УДК 517.54

Ю. Ю. Трохимчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ АНАЛИТИЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

A generalization is proved for the well-known V. K. Dzyadyk theorem presenting an interesting geometric criterion for the analyticity of functions.

Доведено узагальнення відомої теореми В. К. Дзядика, яка дає цікавий геометричний критерій аналітичності функцій.

В. К. Дзядыку принадлежит следующая теорема [1]: если в области $D \subset C$ функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы и поверхности $Z = u(x, y)$, $Z = v(x, y)$ и $Z = \sqrt{u^2 + v^2}$ над каждой компактной подобластью D имеют одинаковые площади, то либо функция $f(z) = u + iv$, либо $\overline{f(z)} = u - iv$ является аналитической всюду в D.

Нетрудно показать [2], что в качестве третьей функции вместо $\sqrt{u^2 + v^2}$ можно взять произвольную гладкую функцию $\varphi(u, v)$, для которой выполнено равенство

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 = 1;$$

например, можно положить $\varphi = \alpha u + \beta v$, где для постоянных α, β $\alpha + \beta = 1$.

Что касается снятия такого обременительного условия, как непрерывная дифференцируемость u, v, то известный пример функции Т. Бора $w = x + i|y|$ на плоскости показывает, что даже условие Липшица не может обеспечить справедливость теоремы.

И все же теорема Дзядыка допускает усиление, если вместо непрерывности частных производных от u, v требовать лишь их существования всюду в области. Нашей целью и будет доказательство этого обобщения. Нетрудно догадаться, что оно будет основано на достаточно длинной цепи других предложений (а некоторые мы получим просто попутно), но зато таких, каждое из которых находит существенное применение не только в данном конкретном случае.

Итак, основным утверждением данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть непрерывные в области $D \subset C$ функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ обладают всюду конечными частными производными. Если для каждой компактной подобласти D, над которой поверхности $Z = u(x, y)$, $Z = v(x, y)$ и $Z = \alpha u + \beta v$ (α, β — постоянные, не равные нулю, и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$) одновременно имеют конечные площади, эти площади равны между собой, то либо функция $f(z) = u + iv$, либо ей сопряженная $\overline{f(z)} = u - iv$ является аналитической всюду в D.*

Как уже отмечалось, доказательство этой теоремы мы получим на основании некоторых вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если в условиях теоремы* 1 *функции u, v липшицевы в подобласти $d \subset D$, то почти всюду в $\overline{d}$ выполнены либо условия Коши – Римана (CR) $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, либо им сопряженные $\overline{(CR)}$ $u_x = -v_y$, $u_y = v_x$ (в различных точках $\overline{d}$ возможны разные условия).*

Доказательство. Поскольку для липшицевой области $\overline{d}$ функции $F(x, y)$ площадь поверхности $Z = F(x, y)$ конечна над $\overline{d}$ и выражается интегралом $\iint_d \sqrt{1 + F_x^2 + F_y^2}\, dxdy$, из условий леммы легко следует, что почти всюду в $\overline{d}$ имеем равенства

$$\sqrt{1+u_x^2+u_y^2} = \sqrt{1+v_x^2+v_y^2} = \sqrt{1+(\alpha u_x+\beta v_x)^2+(\alpha u_y+\beta v_y)^2},$$

равносильные следующим:

$$\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 &= v_x^2 + v_y^2, \\ u_x v_x + u_y v_y &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Если в некоторой точке все частные производные от u, v отличны от нуля, то

$$\frac{u_x}{v_y} = \frac{u_y}{v_x} = k,$$

или

$$\begin{aligned} u_x &= k v_y, \\ u_y &= -k v_x, \end{aligned} \tag{2}$$

но тогда из первого равенства в (1) имеем $k^2 = 1$ и $k = \pm 1$, т. е. (2) — это либо условия CR, либо $\overline{CR}$.

Пусть теперь одна из частных производных равна нулю, например $u_x = 0$. Если при этом и $u_y = 0$, то из (1) получаем $v_x = v_y = 0$; если же $u_y \neq 0$, то из второго равенства (1) следует $v_y = 0$, а из первого — $u_y^2 = v_x^2$ или $u_y = \pm v_x$. И в том, и в другом случае мы снова имеем либо условия CR, либо $\overline{CR}$.

Лемма 1 доказана.

Следующие утверждения доказаны в [3].

Лемма 2. *В условиях теоремы* 1 *в области D найдется всюду плотное открытое множество O, в каждой компоненте которого либо f, либо $\bar{f}$ будет аналитической.*

Лемма 3. *Пусть в области $\overline{D}$ задана непрерывная функция f и нигде не плотное замкнутое множество P такое, что в каждой компоненте открытого множества $D \setminus P$ либо f, либо $\bar{f}$ является аналитической. Если $f|_P$ липшицева, то f локально липшицева всюду в $\overline{D}$.*

Отметим, что в условиях теоремы 1 на каждом замкнутом множестве в D найдется порция, на которой функция f будет липшицевой [3]. Потому при ее доказательстве можно считать, что f в области D уже липшицева, что имеется открытое плотное множество O, в каждой компоненте которого либо f, либо $\bar{f}$ является аналитической.

Если дополнительное (как легко видеть, совершенное) множество $P = D \setminus G$ пусто, то доказывать нечего.

Предположим теперь, что $P \neq 0$.

Наше дальнейшее доказательство будет основано на одной геометрической, точнее топологической, теореме.

Определение. *Будем говорить, что непрерывное отображение $f : D \to \mathbb{C}$ или, иначе, $w = f(z)$, обладает свойством T в точке z_0, если в этой точке пересекаются две различные прямые l_1, l_2 такие, что образы их l_k, $k = 1, 2$, являются кривыми L_k в w-плоскости с различными касательными T_k в точке $w = f(z)$. При этом образы начальных отрезков прямых l_1, l_2 уже не проходят через точку $w_0 = f(z_0)$.*

Теорема, о которой мы упомянули, формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть* $f\colon D \to \mathbb{C}$ — *непрерывное отображение, обладающее свойством* T *в каждой точке области* D, *за исключением не более чем счетного их множества. Тогда* f *является внутренним отображением области* D (по Стоилову [4]).

Для доказательства нам потребуется одна лемма о свойстве T, фактически доказанная в [5], поэтому приведем лишь ее формулировку.

Лемма 4. *Пусть отображение* $f\colon D \to \mathbb{C}$ *непрерывно и* $P \subset D$ — *произвольное замкнутое множество. Пусть* f *обладает свойством* T *во всех точках множества* $N \subset P$ *не первой категории на* P. *Тогда найдутся открыто-замкнутая порция* $P' \subset P$, *числа* σ, $\delta > 0$ *такие, что через каждую точку* $z \in P$ *проходят две прямые* $\lambda_k(z)$, $k = 1, 2$, *обладающие следующими свойствами*:

1) *угол* $[\widehat{\lambda_k(z), \lambda_k(z')}] < \delta$, $k = 1, 2$, *для любых точек* z, $z' \in P'$;

2) $100\sigma < [\widehat{\lambda_1(z), \lambda_2(z)}] < \pi - 100\sigma$ *для каждой точки* $z \in P'$;

3) *расстояние* $\rho(P', \partial D) > \delta$;

4) *если* $P_1' = f(P')$, *то каждая точка* $w = f(z) \in P_1'$ *является совместной вершиной двух пар вертикальных углов* $\Omega_k(w)$, $k = 1, 2$, *раствора* 4σ *каждая, полученных параллельным переносом фиксированных углов* Ω_k *с общей вершиной и обладающих тем свойством, что образы* $\Omega_k(w)$ *двух отрезков* $\lambda_k(z)$, $k = 1, 2$, *имеющих длину* δ *при отображении* $w = f(z)$, *расположены внутри соответствующих вертикальных углов* $\Omega_k(w)$; *при этом* $100\sigma < [\widehat{\Omega_1, \Omega_2}] < \pi - 100\sigma$, *если понимать* $[\widehat{\Omega_1, \Omega_2}]$ *как угол между биссектрисами углов* Ω_1, Ω_2.

***Доказательство теоремы* 2.** Прежде всего докажем нульмерность отображения f, т. е. что прообраз $f^{-1}(w)$ произвольной точки w имеет размерность нуль.

Пусть это не так; тогда найдется невырожденный континуум $K \subset D$, для которого $f(K) = w_0$, где w_0 — некоторая точка плоскости $\mathbb{C}_w$. По лемме находим открытую порцию K', для которой выполнены все ее свойства; можно считать диаметр K' меньшим чем $\delta > 0$.

При доказательстве леммы [5] на K' существовало плотное множество точек, в каждой из которых имело место первоначальное свойство T. Поэтому возьмем произвольные и различные точки z', $z'' \in K'$; это означает, в частности, что ни одна из них не принадлежит прямым l_1, l_2 для другой точки. Это значит, что должны пересекаться „разноименные" прямые $l_1(z')$ и $l_2(z'')$, а также $l_2(z'')$ и $l_1(z')$; но так как $f(z') = f(z'')$, то в силу леммы в образе они пересекаться не могут. Это противоречие доказывает нульмерность f.

Докажем теперь открытость отображения f.

Опять, предполагая противное, найдем такой круг $Q(z_0, r)$, для которого образ $w_0 = f(z_0)$ центра является граничной точкой для образа $f(\overline{Q})$ замыкания Q. Взяв, если необходимо, меньший круг в Q, можем считать, что граница образа $f(\overline{Q})$ содержит целый континуум k, точкам которого соответствуют внутренние точки круга Q.

Рассмотрим граничную точку $w' \in k$, обладающую тем свойством, что ее можно коснуться некоторым кругом q, все внутренние точки которого являются внешними для компакта $f(\overline{Q})$; легко показать, что такие „хорошо видимые" извне точки образуют плотное множество на граничном континууме компакта. Но в каждой внутренней точке z' круга Q, для которой $f(z') = w'$, имеет место свойство T и образ начального отрезка хотя бы одной из прямых $l_1(z')$ и $l_2(z'')$ должен был бы войти внутрь круга q, чего нет по построению.

Теорема доказана.

Нам потребуется один достаточный критерий, обеспечивающий выполнение свойства T, который известен для случая полной дифференцируемости отображения $f = u + iv$, но который легко доказать и в данном случае.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если отображение* $f\colon D \to \mathbb{C}$ *обладает частными производными*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

в некоторой точке $z_0 \in D$ *и (формальный якобиан)*

$$J(z_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то в этой точке имеет место свойство T.

Другими словами, образы координатных линий u, v = const, пересекающихся в точке z_0, обладают различными касательными в точке $w_0 = f(z_0)$ и с нужным дополнительным условием относительно начальных отрезков этих линий.

Конечно, и в этом случае, даже при возможно неполной дифференцируемости u, v, касательные к образам линий u, v = const параллельны векторам $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, а последние, по условию теоремы, линейно независимы.

И в рассматриваемых, хотя и более ограничительных, условиях можно ввести формальные производные f_z, $f_{\bar z}$:

$$f_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$f_{\bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

а якобиан $J(f)$ отображения f представить в виде

$$J(z) = |f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2.$$

И здесь, конечно, для аналитической функции f имеем $f_{\bar z} = 0$, а для функции, сопряженной аналитической, $f_z = 0$.

Мы говорим о формальных производных потому, что в рассматриваемых условиях существования только частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ уже нельзя, например, считать, что справедлива формула

$$f_{\bar z} = \lim_{d(\Gamma)\to 0} \frac{1}{S}\int_{\Gamma} f(z)\,dz,$$

которая имеет место для f, обладающей полным дифференциалом. Здесь Γ — замкнутый контур, содержащий данную точку, $d(\Gamma)$ — его диаметр, а S — площадь области с границей Γ.

***Доказательство теоремы* 1.** Итак, мы имеем условия: 1) в замкнутом круге $\overline{Q}$ функция f удовлетворяет условию Липшица: 2) имеется всюду плотное в Q открытое множество O, в каждой компоненте которого либо f, либо ей сопряженная $\bar{f}$ является аналитической. При введенном дополнительном условии существования всюду в Q частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ требуется доказать, что либо f, либо $\bar{f}$ является аналитической во всем круге Q.

Возьмем вместо f функцию $g(z) = f(z) + \varphi(z)$, где $\varphi(z) = e^{Az}$. Выберем произвольные две точки z_1, z_2 из компонент аналитичности f и рассмотрим отображение, осуществляемое функцией

$$h(z) = \frac{g(z) - g(z_1)}{z - z_1} - \frac{g(z) - g(z_2)}{z - z_2} =$$

$$= \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - \frac{f(z) - f(z_2)}{z - z_2} + \frac{e^{Az} - e^{Az_1}}{z - z_1} - \frac{e^{Az} - e^{Az_2}}{z - z_2}.$$

В качестве значений соответствующих дробей в точках z_1, z_2 примем, конечно, значения производных числителя.

Покажем сначала, что при определенном выборе положительного A это отображение оказывается внутренним.

Для этого воспользуемся леммой и подсчитаем якобиан $J(h)$ в точках из Q.

В точках аналитичности f функция h будет аналитической, и при дальнейшем выборе A производная $h'(z) \neq 0$ в Q, а значит, $J(h) > 0$.

В точках „антианалитичности" f, т. е. там, где аналитической является сопряженная $\bar{f}$, имеем

$$h_z = -\frac{f(z) - f(z_1)}{(z - z_1)^2} + \frac{f(z) - f(z_2)}{(z - z_2)^2} + \frac{\varphi' \cdot (z - z_1) - [\varphi(z) - \varphi(z_1)]}{(z - z_1)^2} -$$

$$- \frac{\varphi' \cdot (z - z_2) - [\varphi(z) - \varphi(z_2)]}{(z - z_2)^2},$$

$$h_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{z - z_1} - \frac{f_{\bar{z}}}{z - z_2}.$$

Далее

$$-\frac{f(z) - f(z_1)}{(z - z_1)^2} + \frac{f(z) - f(z_2)}{(z - z_2)^2} = [f(z) - f(z_1)]\frac{(z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 2z)}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2} +$$

$$+ \frac{f(z_1) - f(z_2)}{(z - z_2)^2} = \frac{z_1 - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)^2}\left[\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1}(z_1 + z_2 - 2z) -\right.$$

$$\left. - \frac{f(z) - f(z_2)}{z - z_2}(z - z_1)\right] \frac{\varphi'(z - z_1) - [\varphi(z) - \varphi(z_1)]}{(z - z_1)^2} -$$

$$- \frac{\varphi' \cdot (z - z_2) - [\varphi(z) - \varphi(z_2)]}{(z - z_2)^2} = \varphi'\left(\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2}\right) -$$

$$- \frac{\varphi(z) - \varphi(z_1)}{(z - z_1)^2} + \frac{\varphi(z) - \varphi(z_2)}{(z - z_2)^2} = \varphi' \frac{z_1 - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)} +$$

$$+ \frac{z_1 - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)^2}\left[\frac{\varphi(z) - \varphi(z_1)}{z - z_1}(z_1 + z_2 - 2z) - \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{z_1 - z_2}(z - z_1)\right].$$

В результате получим

$$h_z = \frac{z_1 - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)^2}\left[\varphi' \cdot (z - z_2) + \frac{1}{2}\left[\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\varphi(z) - \varphi(z_1)}{z - z_1}\right]\left(\frac{z_1 + z_2}{2} - z\right) - \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} - \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{z_1 - z_2}\right],$$

$$h_{\bar z} = f_{\bar z} \cdot \frac{z_1 - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{z_1 - z_2}{(z - z_1)(z - z_2)^2} \cdot f_{\bar z}(z - z_2).$$

Напомним теперь, что f удовлетворяет условию Липшица

$$|f(z) - f(z')| \le L|z - z'|,$$

$$\varphi(z) = e^{Az},$$

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z')}{z - z'} \approx Ae^{Ax'}, \qquad |f_{\bar z}| \le L.$$

Взяв достаточно малый радиус круга Q и достаточно большое $A > 0$, легко достичь того, чтобы было $|h_z|^2 - |h_{\bar z}|^2 > 0$ (считая, что в Q $\operatorname{Re} z = x > 0$).

Наконец, в точках множества P получим

$$h_z = \frac{f_z(z - z_1) - [f(z) - f(z_1)]}{(z - z_1)^2} - \frac{f_z(z - z_2) - [f(z) - f(z_2)]}{(z - z_2)^2} + \ldots,$$

$$h_{\bar z} = \frac{f_{\bar z}}{z - z_1} - \frac{f_{\bar z}}{z - z_2}.$$

По сравнению с предыдущим случаем здесь возникают дополнительные слагаемые с f_z, влияние которых на значение $|h_z|$ можно „заглушить" увеличением числа A.

Итак, найдется такое A, что отображение h оказывается внутренним в области Q; напомним, что оно непрерывно в замкнутом круге Q.

Возьмем произвольную точку $z_0 \in P$ внутри Q и две произвольные последовательности $\{z_n'\}$, $\{z_n''\}$ точек аналитичности f, сходящихся к z_0. По доказанному выше каждое отображение h_n из последовательности $\{h_n(z)\}$:

$$h_n(z) = \frac{g(z) - g(z_n')}{z - z_n'} - \frac{g(z) - g(z_n'')}{z - z_n''}$$

является внутренним. Это означает, в частности, что максимум модуля $|h_n|$ достигается на границе ∂Q круга Q. Но, в силу аналитичности $\varphi = (z + A)^3$ выражение

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(z_n')}{z - z_n'} - \frac{\varphi(z) - \varphi(z_n'')}{z - z_n''}$$

стремится к нулю во всем замкнутом круге, а модуль $|h_n|$ на границе ∂Q, очевидно, также стремится к нулю. Это означает, в частности, стремление $h_n(z_0)$ к нулю и в точке z_0. Это же, наконец, означает существование производной $g'(z)$, а значит, и $f'(z_0)$ вдоль точек аналитичности функции f.

Аналогично, рассматривая сопряжение $\bar f$, приходим к выводу о существовании предела

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{\overline{z - z_0}}$$

в точках антианалитичности f.

Теперь легко видеть, что все это возможно лишь в случае, когда оба этих предела равны нулю.

Для этого возьмем произвольную последовательность $\{z_n\}$ точек из P, сходящихся к z_0: $\lim z_n = z_0$. В окрестности каждой точки z_n возьмем точку z_n' аналитичности f и точку z_n'' антианалитичности, причем так, чтобы $\dfrac{|z_n'' - z_n'|}{|z_n - z_0|} \to 0$. Поскольку f — липшицева, то

$$\lim \frac{f(z_n') - f(z_0)}{z_n' - z_0} = \lim \frac{f(z_n'') - f(z_0)}{z_n'' - z_0} = \lim \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}. \tag{3}$$

Пусть теперь этот предел не равен нулю. Так как по точкам аналитичности существует предел $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{\overline{z - z_0}}$, из (3) следует, что z_n, как и z_n', z_n'', приближаются к z_0 только по касательной к P, параллельной действительной оси. Пусть выше этой касательной (вблизи z_0) f аналитична и $\Delta f = ke^{i\alpha}\Delta z + o(\Delta z)$, а ниже $\Delta f = ke^{i\beta}\overline{\Delta z} + o(\Delta z)$. Из (3) следует, что модули соответствующих „производных” одинаковы.

Тогда, с одной стороны, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ike^{i\alpha}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -ike^{i\beta},$$

т. е. $\beta = \pi + \alpha$, а с другой, учитывая последовательности точек z_n', z_n'' и (3), имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ke^{i\alpha}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -ke^{i\alpha}$$

что может быть только при $k = 0$.

Итак, мы доказали, что если множество $P = D \setminus O$ непусто, то на нем функция f моногенна и ее производная f' всюду на P равна нулю.

Последним решающим шагом будет доказательство непрерывности частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ на множестве P относительно области D!

Итак, пусть $z_0 \in P$ — снова произвольная точка и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Найдется такое $\delta > 0$, что в круге $U_\delta(z_0)$

$$|f(z) - f(z_0)| = \varepsilon(z)(z - z_0), \qquad |\varepsilon(z)| < \varepsilon,$$

и для произвольных z', $z'' \in U_\delta \cap P$

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon|z' - z''|.$$

Обозначим $\delta_0 = \varepsilon\delta / L$ (L — константа Липшица для f); очевидно, можно предположить, что $\delta_0 < \delta$. Докажем, что в $U_{\delta_0} \setminus P$ имеют место равенства (для компонент соответствующего рода) $|f'(z)| \le 3\varepsilon$, $\left|\overline{f}'(z)\right| \le 3\varepsilon$.

Предположим, что в некоторой точке z_1 из компоненты $g \subset U \setminus P$ аналитичности f имеем $f'(z_1) = a$, $|a| > 3\varepsilon$.

Продолжим функцию $f|_{\overline{g}}$ с компоненты g на дополнение $U \setminus \overline{g}$ до липшицевой функции с константой ε: относительная граница ∂g в U принадлежит P и фактически с этой границы, как известно [6], можем продолжить f до нужной липшицевой функции даже на всю плоскость; но нам она потребуется только в $U \setminus g$. Эту новую функцию обозначим через $\tilde{f}$.

Рассмотрим теперь функцию

$$F(z) = \tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_0) - a(z - z_0).$$

В точках множества P функция F моногенна и $F' = a$, а в точках, внешних к $\bar{g}$, все производные числа по модулю больше 2ε.

В компоненте $g \subset U \setminus P$ она является аналитической и отличной от константы, иначе функция $f|_g$ была бы линейной и на границе $\partial g \cap P$ производная не равнялась бы нулю; т. е. она осуществляет невырожденное внутреннее отображение области g.

В дополнении $U \setminus \bar{g}$ она является даже гомеоморфизмом: для произвольных z', z'' из $U \setminus g$ имеем

$$|F(z') - F(z'')| \geq |a||z' - z''| - \left|\tilde{f}(z') - \tilde{f}(z'')\right| \geq (|a| - \varepsilon)|z' - z''|.$$

Рассмотрим произвольную точку $\tilde{z} \in U \setminus \bar{g}$ дифференцируемости $\tilde{f}$: известно [5], что множество ее производных чисел, т. е. предельных значений отношения $\dfrac{\tilde{f}(z) - \tilde{f}(\tilde{z})}{z - \tilde{z}}$, есть окружность $\mathfrak{M}_z$ с центром $\tilde{f}_z$ и радиусом $\left|\tilde{f}_{\bar{z}}\right|$ или точка. По условию это множество лежит в круге радиуса $< \varepsilon$; следовательно, для функции F эта окружность (диаметра $< 2\varepsilon$) отстоит от начала координат более чем на 2ε и, значит, в точке $\tilde{z}$

$$J(F) = |F_z|^2 |F_{\bar{z}}|^2 = \left|\tilde{f}_z - a\right|^2 - \left|\tilde{f}_{\bar{z}}\right|^2 > 3\varepsilon^2.$$

Это означает, что и весь гомеоморфизм $F|_{U \setminus \bar{g}}$ прямой, т. е. сохраняет локальную ориентацию замкнутых кривых.

Наконец, мы уже знаем, что $F|_P$ — гомеоморфизм. По известной теореме о продолжении [5] заключаем, что F на всей окрестности $U_\delta \supset U_{\delta_0}$ является (прямым) внутренним отображением. Имеем $F(z_0) = 0$ и образ окружности $K_0 : |z - z_0| = \delta$ при отображении $w = a(z - z_0)$ есть окружность $|w| = |a|\delta > 3\varepsilon\delta$.

Поскольку $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon|z - z_0| = \varepsilon\delta$, диаметр образа K_0 при отображении $w = f(z) - f(z_0)$ будет меньше $2\varepsilon\delta$. Отсюда следует, что все точки круга $|w| \leq \varepsilon\delta$ имеют порядок γ относительно образа $F(K_0)$, равный $+1$. Из принципа аргумента для внутреннего отображения следует, что все точки этого круга однократны в U_δ и прообраз его в U_δ есть область g_0, очевидно, содержащая точку z_0, в которой F — гомеоморфизм.

Оценим радиус круга $|z - z_0| \leq r$, принадлежащего g_0. Если $|w - w_0| = \rho$, то из условия Липшица получаем

$$|w - w_0| \leq L|z - z_0|,$$

т. е. для соответствующих точек z и z_0 имеем $|z - z_0| \geq \rho / L$. Отсюда следует, что область g_0 содержит, по крайней мере, круг $|z - z_0| \geq \varepsilon\delta / L = \delta_0$, т. е. U_{δ_0}.

Итак, $F|_{U_{\delta_0}}$ — гомеоморфизм. С другой стороны, в точке $z_1 \in U_{\delta_0} \setminus P$ имеем

$$F'(z_1) = f'(z_1) - a = 0.$$

Но в такой точке аналитическая функция не может быть даже локальным гомеоморфизмом. Полученное противоречие доказывает нужное неравенство $|f'(z) < 3\varepsilon|$ для точек аналитичности функции f. Но взятием сопряжения $\bar{f}$ функции f мы и для компонент антианалитичности ее точно так же докажем, что $\left|\bar{f}(z) < 3\varepsilon\right|$.

Все это и доказывает непрерывность производных $f'(z)$, $\bar{f}'(z)$ в точках P, на которых они обращаются в нуль.

Но тогда, если $P \neq 0$, то в каждой компоненте из $D \setminus P$ эти производные равны нулю в силу известной теоремы единственности: если в области D функция F аналитична и на открытой порции границы ∂D непрерывна и обращается в нуль, то она тождественно равна нулю во всей области D.

Возвращаясь к нашим условиям, убеждаемся теперь, что функция f есть константа.

Итак, мы показали, что в условиях теоремы 1 в области обязательно найдутся точки, где либо f, либо $\bar{f}$ оказывается аналитической, и если имеются точки обоих родов, то эта функция „вырождается" в константу.

А это и есть другая формулировка теоремы 1.

1. *Дзядык В. К.* Геометрическое определение аналитических функций // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 1. – С. 191 – 194.
2. *Goodman A.* On the criterium of analytical function // Amer. Math. Monthly. – 1964. – **71**. – P. 265 – 267.
3. *Трохимчук Ю. Ю., Сафонов В. М.* Об одном критерии постоянства комплексной функции // Укр. мат. журн. – 1999. – **1**, № 8. – С. 1096 – 1104.
4. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – М.: Наука, 1964. – 227 с.
5. *Трохимчук Ю. Ю.* Устранимые особенности аналитических функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.
6. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.

Получено 28.04.2006