int_0^\infty \left(\int_1^{1+b} \frac{dm}{(w+m)^{\alpha+1}} \right)^q dw \right)^{1/q}}{\left(\int_0^\infty \left(\int_1^{1+b} \frac{dm}{w+m} \right)^p dw \right)^{\lambda/p} \left(\int_0^\infty \left(\int_1^{1+b} \frac{dm}{(w+m)^{\beta+1}} \right)^s dw \right)^{(1-\lambda)/s}} =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{[\Gamma(\beta+1)]^{\lambda}} \cdot \frac{\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{b} \int_1^{1+b} \frac{dm}{(w+m)^{\alpha+1}} \right)^q dw \right)^{1/q}}{\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{b} \int_1^{1+b} \frac{dm}{w+m} \right)^p dw \right)^{\lambda/p} \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{b} \int_1^{1+b} \frac{dm}{(w+m)^{\beta+1}} \right)^s dw \right)^{(1-\lambda)/s}}.$$

Учитывая, что при $b \to 0$

$$\frac{1}{b} \int_1^{1+b} \frac{dm}{(w+m)^{\alpha+1}} \to \frac{1}{(w+m)^{\alpha+1}},$$

получаем

$$F(b) \to \frac{\Gamma(\alpha+1)}{[\Gamma(\beta+1)]^{\lambda}} \times$$

$$\times \frac{\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{(1+w)^{\alpha+1}}\right)^q dw\right)^{1/q}}{\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{1+w}\right)^p dw\right)^{\lambda/p} \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{(1+w)^{\beta+1}}\right)^s dw\right)^{(1-\lambda)/s}} = K(0, \alpha, \beta; p, q, s)$$

при $b \to 0$.

Покажем, что $F(b) \to 0$ при $b \to \infty$. Отметим, что для всех $b > 1$

$$A(\alpha, q) := \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_1^2 \frac{dm}{(w+m)^{\alpha+1}}\right)^q dw\right)^{1/q} \le \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_1^{1+b} \frac{dm}{(w+m)^{\alpha+1}}\right)^q dw\right)^{1/q} \le$$

$$\le \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_1^\infty \frac{dm}{(w+m)^{\alpha+1}}\right)^q dw\right)^{1/q} =: B(\alpha, q).$$

При этом числа $A(\alpha, q)$ и $B(\alpha, q)$ положительны и не зависят от b. Следовательно, для всех $b > 2$

$$\frac{[\Gamma(\beta+1)]^{\lambda}}{\Gamma(\alpha+1)} F(b) \le \frac{B(\alpha, q)}{[A(\beta, s)]^{1-\lambda}} \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_1^{1+b} \frac{dm}{w+m}\right)^p dw\right)^{-\lambda/p} =$$

$$= \frac{B(\alpha,q)}{[A(\beta,s)]^{1-\lambda}} \left(\int\limits_0^\infty \ln^p\left(1+\frac{b}{w+1}\right) dw\right)^{-\lambda/p} \le \frac{B(\alpha,q)}{[A(\beta,s)]^{1-\lambda}} \left(\int\limits_0^{-1+b/2} \ln^p\left(1+\frac{b}{w+1}\right) dw\right)^{-\lambda/p} \le$$

$$\le \frac{B(\alpha, q)}{[A(\beta, s)]^{1-\lambda}} \left(\int\limits_0^{-1+b/2} \ln^p 3\, dw\right)^{-\lambda/p} \le \frac{B(\alpha, q)}{[A(\beta, s)]^{1-\lambda}} (\ln 3)^{-\lambda} \left(\int\limits_0^{-1+b/2} dw\right)^{-\lambda/p} =$$

$$= \frac{B(\alpha, q)(\ln 3)^{-\lambda}}{[A(\beta, s)]^{1-\lambda} (b/2-1)^{\lambda/p}}.$$

Третий знак неравенства в приведенной выше цепочке неравенств имеет место, так как при $w \le -1 + b/2$ выполнено соотношение $1 + \frac{b}{w+1} \ge 3$.

Ясно, что $\frac{B}{A^{1-\lambda}(b/2-1)^{\lambda/p}} \to 0$ при $b \to \infty$. Поскольку $0 < F(b) \le$ $\le \frac{B}{A^{1-\lambda}(b/2-1)^{\lambda/p}}$, то $F(b) \to 0$ при $b \to \infty$.

Таким образом, мы показали, что $F(b) \to K(0, \alpha, \beta; p, q, s)$ при $b \to 0$ и $F(b) \to 0$ при $b \to \infty$. Функция $F(b)$ непрерывна, поэтому она принимает все значения из интервала $(0, K(0, \alpha, \beta; p, q, s))$, когда $0 < b < \infty$. Следовательно, существует b_0, $0 < b_0 < \infty$, такое, что $F(b_0) = \xi$.

Как было отмечено выше, из доказанного следует, что существуют коэффициенты $0 < a$, $c < \infty$ и $0 \le b < \infty$, удовлетворяющие уравнениям (13) – (15). Значит, найдется функция $x \in S_{p,s}^{\beta,-}$ такая, что $\|x\|_p = M_{0,p}$, $\left\|x^{(\alpha)}\right\|_q = M_{\alpha,q}$, $\left\|x^{(\beta)}\right\|_s = M_{\beta,s}$, как только выполнено неравенство (5).

Замечание. Неравенства (3), (6), (8), (9) и (11) в полном объеме не следуют из неравенства (4), поскольку условия, налагаемые на параметры неравенством (4), более сильные, чем это требуется в каждом из перечисленных неравенств. Однако отметим, что любое из неравенств (3), (6), (8), (9) при $\gamma = 0$, а также неравенство (11), как и неравенство (4), являются необходимым и достаточным условием для соответствующей задачи Колмогорова.

1. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Учен. зап. Моск. ун-та. Математика. – 1939. – **30**, кн. 3. – С. 3 – 13.
2. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. тр. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – С. 252 – 263.
3. *Габушин В. Н.* О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полупрямой // Мат. заметки. – 1976. – **6**, № 5. – С. 573 – 582.
4. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities. – Cambridge, 1934.
5. *Stein E. M.* Functions of exponential type // Ann. Math. – 1957. – **65**, № 3. – P. 582 – 592.
6. *Тайков Л. В.* Неравенства типа Колмогорова и формулы численного дифференцирования // Мат. заметки. – 1967. – **4**, № 2. – С. 223 – 238.
7. *Landau E.* Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktion // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **13**. – P. 43 – 49.
8. *Маторин А. П.* О неравенствах между максимумами абсолютных значений функций и ее производных на полуоси // Укр. мат. журн. – 1955. – **7**, № 3. – С. 262 – 266.
9. *Schoenberg I. J., Cavaretta A.* Solutions of Landau's problem, concerning higher derivatives on half-line // M.R.C. Techn. Summary Report. – 1970.
10. *Schoenberg I. J., Cavaretta A.* Solutions of Landau's problem, concerning higher derivatives on half-line // Proc. Conf. Approxim. Theory. – Varna, Sofia, 1972. – P. 297 – 308.
11. *Любич Ю. И.* О неравенствах между степенями линейных операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**. – С. 825 – 864.
12. *Купцов Н. П.* Колмогоровские оценки для производных в $L_2[0,\infty)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1975. – **138**. – С. 94 – 117.
13. *Арестов В. В.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. – 1966. – **6**. – С. 89 – 124.
14. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 592 с.
15. *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных: Комментарии к избранным трудам А. Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1985. – С. 387 – 390.
16. *Оловянишников В. М.* О неравенствах для верхних граней последовательных производных на полуоси // Успехи мат. наук. – 1951. – **642**, № 2. – С. 167 – 170.
17. *Субботин Ю. Н., Черных Н. И.* Неравенства для производных монотонных функций. – М.: МИЭТ, 2003. – С. 199 – 211.
18. *Babenko V. F., Babenko Yu. V.* About Kolmogorov type inequalities for functions defined on a half-line // Abstrs Int. Conf. „Constructive Theory of Function" (Varna 2002). – Sofia: DARBA, 2003. – P. 205 – 208.
19. *Babenko V. F., Babenko Yu. V.* Kolmogorov inequalities for multiply monotone functions defined on a half-line // East J. Approxim. – 2005. – **11**, № 2. – P. 169 – 186.
20. *Babenko V. F., Babenko Yu. V.* The Kolmogorov inequality for absolutely monotone functions on a half-line // Adv. Constr. Approxim. – 2003. – P. 63 – 74.
21. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 524 с.

Получено 24.02.2006