УДК 519.21

Д. В. Гусак (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПОВЕДІНКА КЛАСИЧНИХ ПРОЦЕСІВ РИЗИКУ ПІСЛЯ БАНКРУТСТВА ТА БАГАТОЗНАЧНА ФУНКЦІЯ БАНКРУТСТВА*

We establish relations between distributions of functionals that depend on the behavior of the classical risk process after the ruin time and the multivariate ruin function.

Установлены соотношения для распределения функционалов, связанных с поведением классического процесса риска после момента разорения, и многозначной функции разорения.

Останнім часом зріс інтерес до вивчення різних характеристик процесів ризику, пов’язаних з їх поведінкою після банкрутства. Це пояснюється тим, що після банкрутства страхова компанія може продовжити функціонування, взявши в кредит деякий капітал. Для визначення передбачуваного кредиту важливо знати розподіл характеристик класичного (резервного) процесу ризику

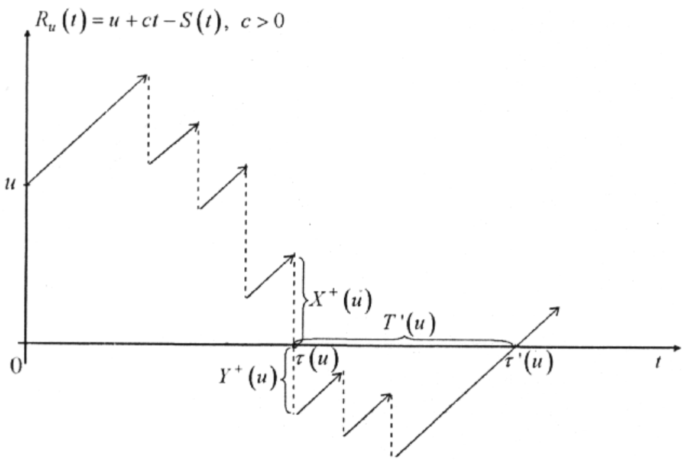
$$\xi_u(t) = R_u(t) = u + ct - S(t), \qquad S(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k, \qquad \mathrm{P}\{\nu(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

або надлишкового процесу ризику $\zeta(t) = S(t) - ct (c, \lambda, u > 0)$ з кумулянтою $k(r) = t^{-1} \ln \mathrm{E} e^{r\zeta(t)} = cr + \lambda(\mathrm{E} e^{-r\xi_1} - 1)$. Ці характеристики визначаються перестрибковими функціоналами $\{\tau^+(u), \gamma^+(u), \gamma_+(u)\}$ (їх позначення див. нижче), розподіли яких вивчались в багатьох роботах, зокрема в [1 – 4]. Розподіли згаданих функціоналів визначають також багатозначну функцію банкрутства (див. (5.1.18) в [5])

$$\phi(u, x, y) = \mathrm{P}\{\gamma^+(u) > k, \gamma_+(u) > y, \tau^+(u) < \infty\}. \tag{1}$$

Вивченню щільності дещо узагальненої багатозначної функції банкрутства та розподілу функціоналів, що описують поведінку процесів ризику після банкрутства, присвячено дану роботу. Зазначимо, що багато різних питань, пов’язаних з поведінкою процесів ризику після банкрутства, досліджувались у роботах [5 – 14].

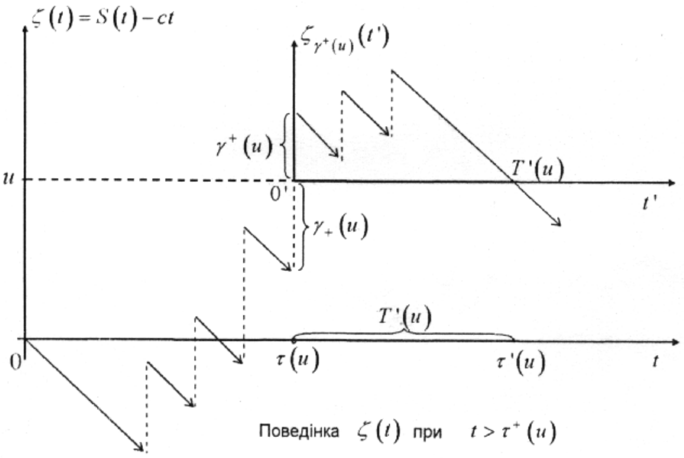
Спочатку наведемо для порівняння використані нами позначення для досліджуваних функціоналів з позначеннями в [5, 6] (їх графічні зображення наведено на рисунку):



Поведінка $R_u(t)$ при $t > \tau^+(u)$

* Виконано при частковій підтримці Deutsche Forschungsgemeinschaft.

© Д. В. ГУСАК, 2007



$$\tau(u) = \inf\{t : R_u(t) < 0\}, \qquad \tau^+(u) = \inf\{t : R_u(t) > u\},$$

$$Y^+(u) = -R_u(\tau(u)), \qquad \gamma^+(u) = \zeta(\tau^+(u)) - u,$$

$$X^+(u) = R_u(\tau(u) - 0), \qquad \gamma_+(u) = u - \zeta(\tau^+(u) - 0),$$

$$X^+(u) + Y^+(u) = R_u(\tau(u) - 0) - R_u(\tau(u)), \qquad \gamma_u^+ = \gamma^+(u) + \gamma_+(u),$$

$\tau(u) \doteq \tau^+(u)$ визначає момент банкрутства, $Y^+(u) \doteq \gamma^+(u)$ — жорсткість банкрутства, $X^+(u) \doteq \gamma_+(u)$ — значення $R_u(t)$ перед настанням банкрутства, γ_u^+ — розмір вимоги, що спричинила банкрутство, $\zeta^{\pm}(t) = \sup_{0 \le t' \le t}(\inf)\zeta(t')$ — екстремуми $\zeta(t')$ на інтервалі $[0, t]$, $\tau'(u) = \inf\{t > \tau(u), R_u(t) > 0\}$ — момент повернення $R_u(t)$ після банкрутства у півплощину $\Pi^+ = \{y > 0\}$. Позначимо ще

$$T'(u) = \begin{cases} \tau'(u) - \tau(u), & \tau(u) < \infty, \\ 0, & \tau(u) = \infty. \end{cases}$$

$T'(u)$ називається „червоним періодом”, який визначає тривалість перебування $R_u(t)$ у півплощині $\Pi^- = \{x < 0\}$,

$$Z^+(u) = \sup_{\tau^+(u) \le t < \infty} \zeta(t) = \sup_{\tau(u) \le t < \infty} \{-R_u(t)\},$$

$$Z_1^+(u) = \sup_{\tau^+(u) \le t < \tau'(u)} \zeta(t) = \sup_{\tau^+(u) \le t \le \tau'(u)} \{-R_u(t)\}.$$

$Z^+(u)$ визначає тотальний максимум дефіциту, $Z_1^+(u)$ — максимум дефіциту за період $T'(u)$.

Розглянемо щільність узагальненої багатозначної (складної) функції банкрутства

$$\varphi_s(u, dx, dy) = \mathrm{P}\{\gamma^+(u) \in dx, \gamma_+(u) \in dy, \zeta^+(\theta_s) > u\} =$$

$$= \mathrm{E}[e^{-s\tau^+(u)}, \gamma^+(u) \in dx, \gamma_+(u) \in dy, \tau^+(u) < \infty], \tag{2}$$

де θ_s — показниково розподілена випадкова величина $\mathrm{P}\{\theta_s > t\} = e^{-st}$, $s > 0$,

$t \geq 0$. Після інтегрування (2) при $s \to 0$ знаходимо саму складну функцію банкрутства

$$\phi(u, x, y) = \int_x^\infty \int_y^\infty \varphi_0(u, dx', dy'), \qquad x > 0, \qquad y > 0.$$

Інтегральне перетворення щільності (2) є генератрисою трійки $\{\tau^+(u), \gamma^+(u), \gamma_+(u)\}$:

$$\tilde{\varphi}_s(u, u_1, u_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u_1 x - u_2 y} \varphi_s(u, dx, dy) =$$

$$= \mathrm{E}[e^{-s\tau^+(u) - u_1\gamma^+(u) - u_2\gamma_+(u)}, \tau^+(u) < \infty] = V(s, u, u_1, u_2).$$

Спільна генератриса $\{\tau^+(u), \gamma^+(u), \gamma_+(u), \gamma_u^+\}$ $(\gamma^+(u) = \gamma_1(u), \gamma_+(u) = \gamma_2(u), \gamma_u^+ = \gamma_3(u))$

$$V(s, u, u_1, u_2, u_3) = \mathrm{E}[e^{-s\tau^+(u) - \sum_{k=1}^3 u_k \gamma_k(u)}, \tau^+(u) < \infty]$$

визначається співвідношенням (див. (13) в [4])

$$V(s, u, u_1, u_2, u_3) = s^{-1} \int_0^u G(s, u - y, u_1, u_2, u_3) dP_+(s, y), \tag{3}$$

$$G(s, x, u_1, u_2, u_3) = \int_{-\infty}^0 A_{x-y}(u_1, u_2, u_3) dP_-(s, y),$$

$$P_\pm(s, y) = \mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) < y\}, \qquad \pm y > 0,$$

$$A_x(u_1, u_2, u_3) = \lambda \int_x^\infty e^{(u_1 - u_2)x - (u_1 + u_3)z} dF(z), \qquad x > 0,$$

$$A_x(u_1, u_2) = A_x(u_1, u_2, 0),$$

$$F(x) = \mathrm{P}\{\xi_k < x\}, \qquad \overline{F}(x) = 1 - F(x), \qquad \overline{\overline{F}}(x) = \int_x^\infty \overline{F}(z) dz, \qquad x > 0.$$

Для неперервного знизу процесу $P_-(s, y) = e^{\rho_-(s)y}$, $y \leq 0$, $P_+(s, +0) = p_+(s) > 0$, тому

$$G(s, u, u_1, u_2) = G(s, u, u_1, u_2, 0) = \frac{\rho_-(s) e^{-u_2 u}}{\rho_-(s) - u_1 + u_2} \times$$

$$\times \int_0^\infty [(\rho_-(s) + u_2) e^{-(\rho_-(s) + u_2)z} - u_1 e^{-u_1 z}] \Pi(u + z) dz, \qquad u > 0, \tag{4}$$

$\Pi(z) = \lambda \overline{F}(z)$, $\overline{F}(z) = 1 - F(z)$, $z > 0$; $-\rho_-(s)$ — від'ємний корінь рівняння Лундберга $k(-\rho_-(s)) = s$. Після інтегрування частинами з (4) випливає

$$G(s, x, u_1, u_2) = \frac{\lambda \rho_-(s) e^{-u_2 u}}{\rho_-(s) - u_1 + u_2} \int_0^\infty [e^{-u_1 y} - e^{-(\rho_-(s) + u_2)y}] dF(u + y). \tag{5}$$

Позначимо $G_i(s, u, u_i) = G(s, u, u_1, u_2, u_3)\big|_{u_r=0\,\forall r\neq i, i=\overline{1,3}}$ і зауважимо, що $p_+(s)\rho_-(s) = sc^{-1}$.

Має місце таке твердження.

Лема 1. *Функція* $G(s, u, u_1, u_2)$ *допускає обернення по* u_1, u_2, *а функції* $G_i(s, u, u_i)$, $i = \overline{1, 3}$, *допускають обернення по* u_i *з похідною* $F'(y)$ (*існування якої або припускається, або* $F'(y)$ *вживається в сенсі Шварца*):

$$g(s, u, x, y) = \lambda\rho_-(s)e^{-\rho_-(s)(u-y)}F'(x+y)I\{y > u\}, \quad x > 0; \tag{6}$$

$$\begin{gathered} G_1(s, u, u_1) = \frac{\lambda\rho_-(s)}{\rho_-(s) - u_1}\int_0^\infty (e^{-u_1 y} - e^{-\rho_-(s)y})\,dF(u+y), \\ g_1(s, u, x) = \lambda\rho_-(s)\int_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-y)}\,dF(u+y); \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} G_2(s, u, u_2) = \lambda\rho_-(s)\int_0^\infty e^{-u_2(u+z)-\rho_-(s)z}\,\overline{F}(u+z)\,dz, \\ g_2(s, u, y) = \lambda\rho_-(s)e^{\rho_-(s)(u-y)}\overline{F}(y)I\{y > u\}; \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} G_3(s, u, u_3) = \lambda\int_u^\infty e^{-u_3 z}\,dF(z) - \lambda e^{\rho_-(s)u}\int_u^\infty e^{-u_3 z}e^{-\rho_-(s)z}\,F'(z)\,dz, \\ g_3(s, u, z) = \lambda F'(z)[1 - e^{\rho_-(s)(u-z)}]I\{z > u\}. \end{gathered} \tag{9}$$

Якщо $m = \mathrm{E}\zeta(1) = \mu\lambda - c < 0$, *то існують похідні при* $s \to 0$

$$\begin{gathered} g'(0, u, x, y) = \frac{\lambda}{|m|}F'(x+y)I\{y > u\}, \quad x > 0, \\ g_1'(0, u, x) = \frac{\lambda}{|m|}\overline{F}(u+x), \quad x > 0, \\ g_2'(0, u, y) = \frac{\lambda}{|m|}\overline{F}(y)I\{y > u\}, \\ g_3'(0, u, z) = \frac{\lambda}{|m|}F'(z)(z-u)I\{z > u\}. \end{gathered} \tag{10}$$

Доведення. Легко перевірити, що згортка

$$J(s, u, x, u_2) = \lambda\rho_-(s)e^{-u_2 u}\int_x^\infty e^{(\rho_-(s)+u_2)(x-y)}\,dF(x+y), \quad x > 0,$$

є оберненням $G(s, u, u_1, u_2)$ по u_1, яка після заміни змінних має вигляд

$$J(s, u, x, u_2) = \lambda\rho_-(s)\int_u^\infty e^{-u_2 y}e^{\rho_-(s)(u-y)}\,dF(x+y),$$

зручний для обертання по u_2, в результаті чого встановлюється (6). Аналогічно обертаються по u_i функції $G_i(s, u, u_i)$, $i = \overline{1, 3}$, і встановлюються співвідношення (7) – (9). Якщо $m < 0$, то $s^{-1}\rho_-(s) \to (|m|)^{-1}$ при $s \to 0$, тому після диференціювання по s $(s = 0)$ встановлюються співвідношення (10).

Теорема 1. *Для неперервного знизу процесу ризику генератриси* $V(s, u, u_1, u_2, u_3)$ *та* $\tilde{\varphi}_s(u, u_1, u_2)$ *визначаються співвідношеннями*

$$sV(s, u, u_1, u_2, u_3) = p_+(s)G(s, u, u_1, u_2, u_3) + \int_{0+}^{u} G(s, u-y, u_1, u_2, u_3)\,dP_+(s, y),$$
$$s\tilde{\varphi}_s(u, u_1, u_2) = p_+(s)G(s, u, u_1, u_2) + \int_{0+}^{u} G(s, u-y, u_1, u_2)\,dP_+(s, y). \tag{11}$$

Якщо $m < 0$, *то генератриса щільності багатозначної функції банкрутства має вигляд*

$$\tilde{\varphi}_0(u, u_1, u_2) = \lim_{s\to 0}\tilde{\varphi}_s(u, u_1, u_2) = \mathrm{E}[e^{-u_1\gamma^+(u)-u_2\gamma_+(u)}, \tau^+(u) < \infty] =$$
$$= p_+G'(0, u, u_1) + \int_{0+}^{u} G'(0, u-y, u_1, u_2)\,d\mathrm{P}\{\zeta^+ < y\}, \tag{12}$$

де $p_+ = \mathrm{P}\{\zeta^+ = 0\}$, $\zeta^+ = \sup\limits_{0\le t<\infty}\zeta(t)$,

$$G'(0, u, u_1, u_2) = \frac{\lambda}{|m|}\frac{e^{-u_2u}}{u_2 - u_1}\int_0^{\infty}[u_2e^{-u_2z} - u_1e^{-u_1z}]\overline{F}(u+z)\,dz.$$

Після обернення другого співвідношення в (11) *та* (12) *по* u_1 *та* u_2 *визначаються щільності* (*в диференціалах*) *складної функції банкрутства* (*при* $s > 0$ *та* $s \to 0$)

$$s\varphi_s(u, dx, dy) = \left[p_+(s)g(s, u, x, y) + \int_{0+}^{u} g(s, u-z, x, y)\,dP_+(s, z)\right]dx\,dy,$$
$$\varphi_0(u, dx, dy) = \left[p_+g'(0, u, x, y) + \int_{0+}^{u} g'(0, u-z, x, y)\,dP\{\zeta^+ < z\}\right]dx\,dy. \tag{13}$$

Для маргінальних щільностей $\{\gamma_i(x), \zeta^+(\theta_s)\}$

$$\Phi_s^{(i)}(u, x) = \frac{d}{dx}\mathrm{P}\{\gamma_i(u) < x,\ \zeta^+(\theta_s) > u\}, \quad x \ne u, \quad i = \overline{1, 3},$$

виконуються співвідношення

$$s\Phi_s^{(i)}(u, x) = p_+(s)g_i(s, u, x) + \int_{0+}^{u} g_i(s, u-z, x)\,dP_+(s, z),$$
$$\Phi_0^{(i)}(u, x) = p_+g_i'(0, u, x) + \int_{0+}^{u} g_i'(0, u-z, x)\,d\mathrm{P}\{\zeta^+ < z\}. \tag{14}$$

Доведення. Співвідношення (11) випливають з (3), оскільки $p_+(s) > 0$. При

$m < 0$ із (11) при $s \to 0$ випливає (12). Після обернення (12) одержуємо (13). Аналогічно встановлюються співвідношення (14) для маргінальних щільностей.

***Наслідок* 1.** *Для надлишкового процесу ризику $\zeta(t)$ з лінійною функцією премій $c(t) = ct$ і початковим капіталом $u > 0$ щільності (догранична при $s > 0$ та гранична при $s \to 0$) складної функції банкрутства визначаються при $y > 0$ ($y \neq u$) співвідношеннями*

$$s\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u,\ \gamma^+(u) < x,\ \gamma_+(u) < y\} =$$

$$= \begin{cases} \lambda\rho_-(s)F'(x+y)\int\limits_0^u e^{\rho_-(s)(u-y-z)}\,dP_+(s,z), & y > u, \\ \lambda\rho_-(s)F'(x+y)\int\limits_{u-y}^u e^{\rho_-(s)(u-z-y)}\,dP_+(s,z), & 0 < y < u, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\mathrm{P}\{\zeta^+ > u,\ \gamma^+(u) < x,\ \gamma_+(u) < y\} =$$

$$= \begin{cases} \lambda|m|^{-1}F'(x+y)\mathrm{P}\{\zeta^+ < u\}, & y > u, \quad m = \lambda\mu - c < 0, \\ \lambda|m|^{-1}F'(x+y)\mathrm{P}\{u - y < \zeta^+ < u\}, & 0 < y < u. \end{cases} \tag{15}$$

Для щільності розподілу жорсткості банкрутства мають місце співвідношення при $s > 0$ та $s \to 0$ $(x > 0)$

$$s\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u,\ \gamma^+(u) < x\} = \lambda c^{-1} s\int\limits_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-y)}\,dF(u+y) +$$

$$+ \lambda\rho_-(s)\int\limits_0^u\int\limits_x^\infty e^{\rho_-(s)(x-y)}\,dF(u+y-z)\,dP_+(s,z), \qquad \rho_-(s)p_+(s) = \frac{s}{c},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{P}\{\zeta^+ > u,\ \gamma^+(u) < x\} = \frac{\lambda}{c}\overline{F}(u,x) + \frac{\lambda}{|m|}\int\limits_0^u \overline{F}(u+x-z)\,d\mathrm{P}\{\zeta^+ < z\}, \qquad m < 0. \tag{16}$$

Щільність розподілу надлишку перед настанням банкрутства $\gamma_+(u)$ визначається співвідношеннями (доrраничним при $s > 0$ та граничним при $s \to 0$) при $y \neq u$

$$s\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u,\ \gamma_+(u) < y\} =$$

$$= \begin{cases} \lambda\rho_-(s)\overline{F}(y)\int\limits_{-0}^u e^{\rho_-(s)(u-y-z)}\,dP_+(s,z), & y > u, \\ \lambda\rho_-(s)\overline{F}(y)\int\limits_{u-y}^u e^{\rho_-(s)(u-y-z)}\,dP_+(s,z), & 0 < y < u, \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{P}\{\zeta^+ > u,\ \gamma_+(u) < y\} = \begin{cases} \lambda|m|^{-1}\overline{F}(y)\mathrm{P}\{\zeta^+ < u\}, & y > u, \quad m < 0, \\ \lambda|m|^{-1}\overline{F}(y)\mathrm{P}\{u - y < \zeta^+ < u\}, & 0 < y < u. \end{cases} \tag{17}$$

Розподіл вимоги γ_u^+, що спричинила банкрутство, визначається співвідношеннями $(z \neq u)$

$$s\,\frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u,\ \gamma_u^+ < z\} = p_+(s)g_3(s, u, z) + \int\limits_{0+}^{u} g_3(s, u - y, z)\,dP_+(s, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{P}\{\gamma_u^+ < z, \zeta^+ > u\} = \frac{\lambda}{|m|}\,F'(z)\int\limits_0^u (z - u + y)\,d\,\mathrm{P}\{\zeta^+ < y\}I\{z > u\} +$$

$$+\ \frac{\lambda F'(z)}{|m|}\int\limits_0^z (z + v)\,d\,\mathrm{P}\{\zeta^+ < v - u\}I\{0 < z < u\}, \qquad (18)$$

$$\mathrm{P}\{\gamma_u^+ < z_0, \zeta^+ > u\} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|m|}\displaystyle\int\limits_{z_0}^{\infty}\left[\int\limits_0^u y\,d\,\mathrm{P}\{\zeta^+ < y\} + (z-u)\mathrm{P}\{\zeta^+ < u\}\right]dF(z), & z_0 > u, \quad m < 0, \\ \dfrac{\lambda}{|m|}\left[\overline{F}(u)\displaystyle\int\limits_0^u y\,d\,\mathrm{P}\{\zeta^+ < y\} + \mathrm{P}\{\zeta^+ < u\}\overline{\overline{F}}(u)\right] + & \\ +\ \dfrac{\lambda}{|m|}\displaystyle\int\limits_{z_0}^{u}\int\limits_0^z (z + y)\,d\,\mathrm{P}\{\zeta^+ < y - u\}\,dF(z), & 0 < z_0 < u. \end{cases}$$

Інтегруванням (15) *по* $x \in [x_0, \infty)$ *встановлюються співвідношення* ($y \neq \neq u$)

$$s\,\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > u,\ \gamma^+(u) < x_0, \gamma_+(u) < y\} =$$

$$= \begin{cases} \lambda\rho_-(s)\overline{F}(x_0 + y)\displaystyle\int\limits_0^u e^{\rho_-(s)(u-y-z)}\,dP_+(s, z), & y > u, \\ \lambda\rho_-(s)\overline{F}(x_0 + y)\displaystyle\int\limits_{u-y}^{u} e^{\rho_-(s)(u-y-z)}\,dP_+(s, y), & 0 < y < u, \end{cases} \qquad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{P}\{\zeta^+ > u,\ \gamma^+(u) > x_0, \gamma_+(u) < y\} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|m|}\,\overline{F}(x_0 + y)\mathrm{P}\{\zeta^+ < u\}, & y > u, \quad m < 0, \quad x_0 > 0, \\ \dfrac{\lambda}{|m|}\,\overline{F}(x_0 + y)\mathrm{P}\{u - y < \zeta^+ < u\}, & 0 < y < u, \end{cases}$$

$$\mathrm{P}\{\zeta^+ > u,\ \gamma^+(u) > x_0, \gamma_+(u) > y_0\} = \phi(u, x_0, y_0) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|m|}\,\overline{\overline{F}}(x_0 + y_0)\mathrm{P}\{\zeta^+ < u\}, & y_0 > u, \quad m < 0, \quad x_0 > 0, \\ \dfrac{\lambda}{|m|}\,\overline{\overline{F}}(x_0 + u)\mathrm{P}\{\zeta^+ < u\} + & \\ +\ \dfrac{\lambda}{|m|}\displaystyle\int\limits_{y_0}^{u}\overline{F}(x_0 + y)\mathrm{P}\{u - y < \zeta^+ < u\}\,dy, & 0 < y_0 < u. \end{cases}$$

Доведення. Доведення наслідку випливає із співвідношень теореми 1 після підстановки значень функцій $G(s, u, u_1, u_2)$, $G_i(s, u, u_i)$, $i = \overline{1, 3}$, та їх обернень $g(s, u, u_i)$ по u_i, а також значень похідних по s при $s = 0$. При доведенні (15) слід врахувати двоїстість зображення згортки

$$\int_0^u g(s, u-z, \ldots)\,dP_+(s, z) = \int_0^u \ldots I\{z > u-y\}\,dP_+(s, z) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^u \ldots\, dP_+(s, z), & y > u, \\ \displaystyle\int_{u-y}^{y} \ldots\, dP_+(s, z), & 0 < y < u. \end{cases}$$

На підставі (7) – (9) з (14) при $i = \overline{1, 3}$ відповідно випливають співвідношення (16) – (18). В результаті інтегрування (15) по $x \in [x_0, \infty)$ та $y \in [y_0, \infty)$ отримуємо співвідношення (19). Останнє співвідношення в (18) одержуємо з другого в (18) інтегруванням по $z \in [z_0, \infty)$. Зауважимо, що останнє співвідношення в (19), одержане з попереднього інтегруванням по $y \in [y_0, \infty)$, визначає багатозначну функцію банкрутства $\phi(u, x_0, y_0)$ (див. (1)). Так само після інтегрування (16) по $x \in [0, \infty)$ та $x \in [x_0, \infty)$ одержимо відповідно співвідношення для $\phi(u, 0, 0)$ та $\phi(u, x_0, 0)$:

$$\mathrm{P}\{\zeta^+ > u\} = \frac{\lambda}{c}\,\overline{\overline{F}}(u) + \frac{\lambda}{|m|}\int_0^u \overline{\overline{F}}(u-z)\,dP_+(z), \qquad P_+(z) = \mathrm{P}\{\zeta^+ < z\},$$

$$\mathrm{P}\{\zeta^+ > u,\ \gamma^+(u) > x_0\} =$$

$$= \frac{\lambda}{c}\,\overline{\overline{F}}(u+x_0) + \frac{\lambda}{|m|}\int_0^u \overline{\overline{F}}(u+x_0-z)\,dP_+(z) \xrightarrow[x_0\to 0]{} \frac{\lambda}{c}\,\overline{\overline{F}}(u).$$

З останнього співвідношення в (19) при $x_0 = 0$ знаходимо маргінальну функцію банкрутства

$$\phi(u, 0, y_0) = \mathrm{P}\{\zeta^+ > u,\ \gamma_+(u) > y_0\} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|m|}\,\overline{\overline{F}}(y_0)P_+(u), & y_0 > u, \\ \dfrac{\lambda}{|m|}\,\overline{\overline{F}}(u)P_+(u) + \dfrac{\lambda}{|m|}\displaystyle\int_{y_0}^u \overline{F}(y)[P_+(u) - P_+(u-y)]\,dy, & 0 < y_0 < u. \end{cases}$$

Звідси при $y_0 = 0$ випливає, що $\mathrm{P}\{\gamma_+(u) > 0\} = 1$, оскільки

$$\mathrm{P}\{\gamma_+(u) > 0, \zeta^+ > u\} = \frac{\lambda}{|m|}\left[\overline{\overline{F}}(0)P_+(u) + \int_0^u P_+(u-y)\,d\overline{\overline{F}}(y)\right] =$$

$$= \frac{\lambda}{|m|}\left[p_+\overline{\overline{F}}(u) + \int_0^u \overline{\overline{F}}(u-z)\,dP_+(z)\right] = \mathrm{P}\{\zeta^+ > u, \gamma^+(u) > 0\} = \overline{P}_+(u).$$

Наслідок доведено.

Перш ніж вивчати розподіли функціоналів, пов'язаних з поведінкою процесу $\zeta(t)$ при $t > \tau^+(u)$, доведемо допоміжне твердження для процесу $\zeta_v(t) = v +$

$+\,\zeta(t)$ $(\zeta_0(t)=\zeta(t),\, v,\, t\ge 0)$ та його максимуму

$$\zeta_v^+(t) = \sup_{0\le t'\le t}\zeta_v(t), \qquad \zeta_v^+(\theta_s) = \sup_{0\le t'\le \theta_s}\zeta_v(t').$$

Введемо позначення генератрис для $\zeta_v^+(\theta_s)$ та для пари $\{\tau^+(v),\gamma^+(v)\}$:

$$\Phi(s,v,z) = \mathrm{E}e^{-z\zeta_v^+(\theta_s)},$$
$$T(s,v,z) = \mathrm{E}[e^{-s\tau^+(v)-z\gamma^+(v)},\, \tau^+(v)<\infty] = \mathrm{E}[e^{-z\gamma^+(v)},\, \zeta^+(\theta_s)>v]. \tag{20}$$

Лема 2. *Генератриса* $\Phi(s,v,z)$ *визначається співвідношеннями*

$$\Phi(s,v,z) = \Phi(s,0,z)e^{-zv}, \qquad v\ \ge\ 0,$$
$$\Phi(s,0,z) = p_+(s)\,[1-T(s,0,z)]^{-1}, \qquad p_+(s) = \mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s)=0\}\ >\ 0. \tag{21}$$

При $m<0$, $v=0$ *з* (21) *випливає співвідношення, яке ми назвемо догранич- ним узагальненням формули Полячека – Хінчина*

$$\Phi(s,0,z) = \mathrm{E}e^{-z\zeta^+(\theta_s)} = \frac{p_+(s)}{1-q_+(s)g_s(z)} \xrightarrow[s\to 0]{} \frac{p_+}{1-q_+g_0(z)}, \quad p_+ = \mathrm{P}\{\zeta^+=0\},$$
$$g_s(z) = \mathrm{E}[e^{-z\gamma^+(0)}/\zeta^+(\theta_s)>0] = \frac{G_1(s,0,z)}{G_1(s,0,0)} = \frac{\rho_-(s)-z\tilde{\Pi}(z)/\tilde{\Pi}(\rho_-(s))}{\rho_-(s)-z}. \tag{22}$$

Якщо $m<0$, *то при* $s\to 0$ (22) *зводиться до звичайної формули Поляче- ка – Хінчина з*

$$g_0(z) = \lim_{s\to 0} g_s(z) = \tilde{\Pi}(z)/\tilde{\Pi}(0), \qquad \tilde{\Pi}(z) = \lambda\int_0^\infty e^{-zx}\overline{F}(x)dx.$$

Доведення. Має місце стохастичне співвідношення

$$\zeta_v^+(t) \doteq \begin{cases} v, & t<\tau^+(0),\\ v+\zeta^+_{\gamma^+(0)}(t-\tau^+(0)), & t\ge\tau^+(0),\end{cases}$$

з якого випливає інтегральне співвідношення

$$\mathrm{E}e^{-z\zeta_v^+(\theta_s)} = e^{-zv}\mathrm{P}\{\tau^+(v)>t\} + e^{-zv}\int_0^t\int_0^\infty \mathrm{E}[e^{-z\zeta_y^+(t-x)},\, \tau^+(0)\in dx,\, \gamma^+(0)\in dy].$$

При довільному фіксованому $y>0$ процес $\zeta_y(t)$ для $t\ge\tau^+(0)$ і його максимум не залежать від $\tau^+(0)<t$, тому з одержаного інтегрального співвідношення після перетворення Лапласа – Карсона по t випливає інтегральне рівняння для $\Phi(s,v,z)$:

$$\Phi(s,v,z) = e^{-zv}(1-T(s,0,0)) + e^{-zv}\int_0^\infty \Phi(s,y,z)\mathrm{E}[e^{-s\tau^+(0)},\, \gamma^+(0)\in dy]. \tag{23}$$

Якщо позначити

$$\Phi_*(s,z) = \int_0^\infty \Phi(s,y,z)\mathrm{E}[e^{-s\tau^+(0)},\, \gamma^+(0)\in dy],$$

то після усереднення (23) по $\mathrm{E}[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma^+(0) \in dv]$ одержимо рівняння для визначення $\Phi_*(s, z)$:

$$\Phi_*(s, z) = T(s, 0, z)\big(1 - T(s, 0, 0)\big) + \Phi_*(s, z)T(s, 0, z).$$

Враховуючи, що

$$T(s, 0, 0) = \mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > 0\} = q_+(s), \quad p_+(s) = 1 - q_+(s),$$

знаходимо значення

$$\Phi_*(s, z) = p_+(s)\frac{T(s, 0, z)}{1 - T(s, 0, z)},$$

після підстановки якого в (21) одержуємо співвідношення

$$\Phi(s, v, z) = \frac{p_+(s)e^{-zv}}{1 - T(s, 0, z)}, \quad T(s, 0, z) = \mathrm{E}[e^{-z\gamma^+(0)}, \zeta^+(\theta_s) > 0],$$

з якого випливає (21) та (22).

Лему доведено.

Після банкрутства надлишковий процес ризику нагадує процес чекання $\zeta_*(t)$ з випадковим стартовим значенням $v = \gamma^+(u)$. При цьому слід врахувати, що $\gamma^+(u)$ визначається на події

$$\{\omega : \zeta^+(t) > u\} = \{\omega : \tau^+(u) < t\}.$$

Тому для досліджуваного процесу $\zeta_*(t) = \zeta_{\gamma^+(u)}(t)$ будемо розглядати спільні розподіли пар $\{\zeta^+_{\gamma^+(u)}(t), \tau^+(u)\}$, $\{\zeta^+_{\gamma^+(u)}(\theta_s), \zeta^+(\theta_s) > u\}$ або відповідну генератрису

$$\Phi^*(s, u, z) = \mathrm{E}[e^{-z\zeta^+_{\gamma^+(u)}(\theta_s)}, \zeta^+(\theta_s) > u] =$$
$$= \mathrm{E}[e^{-s\tau^+(u) - z\zeta^+_{\gamma^+(u)}(\theta_s)}, \tau^+(u) < \infty], \tag{24}$$

для якої має місце таке твердження.

Теорема 2. *Генератриси* $\zeta^+_* = \zeta^+_{\gamma^+(u)}$ *та* $Z^+(u)$ *визначаються співвідношеннями*

$$\Phi^*(s, u, z) = \Phi(s, 0, z)T(s, u, z), \quad \mathrm{E}[e^{-zZ^+(u)}, \zeta^+ > u] = e^{uz}\Phi^*(s, u, z), \tag{25}$$

де генератриса $T(s, u, z)$ *в* (20) *і відповідна щільність визначаються співвідношеннями*

$$sT(s, u, z) = p_+(s)G_1(s, u, z) + \int_{0+}^{u} G_1(s, u - y, z)\frac{\partial}{\partial y}P_+(s, y)dy,$$

(26)

$$s\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{P}\{\gamma^+(u) < x, \zeta^+(\theta_s) > u\} = p_+(s)g_1(s, u, x) + \int_{0+}^{x} g_1(s, u - y, x)\frac{\partial}{\partial y}P_+(s, y)dy,$$

а функції $G_1(s, u, z)$ *та* $g_1(s, u, x)$ *наведено в* (7).

Якщо $m = \mathrm{E}\zeta(1) = \lambda\mu - c < 0$ $(\mu = \mathrm{E}\xi_1)$, *то генератриса тотального максимуму дефіциту* $Z^+(u)$ *визначається співвідношенням*

$$\mathrm{E}[e^{-zZ^+(u)}, \zeta^+ > u] = e^{-uz}\Phi(0,0,z)T(0,u,z), \quad \Phi(0,0,z) = \frac{p_+}{1-T(0,0,z)}, \tag{27}$$

а генератриси

$$T(0,u,z) = \mathrm{E}[e^{-z\gamma^+(u)}, \zeta^+ > u], \quad T(0,0,z) = \mathrm{E}[e^{-z\gamma^+(0)}, \zeta^+ > 0]$$

визначаються співвідношеннями

$$T(0,u,z) = p_+G_1'(0,u,z) + \int_{0+}^{u} G_1'(0,u-y,z)\,d\,\mathrm{P}\{\zeta^+ < y\},$$

$$G_1'(0,u,z) = \frac{\lambda}{|m|}\int_0^\infty e^{-zy}\overline{F}(u+y)\,dy, \quad m < 0, \tag{28}$$

$$T(0,0,z) = \frac{p_+\lambda}{|m|}\int_0^\infty e^{-zy}\overline{F}(y)\,dy = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-zy}\overline{F}(y)\,dy \quad \left(p_+ = \frac{|m|}{c},\ q_+ = \frac{\lambda\mu}{c}\right).$$

Доведення. Після усереднення по $\mathrm{E}[e^{-s\tau^+(u)}, \gamma^+(u) \in dv]$ з (21) випливає співвідношення (25). Перше співвідношення в (26) легко обернути по z і одержати дограничну $(s > 0)$ щільність жорсткості банкрутства (див. другу формулу в (26)). Якщо $m < 0$, то із (25) та (26) при $s \to 0$ випливають співвідношення (27), (28). Слід відмітити, що при $m < 0$ перше співвідношення в (28) також легко обертається по z, в результаті обернення встановлюється співвідношення для граничної $(s \to 0)$ щільності жорсткості банкрутства (див. останні співвідношення в (16) та (26)).

Теорему доведено.

Перш ніж розглядати „червоний період” $T'(u)$ та число вимог за цей період, відмітимо подібність їх відповідно до періоду зайнятості $\tilde{\theta}_1$ та числа вимог $n(\tilde{\theta}_1)$ у теорії СМО. Останні є простішими хоча б тому, що вони не залежать від параметра u. Функціонал $T'(u)$ можна інтерпретувати як момент першого досягнення нуля процесом $\zeta^+_{\gamma^+(u)}(t)$ або момент першого досягнення рівня $x = -\gamma^+(u)$ процесом $\zeta(t)$. На підставі співвідношення

$$T'(u) \doteq \tau^-(-\gamma^+(u)), \quad \mathrm{E}[e^{-sT'(u)}, \ldots] = \mathrm{E}[e^{-s\tau^-(-\gamma^+(u))}, \ldots]$$

встановлюється таке твердження.

Теорема 3. *Якщо* $m < 0$, *то генератриса тривалості „червоного періоду”* $T'(u)$ *визначається співвідношенням при* $u \ge 0$

$$\mathrm{E}[e^{-sT'(u)}, T'(u) < \infty] = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-v\rho_-(s)}\overline{F}(u+v)\,dv +$$

$$+ \frac{\lambda}{|m|}\int_0^\infty e^{-v\rho_-(s)}\int_{0+}^{u}\overline{F}(u+v-y)\,d\,\mathrm{P}\{\zeta^+ < y\}\,dv. \tag{29}$$

Якщо $s \to 0$, *то*

$$\mathrm{P}\{T'(u) < \infty\} = \frac{\lambda}{c}\overline{\overline{F}}(u) + \frac{\lambda}{|m|}\int_{0+}^{u}\overline{\overline{F}}(u-y)\,d\,\mathrm{P}(\zeta^+ < y). \tag{30}$$

Щільність розподілу $T'(u)$ *(у диференціалах) має вигляд*

$$\mathrm{P}\{T'(u)\in dt\} = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \overline{F}(u+v)\mathrm{P}\{\tau^-(-v)\in dt\}dv +$$

$$+\frac{\lambda}{|m|}\int_0^\infty \mathrm{P}\{\tau^-(-v)\in dt\}\int_{0+}^u \overline{F}(u+v-y)d\,\mathrm{P}\{\zeta^+<y\}dv. \tag{31}$$

Доведення. Процес $\zeta(t)$ є напівнеперервним знизу, тому при $v>0$

$$\mathrm{P}\{\tau^-(-v)\in dt\} \Leftrightarrow \mathrm{E}[e^{-s\tau^-(-v)}, \tau^-(-v)<\infty] = e^{-v\rho_-(s)}. \tag{32}$$

Після усереднення генератриси $\mathrm{E}[e^{-s\tau^-(-\gamma^+(u))},\ldots]$ по граничній щільності в (16) при $m<0$ згідно з (32) встановлюється співвідношення (29), з якого при $s\to 0$ випливає (30). На підставі (32) генератрису (29) легко обернути по s і одержати щільність (31).

Теорему доведено.

Для визначення генератриси числа вимог за період $T'(u)$ $N^*(u)=n(T'(u))$ використаємо формулу для числа вимог $n(t)=\nu(t)$ на інтервалі $[0,t]$

$$n_t(z) = \mathrm{E}z^{n(t)} = e^{-t\lambda(1-z)}, \quad 0<z<1, \quad t>0, \tag{33}$$

і позначимо шукану генератрису

$$n^*(u,z) = \mathrm{E}[z^{N^*(u)}, T'(u)<\infty].$$

Теорема 4. *Якщо* $m<0$, *то генератриса* $n^*(u,z)$ *визначається співвідношенням*

$$n^*(u,z) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-v\rho_-(s_z)}\overline{F}(u+v)dv +$$

$$+\frac{\lambda}{|m|}\int_0^\infty e^{-v\rho_-(s_z)}\int_{0+}^u \overline{F}(u+v-y)d\,\mathrm{P}\{\zeta^+<y\}dv, \qquad s_z = \lambda(1-z),$$

$$n^*(0,z) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-v\rho_-(s_z)}\overline{F}(v)dv \qquad \left(\frac{p_+}{|m|}=\frac{1}{c}\right). \tag{34}$$

При $z\to 1$ *має місце співвідношення* (*подібне до* (30) *при* $s\to 0$)

$$\mathrm{P}\{T'(u)<\infty\} = \frac{\lambda}{c}\overline{\overline{F}}(u) + \frac{\lambda}{|m|}\int_{0+}^u \overline{\overline{F}}(u-y)d\,\mathrm{P}(\zeta^+<y), \tag{35}$$

оскільки $m=\lambda\mu-c<0$, $\rho_-(s_z)\xrightarrow[z\to 1]{}0$, *то при* $u=0$ $\mathrm{P}\{T'(0)<\infty\}=\dfrac{\lambda\mu}{c}<$ <1.

Аналогічно, генератриса числа вимог до банкрутства $n(\tau^+(u))$ *визначається співвідношенням*

$$\mathrm{E}[z^{n(\tau^+(u))}, \tau^+(u)<\infty] = \mathrm{E}[z^{-s_z\tau^+(u)}, \tau^+(u)<\infty] =$$

$$= \mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_{s_z})>u\} \xrightarrow[z\to 1]{} \mathrm{P}\{\zeta^+>u\}. \tag{36}$$

Доведення. Після усереднення (32) за щільністю (31) одержимо співвідношення

$$n^*(u,z) = \int_0^\infty e^{-t\lambda(1-z)} \mathrm{P}\{T'(u) \in dt\} =$$

$$= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{P}\{\tau^-(-v) \in dz\} e^{-t\lambda(1-z)} \overline{F}(u+v)\,dv +$$

$$+ \frac{\lambda}{|m|} \int_0^\infty \underline{\int_0^\infty e^{-t\lambda(1-z)} \mathrm{P}\{\tau^-(-v) \in dt\}} \int_0^u \overline{F}(u+v-y)\, d\,\mathrm{P}\{\zeta^+ < y\}\,dv,$$

в якому підкреслений інтеграл, згідно з (32), збігається з експонентою $e^{-v\rho_-(s_z)}\big|_{s_z=\lambda(1-z)}$ ($s_z \to 0$ при $z \to 1$). Тому з останнього співвідношення для $n^*(u,z)$ випливає (34), з якого при $u=0$ визначається генератриса $n^*(0,z)$. З (34) при $z \to 1$ випливає співвідношення (35), що збігається з (30) при $s \to 0$. Співвідношення (36) одержуємо усередненням генератриси $n(t) = \nu(t)$ за розподілом $\tau^+(u)$

$$\int_0^\infty e^{\lambda t(z-1)}\, d\,\mathrm{P}\{\tau^+(u) < t\} = \mathrm{E}[z^{-s_z\tau^+(u)}, \tau^+(u) < \infty], \qquad s_z = \lambda(z-1).$$

Якщо вимоги ξ_k мають показниковий розподіл, то

$$\Pi(x) = \lambda\overline{F}(x) = \lambda e^{-bx}, \quad x > 0, \quad b > 0,$$

$$\overline{P}_+(s,y) = \mathrm{P}\{\zeta^+(\theta_s) > y\} = q_+(s) e^{-\rho_+(s)y}, \quad y > 0,$$

$$\rho_+(s) = bp_+(s), \quad cp_+(s)\rho_-(s) = s,$$

співвідношення для $G(s,u,u_1,u_2)$ та $G_i(s,u,u_i)$, $i = \overline{1,3}$, спрощуються і їх обернення по u_i мають вигляд

$$g(s,u,x,y) = \lambda b\rho_-(s) e^{-\rho_-(s)(y-u)} I\{y > u\},$$

$$g_1(s,u,x) = \frac{\lambda b\rho_-(s)}{b+\rho_-(s)} e^{-b(x+u)},$$

$$g_2(s,u,y) = \lambda\rho_-(s) e^{\rho_-(s)(u-y)-by} I\{y > u\},$$

$$g_3(s,u,z) = \lambda b e^{-bz}[1 - e^{\rho_-(s)(u-z)}] I\{z > u\},$$

а їх похідні по s при $s = 0$ спрощуються (див. (10))

$$g'(0,u,x,y) = \frac{\lambda b}{|m|} e^{-b(u+x)} I\{y > u\},$$

$$g_1'(0,u,x) = \frac{\lambda}{|m|} e^{-b(u+x)}, \quad m < 0,$$

$$g_2'(0,u,y) = \frac{\lambda}{|m|} e^{-by} I\{y > u\},$$

$$g_3'(0,u,z) = \frac{\lambda b}{|m|} e^{-bz}(z-u) I\{z > u\}.$$

Значно спрощуються теореми 3 та 4, якщо врахувати, що

$$\frac{d}{dy}\mathrm{P}\{\zeta^+ < y\} = q_+\rho_+ e^{-\rho_+ y}, \quad \rho_+ = bp_+, \quad y > 0, \quad m < 0.$$

1. *Гусак Д. В., Королюк В. С.* О моменте прохождения заданного уровня для процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и ее применения. – 1968. – **13**, № 3. – С. 471 – 478.
2. *Гусак Д. В.* О совместном распределении времени и величины первого перескока для однородных процессов с независимыми приращениями // Там же. – 1969. – **14**, № 1. – С. 15 – 23.
3. *Гусак Д. В., Королюк В. С.* Распределение функционалов от однородных процессов с независимыми приращениями // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1970. – Вып. 1. – С. 55 – 73.
4. *Гусак Д. В.* Розподіл перестрибкових функціоналів однорідного процесу з незалежними приростами // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 303 – 322.
5. *Rolsky T., Shmidly H., Shmidt V., Teugels J.* Stochastic processes for insurance and finance. – New York: John Wiley, 1999. – 654 p.
6. *Asmussen S.* Ruin probabilities. – Singapore: Word Sci., 2000. – 385 p.
7. *Dickson D. C. M.* On the distribution of the surplus prior to ruin // Insurance: Math. and Econ. – 1997. – **11**. – P. 191 – 207.
8. *dos Reis A. D. E.* How long is the surplus below zero? // Ibid. – 1993. – **12**. – P. 23 – 38.
9. *Dickson D. C. M., dos Reis A. D. E.* On the distribution of the duration of negative surplus // Scand. Actuar. J. – 1996. – P. 148 – 164.
10. *Dickson D. C. M., dos Reis A. D. E.* The effect of interest of negative surplus // Insurance: Math. and Econ. – 1997. – **12**. – P. 23 – 38.
11. *Dufresne F., Gerber H. U.* The surplus immediately before ruin and amount of the claim causing ruin // Ibid. – 1988. – **7**. – P. 193 – 199.
12. *Veraverbeke N.* Asymptotic estimates for the probability of ruin in a Poisson model with diffusion // Ibid. – 1993. – **13**. – P. 57 – 62.
13. *Winkel M.* Electronic foreign-exchange markets and passage events of independent subordinators // J. Appl. Probab. – 2005. – **42**. – P. 138 – 152.
14. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами в теорії ризику // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2007. – **65**. – 460 с.

Одержано 30.06.2006