УДК 517.5

О. І. Степанець, А. С. Сердюк, А. Л. Шидліч
(Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ДЕЯКІ НОВІ КРИТЕРІЇ НЕСКІНЧЕННОЇ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ*

The set $\mathcal{D}^\infty$ of infinitely differentiable periodic functions is studied in terms of generalized $\bar\psi$-derivatives defined by a pair $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$ of sequences ψ_1 and ψ_2. It is shown that every function f from the set $\mathcal{D}^\infty$ has at least one derivative whose parameters ψ_1 and ψ_2 decrease faster than any power function, and, at the same time, for an arbitrary function $f \in \mathcal{D}^\infty$ different from a trigonometric polynomial, there exists a pair ψ whose parameters ψ_1 and ψ_2 have the same rate of decrease and for which the $\bar\psi$-derivative no longer exists.

Изучается множество $\mathcal{D}^\infty$ бесконечно дифференцируемых периодических функций в терминах обобщенных $\bar\psi$-производных, определяемых парой $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$ последовательностей ψ_1 и ψ_2. Показано, что каждая функция f из множества $\mathcal{D}^\infty$ имеет по крайней мере одну производную, параметры которой ψ_1 и ψ_2 убывают быстрее, чем произвольная степенная функция, и в то же время для произвольной функции $f \in \mathcal{D}^\infty$, отличной от тригонометрического полинома, найдется пара $\bar\psi$, параметры ψ_1 и ψ_2 которой имеют такую же скорость убывания и для которой $\bar\psi$-производная уже не существует.

Нехай L — простір інтегровних 2π-періодичних функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x)$$

— ряд Фур'є функції f. Нехай, далі, $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей таких, що $\psi^2(k) = \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\psi^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\psi^2(k)} \tilde{A}_k(f;x)\right), \tag{1}$$

де $\tilde{A}_k(f;x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$, є рядом Фур'є деякої функції $\varphi \in L$, то φ називають *$\bar\psi$-похідною функції* f і записують $\varphi(\cdot) = D^{\bar\psi}(f;\cdot) = f^{\bar\psi}(\cdot)$.

Зазначимо, що у випадку, коли

$$\psi_1(k) = k^{-r} \cos\frac{r\pi}{2}, \qquad \psi_2(k) = k^{-r} \sin\frac{r\pi}{2}, \quad r > 0,$$

$\bar\psi$-похідна збігається з дробовою похідною в сенсі Вейля, яка, в свою чергу, при натуральних значеннях r є звичайною похідною порядку r.

Підмножину всіх функцій $f \in L$, у яких існують $\bar\psi$-похідні, позначають через $L^{\bar\psi}$. Нехай також C — простір неперервних 2π-періодичних функцій, $C^{\bar\psi} = L^{\bar\psi} \bigcap C$, і $\mathfrak{M}$ — множина всіх додатних опуклих донизу спадних до нуля послідовностей:

$$\mathfrak{M} = \left\{\lambda(k)\colon \lambda(k) > 0,\ \lambda(k) - 2\lambda(k+1) + \lambda(k+2) \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{k\to\infty}\lambda(k) = 0\right\}.$$

* Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (грант 25.1/0.43).

Узагальнені $\bar{\psi}$-похідні були введені О. І. Степанцем у 80-х роках минулого століття (див., наприклад, [1–4]). За допомогою цих похідних вдається ранжувати весь спектр інтегровних 2π-періодичних функцій, починаючи з функцій, ряди Фур'є яких можуть навіть розбігатися, і закінчуючи нескінченно диференційовними, серед яких аналітичні і цілі функції. При цьому виявилось, що, без суттєвих втрат загальності, послідовності ψ_1 і ψ_2 можна вибирати лише із множини $\mathfrak{M}$, оскільки, як показано в [5] (гл. III), *кожна функція* $f \in C$ (*або ж* $f \in L$) *має принаймні одну* $\bar{\psi}$*-похідну* $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$, *котра міститься в* C (*або ж в* L), *причому пару* $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ *можна брати так, щоб* $\psi_1,\ \psi_2 \in \mathfrak{M}$. *Таким чином, виконуються рівності*

$$\bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}} L^{\bar{\psi}} = L, \qquad \bigcup_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}} C^{\bar{\psi}} = C. \tag{2}$$

Якщо $\mathfrak{T}$ — множина всіх тригонометричних поліномів і $f \in \mathfrak{T}$, то зрозуміло, що якою б не була пара $\bar{\psi}$, функція f має $\bar{\psi}$-похідну. Звідси, зокрема, випливає, що множина $L^{\bar{\psi}}$ не може бути порожньою. Зрозуміло також, що $\bigcap\limits_{\bar{\psi}} L^{\bar{\psi}} = \mathfrak{T}$, якщо $\bar{\psi}$ пробігає всю множину пар, для яких $\psi^2(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Більш того, виконується рівність

$$\bigcap_{\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}} L^{\bar{\psi}} = \mathfrak{T}. \tag{3}$$

Звернемо увагу на те, що рівності (2) означають, що коли пара $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ пробігає множину $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, то вся множина L (або C) розбивається на підмножини (класи) $L^{\bar{\psi}}$ (або $C^{\bar{\psi}}$). Рівність (3) означає, що при такій класифікації залишаються нерозрізненними тільки тригонометричні поліноми. Принагідно зазначимо, що спільна частина відомих класів W^r складається з множини $\mathcal{D}^\infty$ всіх нескінченно диференційовних 2π-періодичних функцій, оскільки, як відомо, функція f належить множині $\mathcal{D}^\infty$ тоді і тільки тоді, коли її коефіцієнти Фур'є $c_k(f)$ спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію:

$$f \in \mathcal{D}^\infty \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} k^r c_k(f) = 0 \quad \forall r > 0. \tag{4}$$

Тобто в шкалі класів W^r такі функції розрізнити не можна.

У даній роботі встановлено необхідні і достатні умови нескінченної диференційовності функції f, які сформульовано в термінах їх $\bar{\psi}$-похідних, компоненти ψ_1 та ψ_2 яких вибрано з множини $\mathfrak{M}$. Це дає змогу ранжувати всю множину $\mathcal{D}^\infty$ в залежності від швидкості спадання послідовностей ψ, що визначають ці похідні.

Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що послідовності $\psi(k)$ з множини $\mathfrak{M}$ є звуженнями на множину натуральних чисел деяких додатних неперервних опуклих донизу функцій $\psi(t)$ неперервного аргумента $t \geq 1$, що прямують до нуля при $t \to \infty$. Множину всіх таких функцій також будемо позначати через $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M} = \Big\{\psi(t)\colon \psi(t) > 0,\ \psi(t_1) - 2\psi((t_1+t_2)/2) + \psi(t_2) \geq 0$$

$$\forall t_1, t_2 \in [1,\infty),\ \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0\Big\}.$$

Для характеристики швидкості спадання до нуля функцій ψ з множини $\mathfrak{M}$ зручно використовувати пару функцій $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ і $\mu(t) = \mu(\psi; t)$, які визначаються таким чином. При будь-якому $t \geq 1$

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t).$$

Внаслідок строгої монотонності функції ψ значення $\eta(t)$ при кожному $t \geq 1$ визначається однозначно:

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right).$$

Функція $\mu(t)$ задається рівністю

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t}.$$

Через $\mathfrak{M}_{\infty}^{+}$ позначимо підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(\psi; t)$ монотонно і необмежено зростає при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}_{\infty}^{+} = \Big\{\psi(t) \in \mathfrak{M}: \quad \mu(\psi; t) \uparrow \infty\Big\}.$$

Зазначимо, що типовими представниками множини $\mathfrak{M}_{\infty}^{+}$ є функції $\psi(t) = t^s \ln^{\varepsilon}(t+e)e^{-\alpha t^r}$ при будь-яких додатних α та r і дійсних s та ε.

Основним результатом роботи є таке твердження.

Теорема 1. *Якщо $f \in \mathcal{D}^{\infty}$, то можна вказати пару функцій $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ таку, що ψ_1, $\psi_2 \in \mathfrak{M}_{\infty}^{+}$, і в функції f існує $\bar{\psi}$-похідна $f^{\bar{\psi}}$, тобто $f \in C^{\bar{\psi}}$.*

Водночас для довільної функції $f \in L \setminus \mathcal{T}$ можна вказати пару $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ таку, що ψ_1, $\psi_2 \in \mathfrak{M}_{\infty}^{+}$, і $f \bar{\in} L^{\bar{\psi}}$, тобто $f^{\bar{\psi}}$ не існує.

Доведення. Нехай функція f належить множині $\mathcal{D}^{\infty}$. Записуючи її ряд Фур'є у вигляді

$$\begin{gathered} S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left(kx - \frac{\gamma_k \pi}{2}\right), \\ c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad \cos\frac{\gamma_k \pi}{2} = \frac{a_k}{c_k}, \qquad \sin\frac{\gamma_k \pi}{2} = \frac{b_k}{c_k}, \end{gathered} \tag{5}$$

і враховуючи (4), бачимо, що при будь-якому $r > 0$

$$\lim_{k \to \infty} k^r c_k = 0.$$

Тому функція

$$a(t) = \sup_{k \geq t}\{c_k k^2\}, \quad t \geq 1, \tag{6}$$

є кусково-сталою, не зростає і для неї справджується рівність

$$\lim_{t \to \infty} a(t) = 0.$$

Переконаємось, що для доведення першої частини теореми досить показати, що існує функція $\psi \in \mathfrak{M}_{\infty}^{+}$ така, що при всіх $t \geq 1$ виконується нерівність $a(t) \leq \psi(t)$.

Дійсно, в цьому випадку для будь-яких послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, для яких $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(k)}{\psi^2(k)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) - \frac{\psi_2(k)}{\psi^2(k)} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(\frac{\psi_1(k)}{\psi(k)} c_k \cos(kx - \frac{\gamma_k \pi}{2}) - \frac{\psi_2(k)}{\psi(k)} c_k \sin(kx - \frac{\gamma_k \pi}{2}) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\psi(k)} \cos \left(kx - \frac{(\gamma_k - \beta_k)\pi}{2} \right),$$

де послідовності β_k визначаються за допомогою системи

$$\cos \frac{\beta_k \pi}{2} = \frac{\psi_1(k)}{\psi(k)},$$

$$\sin \frac{\beta_k \pi}{2} = \frac{\psi_2(k)}{\psi(k)},$$

а послідовності γ_k — за допомогою рівностей (5), внаслідок того, що $\psi(k) \geq a(k) \geq \geq k^2 c_k \ \forall k \in \mathbb{N}$, буде абсолютно збіжним, а отже, буде рядом Фур'є деякої сумовної функції $f^{\bar{\psi}}$, тобто f належатиме множині $C^{\bar{\psi}}$.

Таким чином, необхідно встановити існування функції $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, для якої справджується нерівність

$$a(t) \leq \psi(t).$$

Зобразимо функцію $a(t)$ при $t > 1$ у вигляді $a(t) = t^{-r(t)}$. Тоді

$$r(t) = -\frac{\ln a(t)}{\ln t},$$

і оскільки для довільного $r > 0$ $\lim\limits_{t \to \infty} t^r a(t) = 0$, то при кожному $r > 0$ для досить великих значень t справджується нерівність $a(t) t^r < 1$. Звідси випливає, що для таких t

$$r < -\frac{\ln a(t)}{\ln t} = r(t),$$

тобто

$$\lim_{t \to \infty} r(t) = +\infty.$$

Спочатку побудуємо додатну функцію $\varphi(t)$, $t \geq 1$, друга похідна якої $\varphi''(t)$ є недодатною: $\varphi''(t) \leq 0$, $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t) = +\infty$, і для якої при всіх t, більших за деяке число $b \geq 1$, виконується нерівність $\varphi(t) \leq r(t)$.

Побудову функції φ можна здійснити, зокрема, таким чином. Побудуємо спочатку кусково-сталу неспадну функцію $f_1(t)$, $t \geq 1$, таку, що $\lim\limits_{t \to \infty} f_1(t) = +\infty$ і $f_1(t) \leq r(t)$.

Покладемо $t_0 = 1$, і через t_1, $t_1 \geq t_0 + 1$ позначимо довільне число таке, що при всіх $t \geq t_1$ справджується нерівність $r(t) > 0$. Зрозуміло, що таке число існує. Через t_2, $t_2 \geq t_1 + 1$, позначимо довільне число таке, що при всіх $t \geq t_2$ справджується нерівність $r(t) > \inf\limits_{t \geq t_1} r(t)$, через t_3, $t_3 \geq t_2 + 1$, позначимо довільне число таке, що при всіх $t \geq t_3$ $r(x) > \inf\limits_{t \geq t_2} r(t)$, і продовжимо процес вибору чисел t_i при $i = 4, 5, \ldots$.

Означимо функцію f_1 за допомогою рівностей

$$f_1(t) = \begin{cases} \inf\limits_{t \geq 1} r(t), & t \in [1, t_1), \\ \\ \inf\limits_{t \geq t_{k-1}} r(t), & t \in [t_{k-1}, t_k), \ k = 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Побудована функція $f_1(t)$ не спадає, для неї виконується нерівність $f_1(t) \leq r(t)$ і $\lim\limits_{t \to \infty} f_1(t) = +\infty$.

Далі, побудуємо невід'ємну кусково-лінійну монотонно зростаючу до нескінченності функцію $f_2(t)$, $t > 0$, графік якої є опуклою догори кривою і при всіх $t \geq t_1$ лежить нижче графіка функції $f_1(t)$. Для цього розглянемо систему точок A_0, A_1, $A_2, \ldots$ таких, що $A_0 = A_0(0; 0)$, а при довільному натуральному k $A_k = A_k(t_{k+1}, f_1(t_k))$.

Нехай $r_0 = r_0(t)$ — функція, графіком якої є промінь $A_0 A_1$. Якщо промінь $A_0 A_1$ лежить нижче графіка функції f_1 при $t \geq t_2$, то при $t \geq 0$ покладемо $f_2(t) = r_0(t)$, і процес побудови функції f_2 буде завершено. Якщо ж цей промінь перетинає графік функції f_1, то покладемо $f_2(t) = r_0(t)$ на проміжку $t \in [0, t_{k_0+1})$, де $t_{k_0+1} = t_2$, і через $\Delta_1 = [t_{k_1}, t_{k_1+1})$ позначимо півсегмент, який містить точку перетину даного променя з графіком функції f_1 (якщо ж таких півсегментів декілька, то через $\Delta_1 = [t_{k_1}, t_{k_1+1})$ позначимо півсегмент, що містить точку перетину з найменшою абсцисою).

Через $r_1 = r_1(t)$ позначимо функцію, графіком якої є промінь $A_1 A_{k_1}$, $A_{k_1} = A_{k_1}\big(t_{k_1+1}, f_1(t_{k_1})\big)$, і на проміжку $t \in [t_{k_0+1}, t_{k_1+1})$ покладемо $f_2(t) = r_1(t)$.

Якщо промінь $A_1 A_{k_1}$ лежить нижче графіка функції f_1, то при всіх $t \geq t_{k_1+1}$ покладемо $f_2(t) = r_1(t)$, і процес побудови функції f_2 буде завершено. Якщо ж цей промінь перетинає графік функції f_1, то через $\Delta_2 = [t_{k_2}, t_{k_2+1})$ позначимо півсегмент, який містить точку перетину променя $A_1 A_{k_1}$ з графіком функції f_1 (у випадку, коли таких точок декілька, через $\Delta_2 = [t_{k_2}, t_{k_2+1})$ позначимо півсегмент, що містить точку перетину з найменшою абсцисою).

Через $r_2 = r_2(t)$ позначимо функцію, графіком якої є промінь $A_{k_1} A_{k_2}$, $A_{k_2} = A_{k_2}\big(t_{k_2+1}, f_1(t_{k_2})\big)$, і на проміжку $t \in [t_{k_1+1}, t_{k_2+1})$ покладемо $f_2(t) = r_2(t)$.

Продовжуючи цей процес, на деякому, наприклад i-му, кроці може виявитися, що промінь $A_{k_{i-1}} A_{k_i}$ лежить нижче графіка функції f_1. У такому випадку для довільного $t \geq t_{k_i+1}$ покладемо $f_2(t) = r_i(t)$, де r_i — функція, графіком якої є промінь $A_{k_{i-1}} A_{k_i}$. Якщо ж цей промінь перетинає графік функції f_1, то через $\Delta_i = [t_{k_i}, t_{k_i+1})$ позначимо півсегмент, який містить точку перетину променя $A_{k_{i-1}} A_{k_i}$ з графіком функції f_1 (якщо ж таких півсегментів декілька, то через $\Delta_i = [t_{k_i}, t_{k_i+1})$ позначимо півсегмент, що містить точку перетину з найменшою абсцисою).

Через $r_i = r_i(t)$ позначимо функцію, графіком якої є промінь $A_{k_i-1} A_{k_i}$, $A_{k_i} = A_{k_i}\big(t_{k_i+1}, f_1(t_{k_i})\big)$, і на проміжку $t \in [t_{k_i}, t_{k_i+1})$ покладемо $f_2(t) = r_i(t)$.

В результаті даного процесу буде побудовано невід'ємну опуклу догори кусково-лінійну функцію $f_2(t)$, $t > 0$, таку, що $f(0) = 0$, при всіх $t \geq t_1$ справджується нерівність $f_2(t) \leq f_1(t) \leq r(t)$ і

$$\lim_{t \to \infty} f_2(t) = +\infty.$$

Зрозуміло, що функцію $f_2(t)$ в околах вузлів t_{k_i+1} можна згладити так, щоб одержана функція $\varphi(t)$, $t > 0$, мала такі властивості:

а) $\varphi(0) = 0$,

б) $\varphi''(t) \leq 0 \ \forall t > 0$,

в) $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t) = +\infty$,

г) $\varphi(t) \leq r(t) \ \forall t \geq t_1$.

У такому випадку при всіх $t \geq t_1$ буде справджуватися співвідношення $g(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \overset{\mathrm{df}}{=} t^{-\varphi(t)} \geq t^{-r(x)} = a(t)$, і оскільки

$$g''(t) =$$

$$= t^{-\varphi(t)} \left((\varphi'(t) \ln t)^2 + \frac{2\varphi(t)\varphi'(t) \ln t}{t} + \frac{\varphi^2(t)}{t^2} - \varphi''(t) \ln t - \frac{2\varphi'(t)}{t} + \frac{\varphi(t)}{t^2} \right) \geq$$

$$\geq \left(\varphi'(t) \ln t - \frac{1}{t \ln t} \right)^2 - \frac{1}{t^2 \ln^2 t} + \frac{\varphi(t)}{t^2} \geq \frac{1}{t^2} \left(\varphi(t) - \frac{1}{\ln^2 t} \right),$$

то, починаючи з деякого числа $b_1 \geq 1$, функція $g(t)$ буде опуклою донизу.

Розглянемо тепер функцію

$$\psi(t) = \psi(t; K) = K \exp \left(-\frac{1}{2} \int_1^t \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau \right), \quad t \geq 1, \tag{7}$$

де $K > 0$ — довільна фіксована стала. Зрозуміло, що $\lim\limits_{t \to \infty} \psi(t) = 0$. Похідна функції ψ має вигляд

$$\psi'(t) = -\frac{1}{2} K \exp \left(-\frac{1}{2} \int_1^t \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau \right) \frac{\varphi(t)}{t}.$$

Внаслідок опуклості φ і того, що $\varphi(0) = 0$, кут нахилу січної, проведеної з початку координат до довільної точки графіка функції $\varphi(t)$, не зростає. Звідси випливає, що відношення $t/\varphi(t)$ не спадає, і тому функція $\psi'(t)$ також є неспадною. Отже, $\psi \in \mathfrak{M}$ і оскільки величина

$$\alpha(\psi; t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} = \frac{2}{\varphi(t)} \tag{8}$$

монотонно спадає до нуля при $t \to \infty$, то за теоремою 12.1 монографії [5, с. 161] (див. також [6]) функція ψ належить і множині $\mathfrak{M}_\infty^+$.

Покажемо, що при певному виборі сталої K графік функції $\psi(t; K)$ буде лежати вище графіка функції $a(t)$, визначеної рівністю (6).

За побудовою функції $g(t)$ та означенням характеристики $\eta = \eta(g;t)$ при будь-якому $t \geq b_1$ маємо

$$t^{-\varphi(t)} = g(t) = 2g(\eta(t)) = 2\eta(g;t)^{-\varphi(\eta(g;t))}.$$

Оскільки

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(1+1/\varphi(t))}{1/\varphi(t)} = 1,$$

то для довільного $\varepsilon \in (0, 1-\ln 2)$ існує число $t_* \geq b_1$ таке, що при всіх $t \geq t_*$

$$\varphi\left(t+\frac{t}{\varphi(t)}\right)\ln\left(t+\frac{t}{\varphi(t)}\right) = \varphi\left(t+\frac{t}{\varphi(t)}\right)\left(\ln t + \ln\left(1+\frac{1}{\varphi(t)}\right)\right) \geq$$

$$\geq \varphi\left(t+\frac{t}{\varphi(t)}\right)\left(\ln t + \frac{1-\varepsilon}{\varphi(t)}\right) \geq \varphi(t)\left(\ln t + \frac{\ln 2}{\varphi(t)}\right) = \varphi(t)\ln t + \ln 2.$$

Звідси випливає, що для довільного $t \geq t_*$

$$g\left(t+\frac{t}{\varphi(t)}\right) = \left(t+\frac{t}{\varphi(t)}\right)^{-\varphi\left(t+\frac{t}{\varphi(t)}\right)} \leq \frac{1}{2}\,t^{-\varphi(t)} = \frac{1}{2}g(t) = g(\eta(g;t)),$$

і тому

$$\eta(g;t) \leq t + \frac{t}{\varphi(t)}, \quad t \geq t_*.$$

Оскільки на підставі (8) та відомої нерівності

$$\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \leq 2\frac{\eta(\psi;t)-t}{t} \quad \forall t \geq 1,\ \psi \in \mathfrak{M} \tag{9}$$

(див., наприклад, [5, с. 164; 6]), виконується співвідношення

$$\alpha(\psi;t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} = \frac{2}{\varphi(t)} \leq 2\frac{\eta(\psi;t)-t}{t} \quad \forall t \geq 1,$$

то при всіх $t \geq t_*$ справджується нерівність

$$\eta(g;t) \leq t + \frac{t}{\varphi(t)} \leq \eta(\psi;t). \tag{10}$$

Тому якщо для деякого числа $t \geq t_*$ виконується умова $g(t) \leq \psi(t)$, то

$$g(\eta(g;t)) = \frac{1}{2}g(t) \leq \frac{1}{2}\psi(t) = \psi(\eta(\psi;t)) \leq \psi(\eta(g;t)).$$

В рівності (7) підберемо число $K = K_0$ так, щоб при всіх $t \in \big[1, \eta(g;t_*)\big]$ виконувалась нерівність $\psi(t;K_0) \geq g(t)$. Тоді внаслідок (10) така ж нерівність буде виконуватись і при всіх $t > \eta(g;t_*)$, тому

$$a(t) \leq g(t) \leq \psi_{K_0}(t), \quad t \geq 1.$$

Таким чином, функція $\psi(t) = \psi(t;K_0)$, яка визначається рівністю (7) при $K = K_0$, належить множині $\mathfrak{M}_\infty^+$, і для неї при всіх $t \geq 1$ справджується нерівність $\psi(t) \geq \geq a(t)$, тобто ψ є шуканою, і цим першу частину теореми 1 доведено.

Переконаємось в справедливості її другої частини. А саме, покажемо, що для будь-якої функції $f \in L \setminus \mathfrak{T}$ можна вказати пару $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ таку, що $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, де $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$, і $f \bar{\in} L^{\bar{\psi}}$.

За твердженням 11.10 із [5, с. 157] для кожної 2π-періодичної сумовної функції f, яка не належить множині $\mathfrak{T}$, можна вказати пару $\bar{\psi}_f = (\psi_1, \psi_2)$ таку, що $f \bar{\in} L^{\bar{\psi}_f}$ і функція $\psi_f(t) = \sqrt{\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t)}$ належить множині $\mathfrak{M}$. Тому для доведення другої частини теореми досить встановити існування функції $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, графік якої лежить не вище графіка функції ψ_f.

Якщо $\psi_f \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то в якості функції ψ можна взяти саму функцію ψ_f. Якщо ж це не так, то будемо діяти таким чином.

Побудуємо функцію $\varphi(t) \in \mathfrak{M}$ таку, щоб її графік лежав не вище графіка функції $\xi(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \eta(\psi_f; t) - t$ і при цьому виконувалась нерівність

$$\left|\varphi'(t)\right| \leq \frac{3}{2}. \tag{11}$$

Зрозуміло, що у випадку, коли $\eta(\psi_f; t) - t \geq C > 0$, побудова функції φ є тривіальною. Якщо ж $\underline{\lim}_{t \to \infty} (\eta(\psi_f; t) - t) = 0$, то побудувати функцію φ можна, зокрема, використовуючи схему, запропоновану при доведенні твердження 11.10 із [5, с. 157].

Побудуємо допоміжну функцію $l = l(x)$ таким чином. Покладемо $z_0 = (1, \xi(1))$. Промінь l_1, що виходить з точки z_0 в напрямку, протилежному осі ординат, будемо обертати проти годинникової стрілки доти, доки він не торкнеться графіка функції $\xi(t)$. Точку дотику позначимо через $z_1 = (t_1, y_1)$. Якщо таких точок дотику декілька, то через $z_1 = (t_1, y_1)$ позначимо точку з найбільшою абсцисою. На проміжку $[1, t_1]$ означимо функцію $l(t)$ так, щоб її графік збігся з відрізком, який сполучає точки z_0 та z_1.

Далі, промінь l_2, який виходить з точки z_1 і напрям якого збігається з напрямом променя l_1 в останньому положенні, знову будемо обертати проти годинникової стрілки доти, доки він не торкнеться графіка функції $\xi(t)$. Точку дотику позначимо через $z_2 = (t_2, y_2)$. Якщо таких точок дотику декілька, то через $z_2 = (t_2, y_2)$ позначимо точку з найбільшою абсцисою. На проміжку $[t_1, t_2]$ означимо функцію $l(t)$ так, щоб її графік збігся з відрізком, який сполучає точки z_1 та z_2.

Продовжуючи цей процес, в результаті побудуємо функцію $l(t)$, $t \geq 1$, яка належатиме множині $\mathfrak{M}$, таку, що $l(t) \leq \xi(t)$, $t \geq 1$. Згідно з побудовою при всіх досить великих t, за винятком вузлів t_i, виконуватиметься нерівність $\left|l'(t)\right| \leq \dfrac{3}{2}$. Зрозуміло, що функцію l можна підправити таким чином, щоб одержана функція φ належала множині $\mathfrak{M}$ і при $t \geq 1$ задовольняла нерівність (11) та умову

$$\varphi(t) \leq \xi(t) = \eta(\psi_f; t) - t. \tag{12}$$

Розглянемо функцію

$$\psi(t) = \psi(t; K) = K \exp\left(-\frac{3}{2} \int\limits_1^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right), \quad t \geq 1, \tag{13}$$

де K — довільна додатна стала. Оскільки

$$\psi'(t) = -\frac{3}{2}K \exp\left(-\frac{3}{2}\int\limits_1^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{1}{\varphi(t)} < 0$$

і

$$\psi''(t) = \frac{3}{2}K \exp\left(-\frac{3}{2}\int\limits_1^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{1}{\varphi^2(t)}\left(\frac{3}{2} + \varphi'(t)\right) \geq 0,$$

то $\psi \in \mathfrak{M}$. Величина

$$\alpha(\psi;t) = \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} = \frac{2\varphi(t)}{3t} \tag{14}$$

монотонно спадає до нуля при $t \to \infty$, тому на підставі теореми 12.1 монографії [5, с. 161] (див. також [6]) робимо висновок, що $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$.

Переконаємось, що при певному виборі сталої K графік функції $\psi(t;K)$ буде лежати нижче графіка функції $\psi_f(t)$.

Оскільки $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^+$, то для будь-якого $t \geq 1$

$$\eta'(\psi;t) \leq 1 + \gamma(t),$$

де $\gamma(t)$ — деяка функція, яка прямує до нуля при $t \to \infty$ (див., наприклад, [5, с. 166]). Тому при всіх t, більших за деяке число $\bar{t} \geq 1$, виконується співвідношення

$$\eta'(\psi;t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(\psi;t))} \leq \frac{3}{2}.$$

Звідси, внаслідок (12), (14) і того, що

$$\big|\psi'(\eta(\psi;t))\big|\big(\eta(\psi;t) - t\big) \leq -\int\limits_t^{\eta(\psi;t)} \psi'(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geq 1,$$

випливає, що при всіх $t \geq \bar{t}$ справджуються співвідношення

$$\frac{\eta(\psi;t) - t}{t} \leq \frac{\psi(t)}{2t|\psi'(\eta(\psi;t))|} \leq \frac{3}{2}\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} = \frac{3}{2}\alpha(\psi;t) = \frac{\varphi(t)}{t} \leq \frac{\eta(\psi_f;t) - t}{t}.$$

Тому при всіх $t \geq \bar{t}$ маємо

$$\eta(\psi;t) \leq \eta(\psi_f;t). \tag{15}$$

Виберемо в (13) число $K = K_0$ так, щоб при всіх $t \in \big[1, \eta(\psi;\bar{t})\big]$ виконувалась нерівність $\psi(t;K_0) \leq \psi_f(t)$. Тоді внаслідок (15) така ж нерівність буде виконуватись і при всіх $t > \eta(\psi;\bar{t})$.

Отже, функція $\psi(t) = \psi(t;K_0)$, яка при довільному $t \geq 1$ визначається рівністю (13), де $K = K_0$, належить множині $\mathfrak{M}_\infty^+$, і для неї при всіх $t \geq 1$ справджується нерівність $\psi(t) \leq \psi_f(t)$, тобто ψ є шуканою.

Теорему доведено.

Теорема 1 дозволяє встановити декілька нових критеріїв належності функції f до множини $\mathcal{D}^\infty$.

Нехай $\mathfrak{M}^\infty$ — підмножина всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, які спадають до нуля швидше за довільну степеневу функцію:

$$\mathfrak{M}^\infty = \Big\{\psi \in \mathfrak{M}\colon \forall r > 0\colon \lim_{t\to\infty} t^r \psi(t) = 0\Big\}. \tag{16}$$

Через $\mathfrak{M}^\alpha$ позначимо підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина $\alpha(\psi;t) = \dfrac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$, $\psi'(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi'(t+0)$, спадає до нуля при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}^\alpha = \Big\{\psi(t) \in \mathfrak{M}\colon \lim_{t\to\infty} \alpha(\psi;t) = 0\Big\},$$

через $\mathfrak{M}'_\infty$ — підмножину всіх функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких величина $\mu(\psi;t)$ прямує до нескінченності при $t \to \infty$:

$$\mathfrak{M}'_\infty = \Big\{\psi(t) \in \mathfrak{M}\colon \lim_{t\to\infty} \mu(\psi;t) = \infty\Big\}.$$

Якщо функція ψ належить множині $\mathfrak{M}'_\infty$, то внаслідок (9) справджується співвідношення

$$0 \le \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|} \le 2 \lim_{t\to\infty} \frac{\eta(\psi;t) - t}{t} = 0,$$

тобто ψ належить множині $\mathfrak{M}^\alpha$.

Для довільної функції $\psi \in \mathfrak{M}$ при будь-якому $t > 1$ виконується рівність

$$\psi(t) = \psi(1)\exp\left(-\int_1^t \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right)$$

(див., наприклад, [5, с. 164]). Тому якщо $\psi \in \mathfrak{M}^\alpha$, то для довільного $r > 0$ і будь-якого t_0 такого, що $1/\alpha(t) \ge r+1$, $t \ge t_0$, маємо

$$\lim_{t\to\infty} t^r\psi(t) = \psi(1) \lim_{t\to\infty} \exp\left(r\ln t - \int_1^t \frac{d\tau}{\tau\alpha(\tau)}\right) \le$$

$$\le \psi(1) \lim_{t\to\infty} \exp\left(-\int_{t_0}^t \frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\alpha(\tau)} - r\Big)d\tau + r\ln t_0\right) \le$$

$$\le \psi(1) \lim_{t\to\infty} e^{-\ln t + (r+1)\ln t_0} = 0,$$

і, отже, ψ належить множині $\mathfrak{M}^\infty$.

Таким чином, виконуються наступні вкладення:

$$\mathfrak{M}^+_\infty \subset \mathfrak{M}'_\infty \subset \mathfrak{M}^\alpha \subset \mathfrak{M}^\infty. \tag{17}$$

Якщо $f \in C^{\bar\psi}$ для деякої пари $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$, для якої функція $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ належить множині $\mathfrak{M}^\infty$, то внаслідок (16) ряд (1) можна диференціювати довільну кількість разів, і в результаті будемо отримувати рівномірно збіжні ряди і, отже, $f \in \mathcal{D}^\infty$.

Звідси на підставі ланцюжка вкладень (17) і теореми 1 отримуємо таке твердження.

Теорема 2. *Нехай $\mathcal{M}$ — будь-яка з множин $\mathfrak{M}_\infty^+$, $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^\alpha$ або $\mathfrak{M}^\infty$. Наступні твердження є еквівалентними*:

i) *функція f належить множині $\mathcal{D}^\infty$*;

ii) *існує функція $\psi(t)$ з множини $\mathcal{M}$ така, що $f \in C^{\bar\psi}$ для всіх пар $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$, для яких при кожному $k \in \mathbb{N}$ справджується рівність $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$*;

iii) *$f \in C^{\bar\psi}$ для деякої пари $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$ такої, що функція $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ належить множині $\mathcal{M}$.*

На підставі теорем 1 та 2 отримуємо наступні аналоги співвідношень (2) і (3):

$$\mathcal{D}^\infty = \bigcup_{\psi_1,\, \psi_2 \in \mathfrak{M}^\infty} C^{\bar\psi} = \bigcup_{\psi_1,\, \psi_2 \in \mathfrak{M}^\alpha} C^{\bar\psi} = \bigcup_{\psi_1,\, \psi_2 \in \mathfrak{M}'_\infty} C^{\bar\psi} = \bigcup_{\psi_1,\, \psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty^+} C^{\bar\psi}$$

і

$$\bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \mathfrak{M}^\infty} (\mathcal{D}^\infty \bigcap C^{\bar\psi}) = \bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \mathfrak{M}^\alpha} (\mathcal{D}^\infty \bigcap C^{\bar\psi}) =$$

$$= \bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \mathfrak{M}'_\infty} (\mathcal{D}^\infty \bigcap C^{\bar\psi}) = \bigcap_{\psi_1,\psi_2 \in \mathfrak{M}_\infty^+} (\mathcal{D}^\infty \bigcap C^{\bar\psi}) = \mathfrak{T}.$$

Отже, весь спектр 2π-періодичних нескінченно диференційовних функцій можна проранжувати за допомогою їх $\bar\psi$-похідних, причому пари $\bar\psi = (\psi_1, \psi_2)$ досить вибирати так, щоб функції $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ належали до однієї з множин $\mathfrak{M}_\infty^+$, $\mathfrak{M}'_\infty$, $\mathfrak{M}^\alpha$ або $\mathfrak{M}^\infty$. Нерозрізненними при такій класифікації залишаються тільки тригонометричні поліноми.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar\psi$-интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069 – 1113.
3. *Степанец А. И.* Приближение $\bar\psi$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). I // Там же. – 1997. – **49**, № 2. – С. 274 – 291.
4. *Степанец А. И.* Приближение $\bar\psi$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). II // Там же. – 1998. – **50**, № 3. – С. 388 – 400.
5. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Труды Ин-та математики НАН Украины. – 2002. – **40**, ч. I. – 427 с.
6. *Степанец А. И.* Несколько утверждений для выпуклых функций // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 688 – 702.

Одержано 15.06.2007