УДК 519.21

М. О. Андрощук, Ю. С. Мішура (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОЦІНКА ЙМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ, ЯКА ФУНКЦІОНУЄ НА BS-РИНКУ

We perform the estimation of the ruin probability of an insurance company which invests some part of its capital into shares, and the rest of the capital into the current account. An insurance premium is established depending on the current reserve of the company.

Получена оценка вероятности разорения страховой компании, которая инвестирует часть собственного капитала в акции, а остальное — на банковский счет. Страховая премия устанавливается в зависимости от величины капитала страховой компании.

1. Вступ. Класична модель Крамера – Лундберга описує розмір капіталу установи, яка займається виключно страхуванням (див. [1]). Узагальненням даної моделі є модель з можливістю інвестування резервів страхової компанії (див. [2 – 4]).

У даній роботі розглядається модель ризику страхової компанії, яка інвестує певну частину свого капіталу в акції (ризиковий актив, змодельований за допомогою броунівського руху), а решту — на банківський рахунок (у безризиковий актив), тобто розглянуто страхового інвестора, який оперує на BS-ринку. Величина капіталу такого інвестора у момент t описується рівнянням, в якому всі інтеграли поки що записані формально:

$$R_t(u, K) = u - \sum_{k=1}^{N_t} U_k + \int_0^t p(R_s)ds + \int_0^t \frac{K_s}{S_s}\, dS_s + \int_0^t \frac{(R_s - K_s)}{e^{\delta s}}\, d(e^{\delta s}), \quad t \ge 0, \tag{1}$$

де $u > 0$ — початковий капітал страхової компанії (у момент $t = 0$); U_k, $k \ge 1$, — незалежні, однаково розподілені невід'ємні випадкові величини, що мають розподіл F та описують страхові виплати; $\{N_t, t \ge 0\}$ — пуассонівський процес надходження страхових вимог, що має інтенсивність β і не залежить від U_k, $k \ge 1$; $p(R_s)$ — процес надходження страхових внесків (який залежить від величини капіталу страхової компанії у момент s), де $p(x) : R \to R_+$ — деяка вимірна обмежена функція (на практиці функція $p(x)$ є, як правило, спадною, оскільки вона описує ціну страхового продукту, яку при досить великому власному капіталі страхова компанія може знизити, взявши на себе більший ризик неотримання прибутку з певного виду страхування); K_s / S_s — кількість акцій, якою володіє страхова компанія у момент s; $(R_s - K_s)$ — величина капіталу, інвестованого компанією у безризиковий актив з постійною ставкою інвестиційного доходу δ.

Зауважимо, що у даній моделі ми не накладатимемо обмежень $K_s \le R_s$, тобто вважатимемо, що страховик може як інвестувати, так і отримувати необмежений кредит з тією ж річною ставкою інвестиційного доходу δ.

Ціна акції S_t описується геометричним броунівським рухом:

$$dS_t = S_t(a\,dt + b\,dW_t), \qquad a, b \in R, \quad a \ge 0, \quad b > 0.$$

Надалі робимо стандартне припущення про незалежність сигма-алгебр, породжених процесами $\{W_t, t \geq 0\}$, $\{N_t, t \geq 0\}$ та випадковими величинами $\{U_k, k \geq 1\}$.

***Зауваження* 1.** Модель, у якій еволюція акцій описується за допомогою процесу Орнштейна – Уленбека, розглянуто в [4], а модель, у якій $\delta = 0$ та $p(R_s) = c = \text{const}$, досліджується у роботі [2]. Для останньої моделі знайдено оцінку ймовірності банкрутства страхової компанії: $\psi(u, K) \leq e^{-\hat{r}u}$, де $\hat{r}$ — єдиний додатний корінь рівняння $Ee^{\hat{r}U_1} - 1 = \dfrac{a^2}{2b^2} + c\hat{r}$.

У даній роботі знайдено аналогічну оцінку ймовірності банкрутства страхової компанії для більш загального процесу ризику (1).

Ми будемо припускати, що функція $p(x)$ і стратегія K_s є такими, для яких рівняння (1) має розв'язок на будь-якому відрізку $[0; T]$. Достатні умови для цього наведено у додатку.

2. Оцінка ймовірності банкрутства страхової компанії. Введемо фільтрацію $F_t = \sigma\left\{S_s, N_s, \sum_{k=1}^{N_s} U_k, s \in [0, t]\right\}$ і позначимо $E_t(\cdot) \overset{\text{df}}{=} E(\cdot / F_t)$.

Перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$R_t(u, K) = u - \sum_{k=1}^{N_t} U_k + \int_0^t p(R_s) ds +$$

$$+ a\int_0^t K_s\, ds + \int_0^t (R_s - K_s)\delta\, ds + b\int_0^t K_s\, dW_s, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

З'ясуємо умови, за яких усі доданки в рівнянні (1) коректно визначені. Очевидно, повинні виконуватись умови:

K_1) процес K_t, що дорівнює сумі коштів, інвестованих у ризиковий актив, є F_t-передбачуваним;

K_2) $E\int_0^t K_s^2\, ds < \infty, \quad t \geq 0;$

P_1) $\exists C > 0 : |p(x)| \leq C \quad \forall x \geq 0.$

Умови K_1 та K_2 потрібні для коректної визначеності інтеграла за вінерівським процесом, з умови K_2 випливає також коректність визначення інтеграла $\int_0^t K_s\, ds$, а умова P_1 застосовується у доведенні існування розв'язку інтегрального рівняння (2) (див. додаток).

Далі вважаємо умови K_1, K_2, P_1 виконаними.

Введемо деякі позначення:

$\tau(u) \overset{\text{df}}{=} \inf\{t \geq 0 : R_t \leq 0\}$ — момент банкрутства страхової компанії; $\tau(u) = +\infty$, якщо $R_t > 0$ для всіх $t > 0$.

$X_t(u, K, r) \overset{\text{df}}{=} e^{-rR_t(u,K)}$, $r \in [0, \infty)$, тобто

$$X_t(u, K, r) = e^{-ru} \exp\left\{-r\left(-\sum_{k=1}^{N_t} U_k + \int_0^t p(R_s) ds +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ a\int_0^t K_s\, ds + \int_0^t (R_s - K_s)\delta\, ds + b\int_0^t K_s\, dW\right)\right\};$$

$h(r) \overset{\text{df}}{=} Ee^{rU_1} - 1$ — моментна функція з властивостями: $h(\cdot): R_+ \to R_+$, $h(0) = 0$. Щодо функції $h(r)$ робимо класичне припущення про існування значення $r_\infty \in (0, \infty]$ такого, що $h(r) < \infty$ при $r < r_\infty$ та $h(r) \to \infty$ при $r \uparrow r_\infty$. Функція $h(r)$ є зростаючою, опуклою донизу та неперервною на $[0, r_\infty)$ (див. [5]).

Теорема 1. *Нехай для деякого* $r > 0$, *стратегії* K_t *та цінової функції* $p(x)$ *виконуються умови* P_1, K_1, K_2, *а також мають місце співвідношення*:

$\mathrm{K}_3)$ $$\frac{r^2b^2}{2} K_t^2 + r(\delta - a)K_t - rp(R_t) - rR_t\delta + \beta h(r) \leq 0$$

майже напевно для $t \geq 0$;

$\mathrm{R}_1)$ $$\mathrm{P}\left\{\int_{0+}^{t} e^{-rR_{s-}}|R_s|ds < \infty\right\} = 1, \quad t \geq 0;$$

$\mathrm{R}_2)$ $$\mathrm{P}\left\{\int_{0+}^{t} e^{-2rR_{s-}}K_s^2\, ds < \infty\right\} = 1, \quad t \geq 0;$$

$\mathrm{R}_3)$ $$\mathrm{P}\left\{\int_{0+}^{t} e^{-rR_{s-}}\, ds < \infty\right\} = 1, \quad t \geq 0.$$

Тоді процес $\{X_t(u, K, r), t \geq 0\}$ *є супермартингалом відносно потоку* σ-*алгебр* F_t; *якщо ж в умові* K_3 *має місце рівність, то процес* $\{X_t(u, K, r), t \geq 0\}$ *є локальним мартингалом відносно* F_t.

Доведення. Згідно з формулою (2), що визначає процес $\{R_t(u, K, r), t \geq 0\}$, має місце рівність

$$X_t(u, K, r) = e^{-ru} \exp\left\{r\sum_{k=1}^{N_t} U_k\right\} \exp\left\{-r\int_0^t \big(p(R_s) + aK_s + (R_s - K_s)\delta\big)ds\right\} \exp\left\{-rb\int_0^t K_s\, dW_s\right\}.$$

Подамо процес $\{X_t(u, K, r), t \geq 0\}$ у вигляді експоненти:

$$X_t(u, K, r) = e^{-rR_t(u,K)} \overset{\text{df}}{=} e^{Y_t(u,K,r)}, \quad t \geq 0,$$

де

$$Y_t(u, K, r) = Y_0 + r\sum_{k=1}^{N_t} U_k + \int_0^t f(s)ds + \int_0^t g(s)dW_s,$$

$$Y_0 \overset{\text{df}}{=} -ru, \qquad f(s) \overset{\text{df}}{=} -r\big(p(R_s) + aK_s + (R_s - K_s)\delta\big), \qquad g(s) \overset{\text{df}}{=} -rbK_s.$$

Процес $X_t(u, K, r) = e^{-rR_t(u,K)}$ є семімартингалом внаслідок формули Іто, застосованої до експоненціальної функції $f(x) = e^{-rx}$, та семімартингальності процесу $R_t(u, K)$. Остання ж отримується внаслідок того, що процес $R_t(u, K)$ є сумою мартингалів та процесів обмеженої варіації. Так, процес $-b\int_0^t K_s\, dW_s$ є квадратично інтегровним мартингалом внаслідок умови K_2, процес $\sum_{k=1}^{N_t} U_k - \beta t EU_1$ — мартингалом як компенсований процес з незалежними приростами, а процеси $\beta t E U_1$, $-\int_0^t p(R_s)ds$, $-a\int_0^t K_s\,ds$, $-\int_0^t (R_s - K_s)\delta\,ds$ — процесами обмеженої варіації $\Bigl(\beta t E U_1$ — очевидно, $-\int_0^t p(R_s)ds$ — внаслідок умови P_1, $-a\int_0^t K_s\,ds$ та $-\int_0^t (R_s - K_s)\delta\,ds$ — оскільки за умовою K_2 $\mathrm{P}\left\{\int\limits_0^1 |K_s|ds < \infty\right\} = 1$, а також внаслідок нерівності Гроноулла для довільного $T > 0: |R_t| \le \tilde{C}(T)e^{\delta t}$, де

$$\tilde{C}(T) \overset{\mathrm{df}}{=} u + CT + (a-\delta)\int\limits_0^T |K_s|ds + b\sup_{s\in[0,T]}\left|\int\limits_0^s K_z\,dW_z\right|,$$

$\sup\limits_{s\in[0,T]}\left|\int\limits_0^s K_z\,dW_z\right| < \infty$ P-майже напевно внаслідок умови K_2 $\Bigr)$.

Запишемо формулу Іто для семімартингалів (див. [6, с. 78, 79]): для семімартингала $\{Y_t, t \ge 0\}$ та $F \in C^2(R)$ маємо

$$F(Y_t) - F(Y_0) = \int\limits_{0+}^t F'(Y_{s-})dY_s + \frac{1}{2}\int\limits_{0+}^t F''(Y_{s-})d\langle Y, Y\rangle_s^c + $$
$$+ \sum_{0<s\le t}\Bigl(F(Y_s) - F(Y_{s-}) - F'(Y_{s-})\Delta Y_s\Bigr). \tag{3}$$

У даному випадку $F(y) = F'(y) = F''(y) = e^y$ і, отже, (3) набирає вигляду

$$e^{Y_t} = e^{Y_0} + \int\limits_{0+}^t e^{Y_{s-}}dY_s + \frac{1}{2}\int\limits_{0+}^t e^{Y_{s-}}d\langle Y, Y\rangle_s^c + \sum_{0<s\le t}\left(e^{Y_s} - e^{Y_{s-}} - e^{Y_{s-}}(Y_s - Y_{s-})\right), \tag{4}$$

де $Y_{t-}(u, K, r) = Y_0 + r\sum\limits_{k=1}^{N_{t-}} U_k + \int\limits_0^t f(s)ds + \int\limits_0^t g(s)dW_s$.

Маємо

$$Y_t - Y_{t-} = rU_{N_t} I\{\Delta N_t \ne 0\}, \tag{5}$$

$$e^{Y_s} - e^{Y_{s-}} = e^{Y_{s-}}(e^{Y_s - Y_{s-}} - 1) = e^{Y_{s-}}(e^{rU_{N_t}I\{\Delta N_t \ne 0\}} - 1), \tag{6}$$

$$d\langle Y, Y\rangle_t^c = g^2(t)dt. \tag{7}$$

Отже, з огляду на (5) – (7), а також враховуючи те, що майже на всіх траєкторіях Y_s, $s \in [0, 1]$, має скінченну кількість стрибків, (4) можна переписати у вигляді

$$e^{Y_t} = e^{Y_0} + \int\limits_{0+}^t e^{Y_{s-}}\left(f(s) + \frac{1}{2}g^2(s)\right)ds + \int\limits_{0+}^t e^{Y_{s-}}g(s)dW_s + $$
$$+ \sum_{0<s\le t} e^{Y_{s-}}(e^{rU_{N_s}I\{\Delta N_s \ne 0\}} - 1).$$

Зауважимо, що з умови R_2 випливає коректна визначеність інтеграла $\int_{0+}^t e^{Y_{s-}}g(s)dW_s$. Згідно з тією ж умовою та з результатами [7, с. 126], процес $M_t \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{0+}^t e^{Y_{s-}}g(s)dW_s$ є локальним квадратично інтегровним мартингалом, оскільки при

$$\tau_N \overset{\text{df}}{=} \inf\left\{t \geq 0: \int\limits_0^t (e^{Y_{s-}} g(s))^2\, ds \geq N\right\} \wedge N, \quad N \geq 1,$$

маємо

$$\mathrm{P}\{\tau_N < T\} \leq \mathrm{P}\left\{\int\limits_0^T (e^{Y_{s-}} g(s))^2\, ds \geq N\right\} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

для $N > T$, тобто $\{\tau_N, N \geq 1\}$ є марковськими моментами, причому для них, очевидно, виконуються умови $\mathrm{P}\{\tau_N \leq N\} = 1$, $\mathrm{P}\{\tau_N \leq \tau_{N+1}\} = 1$, $\tau_N \uparrow \infty$, (P-майже напевно), і, крім того, процес $\int_{0+}^{t\wedge\tau_N} e^{Y_{s-}} g(s)\, dW_s$ є квадратично інтегровним мартингалом.

Процес $P_t \overset{\text{df}}{=} \sum\limits_{0<s\leq t} e^{Y_{s-}}(e^{rU_{N_s} I\{\Delta N_s \neq 0\}} - 1)$ є майже напевно неспадним процесом. Запишемо даний процес в інтегральному вигляді $P_t = \int_0^t e^{Y_{s-}}\, dO_s$, де $O_t \overset{\text{df}}{=}$ $\overset{\text{df}}{=} \sum\limits_{0<s\leq t} (e^{rU_{N_s} I\{\Delta N_s \neq 0\}} - 1)$, $t \geq 0$. За тотожністю Вальда

$$\mathrm{E} \sum_{0<s\leq t} (e^{rU_{N_s} I\{\Delta N_s \neq 0\}} - 1) = \mathrm{E} \sum_{k=1}^{N_t} (e^{rU_k} - 1) = \beta t h(r) \Rightarrow \mathrm{E} O_t < \infty \quad \forall t \geq 0;$$

крім того, процес $\{O_t, t \geq 0\}$ має незалежні прирости, тому відповідний компенсований процес $\{O_t - \mathrm{E}O_t, t \geq 0\}$ є мартингалом.

Розглянемо послідовність $\sigma_N \overset{\text{df}}{=} \inf\{t \geq 0 : Y_t \geq N\} \wedge N$, $N \geq 1$, яка є послідовністю марковських моментів зупинки та для якої мають місце очевидні властивості $\mathrm{P}\{\sigma_N \leq N\} = 1$, $\mathrm{P}\{\sigma_N \leq \sigma_{N+1}\} = 1$ і, крім того, $\sigma_N \uparrow \infty$ (P-майже напевно), оскільки $\mathrm{P}\{\sigma_N < T\} \leq \mathrm{P}\left\{\sup\limits_{t\in[0;T]} \{-rR_t\} \geq N\right\} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ майже напевно. Остання властивість має місце як наслідок визначення процесу ризику $\{R_t, t \geq$ $\geq 0\}$: даний процес може набувати від'ємних значень внаслідок здійснення страхових виплат U_k, $k \geq 1$, але за скінченний час буде здійснено не більш ніж скінченну кількість виплат, розмір яких є скінченним з імовірністю 1. Отже, процес $P_t - \beta h(r) \int_{0+}^t e^{Y_{s-}}\, ds$ є локальним мартингалом, оскільки процес

$$\int\limits_0^{t\wedge\sigma_N} e^{Y_{s-}} d\big(O_s - \mathrm{E}O_s\big) = P_{t\wedge\sigma_N} - \beta h(r) \int\limits_{0+}^{t\wedge\sigma_N} e^{Y_{s-}}\, ds$$

— мартингал.

За властивістю локальних мартингалів (див., наприклад, [6, с. 37]) процес $M_t + P_t - \beta h(r) \int_{0+}^t e^{Y_{s-}}\, ds$ є також локальним мартингалом з фундаментальною послідовністю $\tau_N \wedge \sigma_N$, $N \geq 1$.

Розглянемо різницю процесів

$$V_t \overset{\text{df}}{=} X_t - X_0 - M_t - \left(P_t - \beta h(r) \int\limits_{0+}^t e^{Y_{s-}}\, ds\right).$$

Виконуючи відповідні підстановки, маємо

$$V_t \;=\; \int_{0+}^{t} e^{Y_{s-}}\Big(f(s) + \frac{1}{2}\, g^2(s) + \beta h(r)\Big)\, ds \;=$$

$$= \int_{0+}^{t} e^{-rR_{s-}}\Big(-r\big(p(R_s) + aK_s + (R_s - K_s)\delta\big) + \frac{1}{2}\, r^2 b^2 K_s^2 + \beta h(r)\Big)\, ds.$$

Зауважимо, що з умов K_2, R_2 та нерівності Гронуолла для $\{R_t,\ t \geq 0\}$ випливає істинність умови

$$R_4) \qquad P\left\{ \int_{0+}^{t} e^{-rR_{s-}} K_s^2\, ds < \infty \right\} = 1.$$

Інтеграл Лебега $\{V_t,\ t \geq 0\}$, записаний вище, є коректно визначеним внаслідок умов R_3, R_2, R_1 та R_4.

У випадку, коли „залишковий" процес $\{V_{t\wedge\tau_N\wedge\sigma_N},\ t \geq 0,\ N \geq 1\}$ є передбачуваним спадним процесом, згідно з розкладом Дуба – Мейєра (див., наприклад, [6, с. 105]), процес

$$X_t \;=\; X_0 \;+\; M_t \;+\; P_t \;-\; \beta h(r) \int_{0+}^{t} e^{Y_{s-}}\, ds \;+\; V_t$$

буде локальним супермартингалом. Передбачуваність процесу V_t є очевидною, оскільки він неперервний по t. Отже, перевіримо, за яких умов процес $\{V_{t\wedge\tau_N\wedge\sigma_N},\ t \geq 0,\ N \geq 1\}$ є спадним.

Властивість

$$V_T - V_t \;=\; \int_{t+}^{T} e^{Y_{s-}}\Big(f(s) + \frac{1}{2}\, g^2(s) + \beta h(r)\Big)\, ds \;\leq\; 0 \qquad \forall T \geq 0, \quad t \in [0; T],$$

зокрема, має місце при недодатному підінтегральному виразі в лівій частині, тобто при виконанні нерівності

$$e^{Y_{s-}}\Big(-r\big(p(R_s) + aK_s + (R_s - K_s)\delta\big) + \frac{1}{2}\, r^2 b^2 K_s^2 + \beta h(r)\Big) \;\leq\; 0. \tag{8}$$

майже напевно, $s \in (t; T]$. Нерівність (8) має місце внаслідок умови K_3.

Таким чином, процес

$$X_t(u, K, r) \;=\; e^{Y_t(u,K,r)} \;=\; X_0 + M_t + P_t - \beta h(r) \int_{0+}^{t} e^{Y_{s-}}\, ds + V_t$$

є невід'ємним локальним супермартингалом, а отже, і супермартингалом відносно потоку σ-алгебр F_t. (Останнє твердження є наслідком леми Фату: для будь-якого $T \geq 0$, $t \in [0; T]$ мають місце співвідношення

$$E_t X_T \;=\; E_t \lim_{N\to\infty} X_{T\wedge\tau_N\wedge\sigma_N} \;=\; E_t \varliminf_{N\to\infty} X_{T\wedge\tau_N\wedge\sigma_N} \;\overset{\text{л.Фату}}{\leq}$$

$$\overset{\text{л.Фату}}{\leq} \;\varliminf_{N\to\infty} E_t X_{T\wedge\tau_N\wedge\sigma_N} \;\overset{\text{лок.супермарт.}}{\leq}\; \varliminf_{N\to\infty} X_{t\wedge\tau_N\wedge\sigma_N} \;=\; X_t,$$

що й потрібно було показати.)

Теорему 1 доведено.

Зауваження 2. Припустимо, що умови K_2 та $R_1 - R_3$ виконуються із заміною верхньої межі інтегрування на $t \wedge \tau(u)$ (це навіть більш слабке припущення, ніж було досі), а умова K_3 виконується при всіх $0 \le t \le \tau(u)$. Тоді аналогічно до попереднього можна довести, що процес $\{X_{t\wedge\tau(u)}(u, K, r), t \ge 0\}$ буде супермартингалом відносно потоку σ-алгебр F_t.

Знайдемо оцінку ймовірності банкрутства страхової компанії, капітал якої описується процесом (1).

Теорема 2. *Нехай виконується умова* P_1 *і* $a > \delta$. *Тоді для моделі ризику, описаної рівнянням* (1), *при сталій інвестиційній стратегії*

$$K_t = \frac{a-\delta}{\hat{r}b^2}, \quad t \ge 0, \tag{9}$$

має місце верхня оцінка ймовірності банкрутства:

$$P\{\tau(u) < \infty\} \le e^{-\hat{r}u}, \tag{10}$$

де $\hat{r}$ — *єдиний додатний розв'язок рівняння*

$$\beta h(\hat{r}) = \frac{(\delta-a)^2}{2b^2} + \hat{r}\inf_{x\ge 0}\{p(x) + x\delta\}. \tag{11}$$

Доведення. Для інвестиційної стратегії (9) умови K_1 та K_2, очевидно, виконуються. Перевіримо, за яких умов має місце умова K_3 при $0 \le t \le \tau(u)$. Розглянемо формально нерівність

$$\frac{r^2b^2}{2}K_t^2 + r(\delta - a)K_t - rp(R_t) - rR_t\delta + \beta h(r) \le 0. \tag{12}$$

З'ясуємо, за яких умов дискримінант лівої частини цієї квадратичної нерівності буде невід'ємним:

$$D = r^2(\delta-a)^2 - 2r^2b^2\big(-rp(R_t) - rR_t\delta + \beta h(r)\big) \ge 0. \tag{13}$$

Достатньою умовою виконання нерівності (13) на інтервалі $[0; \tau(u)]$ є умова

$$\beta h(r) \le \inf_{x\ge 0}\{rp(x) + rx\delta\} + \frac{(\delta-a)^2}{2b^2}. \tag{14}$$

Отже, при виконанні нерівності (14) та при $K_t \in [K_{1t}, K_{2t}]$, де

$$K_{1t} = \frac{ra - r\delta - \sqrt{D}}{r^2b^2} = \frac{a - \delta - \sqrt{(\delta-a)^2 - 2b^2\big(-rp(R_t) - rR_t\delta + \beta h(r)\big)}}{rb^2},$$

$$K_{2t} = \frac{ra - r\delta + \sqrt{D}}{r^2b^2} = \frac{a - \delta + \sqrt{(\delta-a)^2 - 2b^2\big(-rp(R_t) - rR_t\delta + \beta h(r)\big)}}{rb^2},$$

нерівність (12) має місце на $[0; \tau(u)]$.

Максимальне значення r, при якому має місце нерівність (14), — це значення, при якому в (14) досягається рівність, а оскільки ліва частина (14) є зростаючою опуклою донизу функцією відносно r, що проходить через початок координат, а права частина — зростаючою лінійною відносно r функцією, яка перетинає вісь ординат у невід'ємній точці $\dfrac{(\delta-a)^2}{2b^2}$, то таке значення існує і до того ж єдине.

Отже, при сталій $\hat{r}$, яка є розв'язком рівняння (11), та інвестиційній стратегії $\{K_t, t \ge 0\}$, означеній в (9), яка завжди належить проміжку $[K_{1s}, K_{2s}]$, мають місце нерівності (13) та (12), іншими словами, умова K_3 на $[0; \tau(u)]$.

Умови $R_1 - R_3$ виконуються внаслідок нерівності Гронуолла (див. [8, с. 192]). Наприклад, доведемо нерівність R_1: $\mathrm{P}\left\{\int\limits_{0+}^{t\wedge\tau(u)} e^{-rR_{s-}}|R_s|ds < \infty\right\} = 1, \; t \ge 0.$

Для довільного фіксованого $T > 0$ знайдемо оцінку зверху для процесу $\{|R_s|, s \in [0; t \wedge \tau(u) \wedge T]\}$, використавши зображення (2) та нерівність Гронуолла

$$|R_s| = R_s \le u + Cs + \frac{(a-\delta)^2}{\hat{r}b^2}s + \delta\int\limits_0^s R_z\,dz + b\,\frac{a-\delta}{\hat{r}b^2}|W_s - W_0| \le C_1(\omega)e^{\delta s},$$

де

$$C_1(\omega) \overset{\mathrm{df}}{=} u + \left(C + \frac{(a-\delta)^2}{\hat{r}b^2}\right)T + b\,\frac{a-\delta}{\hat{r}b^2}\max_{z\in[0,T]}|W_z|.$$

Таким чином,

$$\int\limits_{0+}^{t\wedge\tau(u)} e^{-\hat{r}R_{s-}}|R_s|ds \le \int\limits_{0+}^{t} C_1(\omega)e^{\delta s}\,ds < \infty$$

майже напевно, тобто умова R_1 має місце на $[0; \tau(u) \wedge T]$. Аналогічно доводиться істинність умов R_2 та R_3 на $[0; \tau(u) \wedge T]$.

Отже, на $[0; \tau(u) \wedge T]$ виконуються усі умови теореми 1 і, згідно з цією теоремою та зауваженням 2, а також оскільки $T > 0$ — довільна стала, процес $\{X_{t\wedge\tau(u)}(u, K, \hat{r}), t \ge 0\}$ є супермартингалом відносно потоку σ-алгебр F_t.

Введемо позначення $\breve{X}_t(u, K, \hat{r}) \overset{\mathrm{df}}{=} X_{t\wedge\tau(u)}(u, K, \hat{r})$. Тоді $\{\breve{X}_t(u, K, \hat{r}), t \ge 0\}$ є F_t-супермартингалом, звідки

$$e^{-\hat{r}u} = \breve{X}_0(u, K, \hat{r}) \overset{\text{супермарт. вл.}}{\ge} \mathrm{E}\breve{X}_t(u, K, \hat{r}) = \mathrm{E}X_{\tau(u)}(u, K, \hat{r})I\{\tau(u) < t\} +$$

$$+ \mathrm{E}X_t(u, K, \hat{r})I\{\tau(u) \ge t\} \ge \mathrm{E}X_{\tau(u)}(u, K, \hat{r})I\{\tau(u) < t\},$$

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}X_{\tau(u)}(u, K, \hat{r})I\{\tau(u) < t\} = \mathrm{E}X_{\tau(u)}(u, K, \hat{r})I\{\tau(u) < \infty\}.$$

Таким чином,

$$e^{-\hat{r}u} \ge \mathrm{E}\{X_{\tau(u)}(u, K, \hat{r})/\tau(u) < \infty\}\mathrm{P}\{\tau(u) < \infty\} \Rightarrow$$

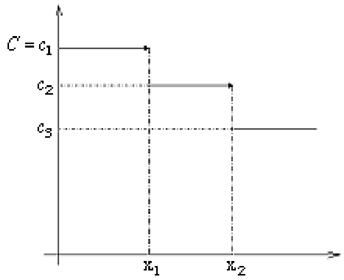
$$\mathrm{P}\{\tau(u) < \infty\} \le \frac{e^{-\hat{r}u}}{\mathrm{E}\{X_{\tau(u)}(u, K, \hat{r})/\tau(u) < \infty\}} \le e^{-\hat{r}u}.$$

Остання нерівність має місце внаслідок того, що $R_{\tau(u)} < 0$ за означенням $\tau(u)$ і тому $X_{\tau(u)}(u, K, r) = e^{-\hat{r}R_{\tau(u)}(u,K)} > 1$. Отже, теорему 2 доведено.

***Зауваження* 3.** При $p(x) = c = \mathrm{const}$, $\delta = 0$, та постійній інвестиційній стратегії $K_t = \dfrac{a-\delta}{rb^2}$ $\forall t \ge 0$ отримуємо результат статті [2]: $\psi(u, K) \le e^{-\hat{r}x}$, де $\hat{r}$ — корінь рівняння $\beta h(\hat{r}) = \hat{r}c + \dfrac{a^2}{2b^2}$.

Приклад. Розглянемо дискретну модель зниження ціни в залежності від величини капіталу страхової компанії:

$$p(x) = \begin{cases} c_1, & x < x_1, \\ c_2, & x \in [x_1; x_2), \\ c_3, & x \geq x_2. \end{cases} \quad \text{де} \quad C = c_1 \geq c_2 \geq c_3 \quad \text{(див. рисунок)},$$



(Дана модель пояснюється зниженням ризикового навантаження до страхового тарифу при досить великому капіталі страхової компанії.)

Тоді, згідно з теоремою 2, при сталій інвестиційній стратегії $K_t = \dfrac{a-\delta}{rb^2}$ має місце оцінка ймовірності банкрутства $\mathrm{P}\{\tau(u) < \infty\} \leq e^{-\hat{r}u}$, де $\hat{r}$ — розв'язок рівняння

$$\beta h(\hat{r}) = \frac{(\delta - a)^2}{2b^2} + \hat{r}\min\{c_1; c_2 + \delta x_1; c_3 + \delta x_2\}.$$

Аналогічний результат можна одержати для довільної спадної кусково-сталої функції $p(x)$.

***Зауваження* 4.** Для такої дискретної моделі встановлення розміру страхової премії не можна застосувати результати Гайєра та Шахермайєра [2], оскільки процес $\{X_t = e^{-rR_t}, t \geq 0\}$ при $K_t = \dfrac{a-\delta}{rb^2}$, $t \geq 0$, взагалі кажучи, не є мартингалом $\Bigg($ процес $\{X_t,\ t \geq 0\}$ може мати мартингальну властивість лише при $K_t = \dfrac{r(a-\delta) - \sqrt{D}}{r^2b^2}$ або $K_t = \dfrac{r(a-\delta) + \sqrt{D}}{r^2b^2}$, $t \geq 0$, де D визначено в (13) $\Bigg)$. Мартингальність же процесу $\{X_t, t \geq 0\}$, згідно з [2], є необхідною умовою отримання оцінки зверху ймовірності банкрутства страхової компанії, яка функціонує на BS-ринку.

3. Додаток.

Означення 1. *Згідно з* [9, *с.* 194], *говоримо, що інтегральне рівняння*

$$x_t + \int_0^t A(t-s)G(x_s)\,ds = F(t), \quad t \in [0; T], \tag{15}$$

де $G(\cdot) \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(-\infty; \infty)$, $A(\cdot) \in L^1[0; T]$, $F(\cdot) \in L^{\infty}[0; T]$, *має „проміжний" розв'язок на* $[0; t_0)$, *якщо існує таке* $t_0 \in (0; T)$ *і пара функцій* $x_t \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}[0; t_0)$ *та* $y_t \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}[0; t_0)$, *для яких*

$$\underline{G}(x_t) \leq y_t \leq \overline{G}(x_t) \quad \textit{майже скрізь}, \quad t \in [0; t_0), \tag{16}$$

де $\underline{G}(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \operatorname*{ess\,inf}\limits_{|x-y|<\varepsilon}\{G(y)\}$, $\overline{G}(x) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{|x-y|<\varepsilon}\{G(y)\}$, *та*

$$x_t + \int_0^t A(t-s) y_s\, ds = F(t), \qquad t \in [0; t_0). \tag{17}$$

Згідно з теоремою 1 роботи [9, с. 194], за виконання наступних умов: $A(\cdot) \in L^1[0;T]$, $F(\cdot) \in L^\infty[0;T]$, $G(\cdot) \in L^\infty_{\text{loc}}(-\infty;\infty)$ існують $t_0 \in (0;T)$ і пара функцій x_t та y_t, для яких виконується нерівність (16) та має місце рівність (17), тобто існує „проміжний” розв'язок рівняння (15). Більш того, згідно з теоремою 2 [9, с. 195], якщо $\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0;t_0)} |x_t| < \infty$, то розв'язок можна продовжити на інтервал $[0; t^*)$, де $t^* > t_0$. Отже, продовжити розв'язок не можна лише у випадку, коли $\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0;t_0)} |x_t| = \infty$.

Розглянемо рівність (1) (або, що те саме, (2)) при кожному фіксованому $\omega \in \Omega$ як рівняння відносно функції R_t на фіксованому, хоча і випадковому, відрізку $[0;T]$ для деякого $T > 0$. Вважаємо, що процес K_t є сталим, тобто $K_t \equiv K > 0$. В рівнянні (2)

$$\begin{gathered} x_t \overset{\text{df}}{=} R_t, \\ F(t) \overset{\text{df}}{=} u - \sum_{k=1}^{N_t} U_k + (a-\delta)\int_0^t K_s\, ds + b\int_0^t K_s\, dW_s, \end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered} A(t) \overset{\text{df}}{\equiv} 1, \\ G(x) \overset{\text{df}}{=} -p(x) - \delta x. \end{gathered} \tag{19}$$

У даному випадку $G(\cdot) \in L^\infty_{\text{loc}}(-\infty;\infty)$ внаслідок умови P_1 та обмеженості лінійної функції на компактних множинах; $A(\cdot) \in L^1[0;T]$ для будь-якого $T > 0$; $F(\cdot) \in L^\infty[0;T]$, оскільки

$$|F(t)| \le C_2(\omega) := u + \sum_{k=1}^{N_T} U_k + (a-\delta)Kt + bKt \max_{t \in [0;T]} |W_t| < \infty$$

$$\text{майже напевно}, \quad t \in [0;T].$$

Отже, виконуються умови теореми 1 роботи [9, с. 194], результатом застосування якої є твердження про існування підінтервалу $[0; t_0(\omega)) \subset [0;T]$, на якому існує розв'язок R_t рівняння (2) у сенсі означення 1, тобто „проміжний” розв'язок.

Таким чином, P-майже напевно існує $t_0 = t_0(\omega) > 0$ та пара функцій R_t та y_t, що задовольняють таку модифікацію рівняння (2):

$$R_t + \int_0^t y_s\, ds = F(t),$$

де $F(t)$ задовольняє (18), а y_s — (16) з функцією $G(\cdot)$ з (19). При цьому, використовуючи нерівність (16) та лему Гронуолла, дуже легко перевірити, що $\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0;t_0(\omega))} |R_t| < \infty$ P- майже напевно. Отже, „проміжний” розв'язок рівняння (2) існує на всьому $[0;T]$.

Тепер з'ясуємо, коли $\underline{G}(R_t) \neq \overline{G}(R_t)$. Це можливо лише тоді, коли R_t належить точці розриву функції $G(\cdot)$. Отже, при виконанні умови

P$_2$) функція $p \in C(R)$

рівняння (2) матиме розв'язок у звичайному розумінні на $[0; T]$, тобто буде існувати процес $\{R_t, t \in [0; T]\}$, що перетворює (1) на тотожність.

Нехай виконується умова

P$_3$) функція $p(x) \in BV[-x_0; x_0]$ для будь-якого $x_0 > 0$.

Тоді $p(x)$ має не більш ніж зліченну множину точок розриву на R. Позначимо цю множину через $R(p)$. Розглянемо рівняння (1) на відрізку $[0; T]$ для будь-якого $T > 0$. Зауважимо, що з імовірністю 1 множина точок $t \in [0; T] : \underline{G}(R_t) \neq \overline{G}(R_t)$ є об'єднанням множин вигляду $\{t : R_t = x_t\}$, $x_t \in R(p)$. „Проміжний" розв'язок рівняння (1) можна подати у вигляді

$$R_t = F(t) - \int_0^t y_s \, ds. \tag{20}$$

Права частина (20) містить напівмартингал вигляду

$$u + bKW_t + \int_0^t \big((a - \delta)K_s - y_s\big) ds - \sum_{k=1}^{N_t} U_k.$$

За теоремами 5.45 та 5.47 роботи [10] цей напівмартингал має скінченний локальний час у будь-якій точці x_k, а тому міра Лебега $\lambda\big(\{t : R_t = x_t\} \cap [0; T]\big) = 0$ P-майже напевно. Це означає, що рівняння (1) і в цьому випадку має звичайний розв'язок на $[0; T]$. Таким чином, доведено наступний результат.

Лема 1. *Якщо* $p \in C(R) \cup BV_{\text{loc}}(R)$, *то рівняння* (1) *має розв'язок при сталій стратегії* K_s *на будь-якому відрізку* $[0; T]$.

Автори висловлюють вдячність професору І. О. Парасюку за корисну консультацію щодо існування розв'язків інтегральних рівнянь із розривними коефіцієнтами.

1. *Asmussen S.* Ruin probabilities. – Singapore: World Sci., 2001. – 385 p.
2. *Gaier J., Grandits P., Schachermayer W.* Asymptotic ruin probabilities and optimal investment // Ann. Appl. Probab. – 2003. – **13**. – P. 1054 – 1076.
3. *Мішура Ю. С.* Оцінка ймовірностей банкрутства для моделей з довгостроковою залежністю // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2005. – **72**. – С. 93 – 100.
4. *Баєв А. В., Бондарев Б. В.* Про ймовірність банкрутства страхової компанії, що функціонує на BS-ринку // Там же. – 2006. – **74**. – С. 10 – 22.
5. *Grandell J.* Aspects of risk theory. – Berlin: Springer, 1990. – 175 p.
6. *Protter P. E.* Stochastic integration and differential equations. – Berlin: Springer, 2004. – 410 p.
7. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
8. *Elliott R. J.* Stochastic calculus and applications. – New York: Springer, 1982. – 302 p.
9. *Kiffe T.* A discontinuous Volterra integral equation // J. Integr. Equat. – 1979. – **1**. – P. 193 – 200.
10. *Jacod J.* Calcul stochastique et problemes de martingales // Lect. Notes Math. – 1979. – **714**. – 539 p..

Одержано 28.02.06