УДК 530.1, 517.9

Ю. И. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КОГЕРЕНТИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ ТЕПЛОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ДВУХКАНАЛЬНОЙ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ УПРАВЛЕНИЯ

A mathematical model of open bilinear control system for the conversion of heat energy in the coherent form is proposed and examined. It is shown that the use of combinational parametric resonance created by the control system in one-temperature ensemble of weakly dissipative elasto-gyroscopic subsystems enables one to obtain a positive energetic output without application of any cooling device apart from the control system.

Запропоновано та досліджено математичну модель відкритої білінійної системи керування для перетворення теплової енергії в когерентну форму. Показано, що використання комбінаційного параметричного резонансу, який утворюється системою керування в однотемпературному ансамблі слабко дисипативних пружно-гіроскопічних підсистем, дозволяє отримати додатний енергетичний вихід без застосування якого-небудь охолоджуючого пристрою, крім системи керування.

1. Общая характеристика рассматриваемой задачи. Вопросы, обсуждаемые в предлагаемой статье, восходят к периоду становления термодинамики, творцами которой были С. Карно (1824 г.), Р. Клаузиус (1850 г.), В Томсон (лорд Кельвин) (1851 г.), впервые сформулировавшие так называемое второе начало этой научной дисциплины, представляющее собой одно из фундаментальных положений общей физики и в настоящее время. Дж. Максвелл, внесший огромный вклад в электродинамику и статистическую физику, являясь также одним из родоначальников теории автоматического регулирования, в разделе книги „Теория теплоты" (1871 г.), названном „Ограничения второго начала термодинамики", предложил идею автомата, сортирующего молекулы по скоростям и создающего достаточные условия для получения механической энергии из тепловой, как бы вопреки второму началу термодинамики. В. Томсон, увлеченный этой идеей, предложил называть подобное гипотетическое устройство „демоном Максвелла". Разумеется, оба эти знаменитые ученые отдавали себе отчет в том, что реально речь здесь может идти только об измерении параметров флуктуаций, относительная интенсивность которых тем больше, чем меньше объект наблюдения, условно называемый „молекулой", и потому только параллельная работа многих „демонов" может дать практически значимый результат. Как вскоре выяснилось, и впоследствии подтверждалось многими исследователями, даже в принципе, измерения на микроуровне требуют затрат энергии, имеющих ненулевой нижний предел. Следовательно, затраты на работу коллектива „демонов" неизбежно увеличиваются по крайней мере пропорционально количеству добываемой с их помощью механической (в широком смысле) полезной энергии.

Насколько известно автору, до недавнего времени, несмотря на быстрый прогресс в квантовой и молекулярной электронике, не удавалось осуществить, хотя бы на модельном уровне, превышение энергетического выхода над энергозатратами на пути реализации идеи демона Максвелла. Более того, во многих работах предлагались различные варианты обоснования невозможности такого результата, но всякий раз дело сводилось к прямому или косвенному обращению ко второму началу термодинамики, на ограничение применимости которого указывают сам Максвелл и его сторонники. Вместе с тем, не исключено, что контрпримеры, построенные на основе физически реализуемых моделей рабочих сред, и разработка способов управления их состоянием на микроуровне помогут внести необходимую ясность в оценивание физического предела эффективности преобразования тепловой энергии в механическую работу и другие когерентные формы.

2. Методы и предварительные результаты. Реализация этой достаточно сложной программы, по-видимому, невозможна без применения асимптотических методов теории нелинейных колебаний, создание и обоснование которых связано с именами Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского, А. М. Самойленко [1 – 4]. Многие конкретные примеры эффективного использования этих методов послужили основой для написания монографии [5], где наряду с другими вопросами, такими как управление плазмой, рассмотрены методы управления процессами в классических и квантовых статистических ансамблях. Со ссылкой на статью [6] приведено решение задачи об управлении переносом энергии тепловых флуктуаций в двухтемпературном ансамбле линейных осцилляторов, попарно связанных посредством параметрической модуляции потенциала их взаимодействия друг с другом и с внешним управляющим полем. Для получения формул энергетического баланса с физически приемлемой точностью в работе [6] были выведены „укороченные" уравнения, дающие возможность фактически описать эволюцию квадратурных составляющих осцилляций, вызываемых δ-коррелированными флуктуационными силами Найквиста. Поскольку рассмотренный в [6] ансамбль был двухтемпературным, результат анализа оказался в полном соответствии со вторым началом термодинамики. В частности, при равенстве температур $T_1 = T_2$ подансамблей с частотами ω_1 и ω_2 $(\omega_2 > \omega_1)$ система управления переходами в спектре заселенностей энергетических уровней могла лишь отдавать свою энергию указанным подансамблям, но при $\dfrac{T_2}{T_1} > \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ система управления оказалась способной получать некоторую часть энергии в когерентной форме, т. е. совместное по двум каналам воздействие флуктуаций совершало в среднем (по времени и статистически) положительную работу на обобщенном циклическом „перемещении" органа управления, которым являлось управляющее колебание параметра потенциальной связи. При обратном соотношении температур и частот, когда $\dfrac{T_2}{T_1} < \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$, оказалось возможным реализовать принудительное охлаждение, но не более горячего подансамбля, а наоборот — более холодного. При этом система управления работала подобно холодильнику, потребляя энергию от некоторого внешнего источника и одновременно передавая тепло от охлаждаемой подсистемы к более горячей.

Попытка получить эффект преобразования тепловой энергии в когерентную форму управляющих колебаний при $T_1 = T_2$ не могла принести желаемого результата без дальнейшего усложнения структуры сил в подсистемах, имеющих по две степени свободы у каждой из них. Как выяснилось, лишь только за счет внесения асимметрии относительно обращения времени в управляющие колебания невозможно ориентировать энергетические потоки в пространстве состояний системы управления. Действительно, для получения пилообразной формы колебаний накачки требуются минимум две гармоники, причем каждая из них должна быть резонансной для связи осцилляторов с частотами ω_1 и ω_2. Такая возможность реализуется при рациональном отношении суммарной и разностной частот. Например, когда желательно сформировать накачку в виде суммы первой и второй гармоник, достаточно положить $\omega_2 = 3\omega_1$. Тогда $\Omega^{(+)} = \omega_1 + \omega_2 = 4\omega_1$, $\Omega^{(-)} = \omega_2 - \omega_1 = 2\omega_1$, т. е. $\Omega^{(+)} = 2\,\Omega^{(-)}$. Но в укороченных уравнениях никакие структурные изменения при этом не происходят, так что при $T_1 = T_2$ положительный энергетический выход не получается.

Рассмотрению возникающей ситуации с более общих позиций помогает следующий результат, полученный автором и его коллегами при решении оптимизационной задачи управления квантовым статистическим ансамблем по энергетическому критерию, подробное изложение которой приведено в [5].

Теорема (об оптимальных перестановках). *Пусть группа управляемости G, генерируемая гамильтонианом управляемой системы $\hat{H}(t,u)$, гомоморфна симметрической группе S_n, причем* $\mathrm{Hom}\colon G \to S_n$ *реализуется действием сопряжения* $g^{-1}\hat{\lambda}g = \pi(\hat{\lambda})$, $g \in G$, $\hat{\lambda} \in \Lambda(n)$, $\hat{\pi} \in S_n$, *где* $\Lambda(n)$ — *пространство диагональных матриц размерности n. Тогда решение оптимизационной задачи с моментным энергетическим функционалом существует и принадлежит прообразу S_n в G.*

Из теоремы об энергетической оптимальности перестановок в спектре непосредственно следует необходимость затрат энергии на любую операцию по управлению состоянием термодинамически равновесного ансамбля, поскольку такой ансамбль характеризуется монотонным убыванием (с учетом вырождения) заселенностей по энергетической шкале. Фактически это утверждение можно рассматривать как одну из эквивалентных математических формулировок, отражающих физический смысл второго начала термодинамики. Теперь становится понятным, почему для рассмотренной в [6] модели тепловой машины только в случае различных температур подансамблей осцилляторов с одноканальным резонансным управлением удается получить положительный энергетический выход. Причина состоит не в том, что было применено управляющее воздействие, симметричное относительно реверса во времени, а в равновесности совокупности двух подансамблей при равенстве их температур $(T_1 = T_2)$ и в использовании только одного канала управления в виде потенциальной модулированной связи.

3. Дополнение элементарных подсистем гироскопическими связями. Принципиально иной путь создания неравновесной ситуации в ансамбле подсистем с двумя степенями свободы, имеющими постоянный термический контакт с однотемпературным резервуаром (одно- или двухемкостным) тепловой энергии, был исследован на модельном уровне в работе [7]. Чтобы избежать повторения тупиковой ситуации, когда используется простейшая двухосцилляторная модель подсистемы ансамбля, имеющая только взаимодействие между двумя осцилляторами в виде модулированной упругой связи, структура сил была дополнена гироскопической составляющей. Вследствие усложнения процедуры составления необходимых для асимптотического анализа „укороченных" уравнений на первом этапе модуляция коэффициента гироскопической связи не предусматривалась, а модулировалась только потенциальная энергия взаимодействия в пределах каждой подсистемы. На втором этапе включались оба вида модуляции.

Анализ зависимости от параметров настройки усредненной по времени и статистически выходной мощности, предпринятый в [7] с применением формулы Найквиста [8] для случая $T_1 = T_2$, дал такие результаты:

без модуляции каких-либо из двух каналов положительный суммарный энергетический выход невозможен ни при каких параметрах настройки;

при синхронной модуляции как потенциальной связи, так и гироскопической (с фазовым опережением $\pi/2$) существует непустая открытая область параметров настройки, при которых сумма усредненных энергетических выводов, получаемых от обоих каналов, имеет положительное значение.

Под усредненными энергетическими выходами подразумеваются средние (по скользящему интервалу „быстрого" времени и статистическому распределению δ-коррелированных флуктуационных сил Найквиста) мощности, развиваемые совместным силовым воздействием флуктуаций (взаимнокоррелированных управляющими колебаниями в пределах каждой элементарной подсистемы) на обобщенных скоростях изменения во времени обобщенных координат модуляторов коэффициентов связей.

Полученные результаты объясняются следующими причинами:

каждый из каналов управления в отдельности не может генерировать достаточно полную группу управляемости, способную вызывать значительные, учитываемые в ε-приближении отклонения от статистического равновесия однотемпературного ансамбля элементарных подсистем; соответственно, теорема об оптимальных перестановках предопределяет невозможность положительного энергетического выхода;

некоммутативность операторов управляющих воздействий по гироскопическому и потенциальному каналам позволяет генерировать группу управляемости настолько полную, что она оказывается достаточной для отклонения управляемого ансамбля от равновесия на величину, учитываемую асимптотическим ε-приближением.

***Замечание* 1.** Хотя в [7] модуляция вводилась не в лагранжиан, а непосредственно в систему уравнений, что не эквивалентно и не корректно с точки зрения физической реализации, это не привело к ошибочному выводу, однако повлияло на вид результирующих формул. Ниже этот дефект исходной модели устранен.

4. Представление модели в лагранжевой форме. Продолжая исследования, предпринятые в [5 – 7], полагаем, что предлагаемая модель состоит из большого числа $N >> 1$ не связанных между собой, но синхронно моделируемых билинейной системой управления структурно идентичных между собой элементарных подсистем с двумя гироскопически связанными осцилляторными степенями свободы. Энергия теплового возбуждения рабочей среды δ-коррелированными силами Найквиста вводится в каждую из элементарных подсистем через включенные в них резисторы. Использовав удобные для анализа обозначения [7], запишем лагранжиан исследуемой элементарной подсистемы в виде

$$L = L_0 + \varepsilon L^{(u)} + \varepsilon L^{(g)} + \varepsilon L^{(f)}, \qquad 0 < \varepsilon << 1,$$

где

$$L_0 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}g(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) - \frac{1}{2}\left(\mu x_1^2 + \frac{1}{\mu}x_2^2\right),$$

$$L^{(u)} = -x_0^{(u)} x_1 x_2, \qquad L^{(g)} = -\frac{1}{2}x_0^{(g)}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1),$$

$$x_0^{(u)} = 2k_0 \sin \Omega t, \qquad x_0^{(g)} = 2l_0 \cos \Omega t,$$

$$L^{(f)} = f_1 x_1 + f_2 x_2.$$

Здесь x_α, $\dot{x}_\alpha$, f_α, $\alpha = \overline{1,2}$, — обобщенные координаты, скорости и силы соответственно, относящиеся к исследуемой элементарной подсистеме управляемого ансамбля; $x_0^{(u)}$, $x_0^{(g)}$ — обобщенные координаты органов управления (модуляторов), действующих, соответственно, по каналам потенциального и гироскопического взаимодействий. Параметрически моделирующие управляющие воздействия по этим каналам представлены сдвинутыми на $\pi/2$ простыми гармоническими колебаниями с амплитудами k_0, l_0 и одной и той же частотой

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu},$$

равной разности собственных частот $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ и $\sqrt{\nu}$ элементарной подсистемы при наличии гироскопической связи с коэффициентом g. Отношение собственных частот при $g = 0$ обозначено через μ.

Характеристическое уравнение порождающей системы, иначе говоря, системы начального (нулевого по ε) приближения, соответствующей невозмущенному лагранжиану L_0, связывает μ и ν с коэффициентом g соотношением

$$\mu\nu g^2 = (\mu - \nu)(1 - \mu\nu), \tag{1}$$

а также условиями

$$0 < \nu < \mu < 1, \quad \nu \neq \frac{1}{3}, \tag{2}$$

из которых первое обеспечивает положительность g^2, а второе, как будет понятно далее, — отсутствие некоторых нежелательных параметрических резонансов.

Силы вязкого трения вводятся в модель посредством диссипативной функции Рэлея

$$R = \varepsilon\frac{1}{2}(r_1\dot{x}_1^2 + r_2\dot{x}_2^2).$$

Уравнения Лагранжа, дополненные силами вязкого трения, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_\alpha} = 0, \quad \alpha = \overline{1,2}. \tag{3}$$

В развернутой форме они записываются следующим образом:

$$\ddot{x}_1 - g\dot{x}_2 + \mu x_1 + \varepsilon r_1\dot{x}_1 + \varepsilon x_0^{(u)}x_2 - \varepsilon x_0^{(g)}\dot{x}_2 - \varepsilon\frac{1}{2}\dot{x}_0^{(g)}x_2 = \varepsilon f_1,$$

$$\ddot{x}_2 + g\dot{x}_1 + \frac{1}{\mu}x_2 + \varepsilon r_2\dot{x}_2 + \varepsilon x_0^{(u)}x_1 + \varepsilon x_0^{(g)}\dot{x}_1 + \varepsilon\frac{1}{2}\dot{x}_0^{(g)}x_1 = \varepsilon f_2.$$

Более компактная запись этих уравнений достигается применением векторно-матричных обозначений: $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ — вектор обобщенных координат, $\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ — вектор сторонних сил (сил Найквиста), $\hat{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ — единичная матрица, $\hat{\mathrm{J}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ — элементарная симплектическая матрица, $\hat{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ — перестановочная матрица,

$$\hat{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\mu}} \end{bmatrix} \tag{4}$$

— матрица собственных частот при $g = 0$,

$$\hat{\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\nu} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\nu}} \end{bmatrix} \tag{5}$$

— матрица собственных частот при $g \neq 0$,

$$\hat{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

— матрица диссипативных параметров,

$$\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{I}}\frac{d^2}{dt^2} + g\hat{\mathrm{J}}\frac{d}{dt} + \hat{\mathrm{M}}^2 \tag{7}$$

— матричный оператор порождающей системы,

$$\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{R}}\frac{d}{dt} + x_0^{(u)}\hat{\mathrm{P}} + x_0^{(g)}\hat{\mathrm{J}}\frac{d}{dt} + \frac{1}{2}\dot{x}_0^{(g)}\hat{\mathrm{J}} \tag{8}$$

— матричный оператор, выражающий действие диссипативных сил и параметрической модуляции.

Теперь уравнения (3) можно представить в виде

$$\hat{\mathrm{A}}\vec{x} + \varepsilon\hat{\mathrm{B}}\vec{x} = \varepsilon\vec{f}\,. \tag{9}$$

Таким образом, исследуемая модель, формально говоря, представлена линейной неоднородной системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Эта система характеризуется наличием малого параметра ε при сторонних силах в правых частях уравнений, силах вязкого трения, а также при периодических коэффициентах и сторонних силах флуктуационно-диссипативной термической природы (силах Найквиста).

Выбором параметров настройки следует распорядиться так, чтобы система сохраняла устойчивость по отношению к раскачке собственных колебаний, но чтобы вынужденные колебания, вызываемые силами Найквиста, приобретали взаимную корреляцию за счет синхронной параметрической модуляции коэффициентов по двум каналам — потенциальному и гироскопическому. Вследствие отсутствия непосредственного взаимодействия между элементарными подсистемами, обменивающимися энергией только с общей системой управления и собственными диссипативными нагретыми элементами, генерирующими флуктуационные силы Найквиста, энергетический баланс достаточно определить для любой из этих эквивалентных подсистем.

Если система управления предполагается открытой системой в физическом значении этого определения, то наряду с координатами, относящимися к внутренним степеням свободы (здесь это x_1 и x_2), в представление ее состояния на момент t входят и координаты управляющих исполнительных органов (в данном случае $x_0^{(u)}$ и $x_0^{(g)}$). Обобщенная сила $f_0^{(u)}$, действующая со стороны управляемой подсистемы (пребывающей в данный момент времени t в положении, заданном значениями координат x_1 и x_2) на модулятор потенциальной связи (находящийся в этот же момент времени в состоянии, определяемом значением его обобщенной координаты $x_0^{(u)}$), выражается согласно обычной формуле лагранжевой механики:

$$f_0^{(u)} = \frac{\partial L^{(u)}}{\partial x_0^{(u)}} = -x_1 x_2. \tag{10}$$

Следует обратить внимание на то, что это есть сила реакции объекта управления, воздействие которой на себя воспринимает модулятор потенциальной связи.

Мощность, передаваемая в момент t от объекта управления исполнительному органу устройства (модулятору потенциальной связи), есть произведение силы (10) на скорость $\dot{x}_0^{(u)}$ изменения обобщенной координаты $x_0^{(u)}$, определяющей положение на момент t исполнительного органа:

$$W_{\text{out}}^{(u)}(t) = -\dot{x}_0^{(u)} x_1 x_2. \tag{11}$$

Аналогично, частотным дифференцированием $L^{(g)}$ по обобщенной координате

$x_0^{(g)}$ модулятора гироскопической связи находится сила воздействия со стороны управляемой подсистемы на модулятор этой связи с той лишь разницей, что данная сила, в отличие от $f_0^{(u)}$, зависит как от x_1, x_2, так и от $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$:

$$f_0^{(g)} = \frac{\partial L^{(g)}}{\partial x_0^{(g)}} = -\frac{1}{2}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1).$$

Мгновенное значение мощности, развиваемой силой $f_0^{(g)}$ при изменении координаты $x_0^{(g)}$ со скоростью $\dot{x}_0^{(g)}$, задается формулой

$$W_{\text{out}}^{(g)}(t) = -\frac{1}{2}\dot{x}_0^{(g)}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1). \tag{12}$$

Усреднение формул (11), (12) по скользящему интервалу „быстрого” времени и статистически дает возможность с практически приемлемой точностью определить энергетические выходы по каждому из каналов параметрической модуляции и суммарный выход по обоим каналам:

$$W_{\text{out}}^{(u)} = -\overline{\widetilde{\dot{x}_0^{(u)} x_1 x_2}}, \tag{13}$$

$$W_{\text{out}}^{(g)} = -\frac{1}{2}\overline{\widetilde{\dot{x}_0^{(g)}(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1)}}, \tag{14}$$

$$W_{\text{out}}^{(\Sigma)} = W_{\text{out}}^{(u)} + W_{\text{out}}^{(g)}. \tag{15}$$

Здесь и ниже прямая черта над выражением обозначает усреднение по времени, а волнистая — статистическое усреднение.

5. Вывод и решение „укороченных” уравнений, определяющих эволюцию комплексных амплитуд осцилляций переменных x_1, x_2. Получение асимптотических выражений x_1, x_2, необходимых для подстановки в (13), (14), упрощается, если воспользоваться приемом комплексификации предполагаемых решений системы (9) и последующего их овеществления по В. И. Арнольду. Положив $\varepsilon = 0$ в системе (9), получим однородную порождающую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d^2}{dt^2} + \mu & -g\dfrac{d}{dt} \\ g\dfrac{d}{dt} & \dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{1}{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = 0. \tag{16}$$

Предположив зависимость $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$ от t пропорциональной $e^{i\omega t}$, составим характеристическое уравнение для системы (16):

$$\det\begin{bmatrix} \mu - \omega^2 & -i\omega g \\ i\omega g & \dfrac{1}{\mu} - \omega^2 \end{bmatrix} = \omega^4 - \left(g^2 + \mu + \frac{1}{\mu}\right)\omega^2 + 1 = 0. \tag{17}$$

Подстановкой $\omega^2 = \lambda$ оно приводится к квадратному уравнению $\lambda^2 - \left(g^2 + \mu + \dfrac{1}{\mu}\right)\lambda + 1 = 0$. По теореме Виета произведение его корней равно единице, а сумма их равна $g^2 + \mu + \dfrac{1}{\mu}$. Полагая, что решения порождающей системы имеют характер свободных незатухающих колебаний, делаем вывод, что λ

должно быть положительным вещественным числом, принимающим значения ν и $\frac{1}{\nu}$, так что $\nu + \frac{1}{\nu} = g^2 + \mu + \frac{1}{\mu}$. При этом коэффициент гироскопической связи g является вещественным, если соблюдено условие (2). Очевидно, что равенство (1) действительно является прямым следствием характеристического уравнения (17), а матрица (5) составлена из положительных значений собственных частот системы (16), которые при $g \to 0$ стремятся к соответствующим элементам матрицы (4).

Комплексифицированное общее решение $\vec{x}^0$ однородной системы (16), как нетрудно проверить, имеет вид

$$\vec{x}^0 = \hat{S}\hat{\Lambda}\vec{a}^0,$$

где

$$\vec{a}^0 = \begin{bmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \end{bmatrix}$$

— вектор комплексных амплитуд, играющих роль (при $\varepsilon = 0$) произвольных констант интегрирования,

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} e^{it\sqrt{\nu}} & 0 \\ 0 & e^{it\frac{1}{\sqrt{\nu}}} \end{bmatrix}$$

— матрица осцилляций с единичными амплитудами,

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{i\alpha}{\sqrt{\mu}} \\ -i\alpha\sqrt{\mu} & 1 \end{bmatrix}$$

— матрица модальных столбцов, где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu - \nu}{1 - \mu\nu}},$$

причем

$$\det \hat{S} = \frac{(1+\mu)(1-\nu)}{1 - \mu\nu} \neq 0.$$

Таким образом,

$$\begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\alpha\sqrt{\mu} \end{bmatrix} a_1^0 e^{it\sqrt{\nu}} + \begin{bmatrix} -i\alpha\frac{1}{\sqrt{\mu}} \\ 1 \end{bmatrix} a_2^0 e^{it\frac{1}{\sqrt{\nu}}}.$$

Здесь представлена сумма двух эллиптически поляризованных двумерных колебаний с противоположными вращениями на частотах $\sqrt{\nu}$ и $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$. Общая ориентация этих вращений зависит от знака g и, соответственно, знака параметра α, который далее считаем фиксированным, для определенности — положительным. Амплитуды и фазы пока произвольны.

Овеществление решения можно осуществить как формальным выделением вещественной части $\operatorname{Re}\vec{x}^0$ из комплексифицированного решения $\vec{x}^0$, так и сложением $\vec{x}^0$ с его комплексно-сопряженным выражением $(\vec{x}^0)^*$, что, разумеется, дает $2\operatorname{Re}\vec{x}^0$. В физических приложениях более распространенным является второй способ, который здесь рассмотрим.

Перейдем к формальному построению асимптотического решения ε-возмущенной векторно-матричной системы (9), применив метод медленно меняющихся амплитуд, имеющий в линейном случае строгое обоснование, если не допускаются резонансы, понижающие порядки членов ε-приближения. Теперь „разморозим" комплексные амплитуды и будем искать решение вещественной векторно-матричной системы (9) в виде вещественного вектора

$$\vec{x} = \hat{S}\hat{\Lambda}\vec{a} + (\hat{S}\hat{\Lambda}\vec{a})^*, \tag{18}$$

где $\vec{a} = \vec{a}(\tau)$ — комплекснозначная вектор-функция вещественного „медленного" времени

$$\tau = (\varepsilon t)\frac{1}{\theta}, \tag{19}$$

в определение которого входит, кроме малого параметра ε, $0 < \varepsilon << 1$, постоянная времени θ нулевого по ε порядка:

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\mu\nu}}\left[(\mu-\nu)(1+\mu\nu)^2 + (\mu+\nu)^2(1-\mu\nu)\right] \sim \varepsilon^0, \tag{20}$$

которая в дальнейшем сокращается.

При подстановке (18) с учетом (19) в (9) используем следующие формулы и обозначения:

$$\frac{d}{dt}(\hat{S}\hat{\Lambda}\vec{a}) = i\hat{S}\hat{N}\hat{\Lambda}\vec{a} + \frac{\varepsilon}{\theta}\hat{S}\hat{\Lambda}\frac{d}{d\tau}\vec{a}, \tag{21}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\hat{S}\hat{\Lambda}\vec{a}) = -\hat{S}\hat{N}^2\hat{\Lambda}\vec{a} + \frac{\varepsilon}{\theta}2i\hat{S}\hat{N}\hat{\Lambda}\frac{d}{d\tau}\vec{a} + \frac{\varepsilon^2}{\theta^2}\hat{S}\hat{\Lambda}\frac{d^2}{d\tau^2}\vec{a}, \tag{22}$$

$$\hat{M}^2\hat{S} - \hat{S}\hat{N}^2 + ig\hat{J}\hat{S}\hat{N} = \hat{0} \quad \text{(с учетом (1))}, \tag{23}$$

$$\left(\hat{I}\frac{d^2}{dt^2} + g\hat{J}\frac{d}{dt} + \hat{M}^2\right)\hat{S}\hat{\Lambda}\vec{a} =$$

$$= \left(\hat{M}^2\hat{S} - \hat{S}\hat{N}^2 + ig\hat{J}\hat{S}\hat{N}\right)\hat{\Lambda}\vec{a} + \frac{\varepsilon}{\theta}\left(2i\hat{S}\hat{N} + g\hat{J}\hat{S}\right)\hat{\Lambda}\frac{d}{d\tau}\vec{a} + \frac{\varepsilon^2}{\theta^2}\hat{S}\hat{\Lambda}\frac{d^2}{d\tau^2}\vec{a}. \tag{24}$$

В итоге вследствие (23) формула (24) упрощается:

$$\left(\hat{I}\frac{d^2}{dt^2} + g\hat{J}\frac{d}{dt} + \hat{M}^2\right)\hat{S}\hat{\Lambda}\vec{a} = \frac{\varepsilon}{\theta}\left(\hat{T}\hat{\Lambda}\frac{d\vec{a}}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{\theta}\hat{S}\hat{\Lambda}\frac{d^2\vec{a}}{d\tau^2}\right). \tag{25}$$

Здесь

$$\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{\mu\nu}}\begin{bmatrix} i\sqrt{\mu}(\mu+\nu) & (1+\mu\nu)\alpha \\ (1+\mu\nu)\alpha & i\frac{1}{\sqrt{\mu}}(\mu+\nu) \end{bmatrix},$$

причем

$$\hat{T}^{-1} = -\frac{1-\mu\nu}{\theta}\begin{bmatrix} i\frac{1}{\sqrt{\mu}}(\mu+\nu) & -(1+\mu\nu)\alpha \\ -(1+\mu\nu)\alpha & i\sqrt{\mu}(\mu+\nu) \end{bmatrix}.$$

Поскольку матричный оператор (7) вещественный, для получения результата его действия на второе слагаемое в правой части выражения (18), определяющего $\vec{x}$, достаточно применить операцию $(\cdot)^*$ комплексного сопряжения к обеим частям формулы (25). В результате получим

$$\left(\hat{I}\frac{d^2}{dt^2} + g\hat{J}\frac{d}{dt} + \hat{M}^2\right)\left(\hat{S}\hat{\Lambda}\vec{a}\right)^* = \frac{\varepsilon}{\theta}\left(\hat{T}^*\hat{\Lambda}^*\frac{d\vec{a}^*}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{\theta}\hat{S}^*\hat{\Lambda}^*\frac{d^2\vec{a}^*}{d\tau^2}\right). \tag{26}$$

Складывая равенства (25) и (26), имеем

$$\hat{\Lambda}\vec{x} = \frac{\varepsilon}{\theta}\hat{T}\hat{\Lambda}\left[\frac{d\vec{a}}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{\theta}\hat{\Lambda}^{-1}(\hat{T}^{-1}\hat{S})\hat{\Lambda}\frac{d^2\vec{a}}{d\tau^2}\right] +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{\theta}\hat{T}\hat{\Lambda}\left[\hat{\Lambda}^{-1}(\hat{T}^{-1}\hat{T}^*)\hat{\Lambda}^{-1}\frac{d\vec{a}^*}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{\theta}\hat{\Lambda}^{-1}(\hat{T}^{-1}\hat{S}^*)\hat{\Lambda}^{-1}\frac{d^2\vec{a}^*}{d\tau^2}\right]. \tag{27}$$

Здесь использована обратимость матриц $\hat{\Lambda}$ и $\hat{T}$. Первая из них — диагональная с заведомо ненулевыми элементами, а $\hat{T}^{-1}$ существует при любых μ и ν в силу (2) и (20). Кроме того, здесь учтено, что $\hat{\Lambda}^* = \hat{\Lambda}^{-1}$.

Представление первого слагаемого, стоящего в левой части уравнения (9), в виде (27) является подготовительным этапом для применения процедуры усреднения по „быстрому" времени t, от которого явным образом зависят произведения матриц, содержащие быстро осциллирующие матрицы $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Lambda}^{-1}$. Действия, аналогичные приведенным выше, выполним и с остальными возмущающими членами уравнения (9). Так как при них уже стоит малый коэффициент ε и они не содержат сингулярно возмущающих дифференциальных операторов второго порядка, при подстановке производных в форме (21) (или сопряженной с ней) достаточно учитывать только первое слагаемое, имеющее нулевой порядок по ε.

Руководствуясь целесообразностью выделения перед усреднением общего множителя $\frac{1}{\theta}\hat{T}\hat{\Lambda}$ из всех членов уравнения (9), выполним нужные выкладки и получим для них следующие формулы с соблюдением оговоренной точности:

$$\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{T}^{-1}\hat{R}\frac{d}{dt}\vec{x} = \theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{T}^{-1}\hat{R}\frac{d}{dt}\left(\hat{S}\hat{\Lambda}\vec{a} + \hat{S}^*\hat{\Lambda}^*\vec{a}^*\right) =$$

$$= \hat{\Lambda}^{-1}\left(i\theta\hat{T}^{-1}\hat{R}\hat{S}\hat{N}\right)\hat{\Lambda}\vec{a} - \hat{\Lambda}^{-1}\left(i\theta\hat{T}^{-1}\hat{R}\hat{S}^*\hat{N}\right)\hat{\Lambda}^{-1}\vec{a}^* + O_1(\varepsilon), \tag{28}$$

$$\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{T}^{-1}x_0^{(u)}\hat{P}\vec{x} = x_0^{(u)}\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{T}^{-1}\hat{P}\left(\hat{S}\hat{\Lambda}\vec{a} + \hat{S}^*\hat{\Lambda}^*\vec{a}^*\right) =$$

$$= 2k_0\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}\right)t\left[\hat{\Lambda}^{-1}\left(\theta\hat{T}^{-1}\hat{P}\hat{S}\right)\hat{\Lambda}\vec{a} + \hat{\Lambda}^{-1}\left(\theta\hat{T}^{-1}\hat{P}\hat{S}^*\right)\hat{\Lambda}^{-1}\vec{a}^*\right], \tag{29}$$

$$\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{T}^{-1}x_0^{(g)}\hat{J}\frac{d}{dt}\vec{x} = x_0^{(g)}\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{T}^{-1}\hat{J}\frac{d}{dt}\left(\hat{S}\hat{\Lambda}\vec{a} + \hat{S}^*\hat{\Lambda}^*\vec{a}^*\right) =$$

$$= 2l_0\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}\right)t\left[\hat{\Lambda}^{-1}\left(i\theta\hat{T}^{-1}\hat{J}\hat{S}\hat{N}\right)\hat{\Lambda}\vec{a} - \hat{\Lambda}^{-1}\left(i\theta\hat{T}^{-1}\hat{J}\hat{S}^*\hat{N}\right)\hat{\Lambda}^{-1}\vec{a}^*\right] + O_2(\varepsilon), \tag{30}$$

$$\frac{1}{2}\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{T}^{-1}\dot{x}_0^{(g)}\hat{J}\vec{x} = \frac{1}{2}\dot{x}_0^{(g)}\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{T}^{-1}\hat{J}\left(\hat{S}\hat{\Lambda}\vec{a} + \hat{S}^*\hat{\Lambda}^*\vec{a}^*\right) =$$

$$= -l_0\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}\right)t\left[\hat{\Lambda}^{-1}\left(\theta\hat{T}^{-1}\hat{J}\hat{S}\right)\hat{\Lambda}\vec{a} + \hat{\Lambda}^{-1}\left(\theta\hat{T}^{-1}\hat{J}\hat{S}^*\right)\hat{\Lambda}^{-1}\vec{a}^*\right]. \tag{31}$$

Что касается правой части уравнения (9), то, благодаря резонансным избирательным свойствам левой части этого уравнения, на широкополосное (вследствие δ-коррелированности) силовое воздействие тепловых флуктуаций Найквиста система реагирует так же, как если бы на нее действовали модулированные „белым" шумом внешние силы, осциллирующие со средними частотами $\pm\sqrt{\nu}$ и $\pm\frac{1}{\sqrt{\nu}}$. Поэтому, конкретизировав стороннее воздействие, условимся представлять $\vec{f}$ в следующем виде:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \end{bmatrix} e^{it\sqrt{\nu}} + \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{22} \end{bmatrix} e^{it\frac{1}{\sqrt{\nu}}} + \begin{bmatrix} f_{11}^* \\ f_{21}^* \end{bmatrix} e^{-it\sqrt{\nu}} + \begin{bmatrix} f_{12}^* \\ f_{22}^* \end{bmatrix} e^{-it\frac{1}{\sqrt{\nu}}}. \tag{32}$$

Здесь все $f_{\alpha\beta}$, α, $\beta = \overline{1, 2}$, представляют собой δ-коррелированные комплекснозначные случайные функции „медленного" времени τ. Предполагается еще, что отражает природу сил Найквиста, отсутствие взаимной корреляции между любыми двумя функциями $f_{\alpha\beta}$, если у них не совпадают оба индекса. Фурье-изображение функции $f_{\alpha\beta}$, которое будем обозначать $f_{\alpha\beta}(\omega)$, вследствие использования двух масштабов времени должно обращаться тождественно в нуль за пределами полосы частот $|\omega| < \varepsilon^{-1}\theta$ во избежание перекрытия спектров в натуральном масштабе частот. Но поскольку полоса пропускания исследуемой системы как резонансного фильтра в масштабе „медленного" времени имеет ширину порядка ε^0, при интегрировании по ω выражений, содержащих частотную характеристику системы, можно считать пределы интегрирования бесконечными, не совершая ошибку, выходящую за пределы допустимой относительной погрешности.

Интенсивности силовых воздействий тепловых флуктуаций определяются, согласно [8], формулой Найквиста. В исследуемой модели каждая из двух степеней свободы элементарной подсистемы имеет отдельный диссипативный элемент (резистор) со своей температурой. Но в гироскопически связанных осцилляторах каждая из степеней свободы участвует в колебаниях на общих для всей подсистемы несущих частотах $\pm\sqrt{\nu}$ и $\pm\frac{1}{\sqrt{\nu}}$. Поэтому следует считать спектральные плотности мощности силовых воздействий флуктуаций Найквиста, вообще говоря, различными для различных степеней свободы x_1 и x_2 (даже при одинаковых температурах), но одинаковыми для различных частотных полос в окрестностях частот $\pm\sqrt{\nu}$ и $\pm\frac{1}{\sqrt{\nu}}$ при рассмотрении одной и той же степени свободы. Не предполагая пока для общности анализа, что $T_1 = T_2$, зададим спектральные плотности мощности флуктуаций Найквиста в виде

$$\widetilde{|f_{11}(\omega)|}^2 = \widetilde{|f_{12}(\omega)|}^2 = \frac{1}{\pi} r_1 T_1, \qquad \widetilde{|f_{21}(\omega)|}^2 = \widetilde{|f_{22}(\omega)|}^2 = \frac{1}{\pi} r_2 T_2.$$

В завершение ряда формул, полезного для приведения возмущенной системы (9) к виду, удобному для выполнения процедуры усреднения, применим оператор $\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}$ к (32) и получим

$$\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}\vec{f} =$$

$$= \hat{\Lambda}^{-1}\left\{\theta\hat{\mathrm{T}}^{-1}\begin{bmatrix} f_{11}e^{it\sqrt{\nu}} + f_{12}e^{it\frac{1}{\sqrt{\nu}}} \\ f_{21}e^{it\sqrt{\nu}} + f_{22}e^{it\frac{1}{\sqrt{\nu}}} \end{bmatrix} + \theta\hat{\mathrm{T}}^{-1}\begin{bmatrix} f_{11}^*e^{-it\sqrt{\nu}} + f_{12}^*e^{-it\frac{1}{\sqrt{\nu}}} \\ f_{21}^*e^{-it\sqrt{\nu}} + f_{22}^*e^{-it\frac{1}{\sqrt{\nu}}} \end{bmatrix}\right\}. \tag{33}$$

Умножим теперь все члены уравнения (9) слева на $\varepsilon^{-1}\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{\mathrm{T}}^{-1}$, сгруппируем и перенесем в правую часть те слагаемые, которые имеют порядки ε и выше. К оставшимся членам полученного в результате уравнения, в том числе содержащим $\vec{a}^*$, применим операцию усреднения по скользящему интервалу „быстрого" времени, которое еще сохранилось в осциллирующих матрицах $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Lambda}^{-1}$. От выбора длины интервала, разумеется, будет зависеть величина относительной погрешности. По порядку величины интервал сглаживания следует выбирать достаточно большим относительно наибольшего из периодов быстрых осцилляций на основных частотах и встречающихся комбинационных частотах. С другой стороны, этот интервал должен быть достаточно малым, чтобы не вносить заметных погрешностей в определение медленно меняющегося вектора $\vec{a}$ комплексных амплитуд, через который, в конечном счете, выражается $\vec{x}$. В принципе, такая возможность реализуется, если длина интервала сглаживания имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$. Но фактически ее можно существенно уменьшать при благоприятном соотношении μ, ν и малых r_1, r_2.

Получение строгой оценки погрешности достаточно трудоемко и не относится к существу решаемых в данной статье вопросов. После получения окончательных расчетных формул энергетического баланса и определения оптимизирующих параметров можно будет воспользоваться не только методом усреднения, но и другими аналитическими или численными методами. Однако на данном уровне рассмотрения принципиальная сторона проблемы преобразования тепловой энергии представляется более важной, чем повышение точности расчетов, поскольку она уже достаточна для сравнения выходной и затрачиваемой мощностей по их усредненным значениям.

Производя выкладки, предусмотренные формулами (27) – (31) и (33), сочетая их с процедурой усреднения, позволяющей устранять возникающие громоздкие выражения, в итоге можно прийти к системе линейных уравнений 4-го порядка для a_1, a_2, a_1^*, a_2^* с флуктуационными правыми частями. Однако тогда очень большое число комбинаций параметров настройки существенно затрудняет поиск оптимальных вариантов. Но оказалось, что эту систему можно разложить на две несвязанные подсистемы 2-го порядка — для a_1 , a_2 и a_1^*, a_2^* соответственно, если $\nu \neq \frac{1}{3}$, что отражено в условиях (2). При этом в использовании уравнений для a_1^*, a_2^* уже не возникает необходимости, так как уравнения для a_1, a_2 им эквивалентны.

***Замечание* 2.** Точность выполнения достаточного условия $\nu \neq \frac{1}{3}$ разложения системы должна быть такой, чтобы отстроиться от резонанса $\Omega = 2\sqrt{\nu}$ в пределах точности сглаживания, т. е. на уровне $\pm\sqrt{\varepsilon}$. Более определенно об этом можно сказать после выбора оптимальных параметров μ, ν, r_1, r_2. Подготовленные к усреднению выражения составлены таким образом, что в каждом из них имеются удобные для вычислений блоки в виде произведений постоянных матриц, а также в виде предшествующей им осциллирующей диагональной матрицы $\hat{\Lambda}^{-1}$ и замыкающей матричные произведения матрицы $\hat{\Lambda}$ (либо $\hat{\Lambda}^{-1}$). В модулированных потенциальных или гироскопических матричных выражениях имеются еще множители вида $\sin\Omega t$ и $\cos\Omega t$. При такой конструкции легко сразу же выделить блоки, не обращающиеся в нуль под действием усредняющей по скользящему интервалу „быстрого” времени операции сглаживания.

Благодаря предусмотренному условию $\nu \neq \frac{1}{3}$ члены, содержащие $\vec{a}^*$, в том числе при $\Omega = 2\nu$, исчезают в нулевом по ε приближении (имеется в виду, что перед усреднением все члены уравнения (9) были умножены слева на $\varepsilon^{-1}\theta\hat{\Lambda}^{-1}\hat{T}^{-1}$). Оставшиеся члены нулевого порядка по ε образуют требуемую систему „укороченных” уравнений, позволяющую с достаточной асимптотической точностью исследовать эволюцию комплексных амплитуд a_1, a_2 под воздействием стационарных случайных сил Найквиста, представленных в правой части этой системы, которая имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d}{d\tau} + \eta_1 & m\dfrac{1}{\sqrt{\mu}} \\ -m\sqrt{\mu} & \dfrac{d}{d\tau} + \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \sqrt{\nu}\left[\frac{1}{\sqrt{\mu}} r_1(\mu+\nu)(1-\mu\nu) + \sqrt{\mu}\, r_2(\mu-\nu)(1+\mu\nu)\right], \\ \eta_2 &= \frac{1}{\sqrt{\nu}}\left[\sqrt{\mu}\, r_2(\mu+\nu)(1-\mu\nu) + \frac{1}{\sqrt{\mu}} r_1(\mu-\nu)(1+\mu\nu)\right], \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= (1+\mu\nu)\sqrt{(\mu-\nu)(1-\mu\nu)}\, f_{21} - i\frac{1}{\sqrt{\mu}}(\mu+\nu)(1-\mu\nu) f_{11}, \\ h_2 &= (1+\mu\nu)\sqrt{(\mu-\nu)(1-\mu\nu)}\, f_{12} - i\sqrt{\mu}(\mu+\nu)(1-\mu\nu) f_{22}, \end{aligned} \tag{36}$$

$$m = 2k_0\mu(1-\nu^2) - l_0\nu(1-\mu^2)\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} + \sqrt{\nu}\right). \tag{37}$$

Систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами естественно заменить эквивалентной ей системой алгебраических уравнений, получаемой из (34) методом преобразования Фурье при $\dfrac{d}{dt} \;\dot{\longrightarrow}\; i\omega$, условившись изображения a_1, a_2 и h_1, h_2 обозначать теми же буквами, что и оригиналы. Теперь $a_1 = a_1(\omega)$, $a_2 = a_2(\omega)$ находятся в результате решения алгебраической системы

$$\begin{bmatrix} \eta_1 + i\omega & m\dfrac{1}{\sqrt{\mu}} \\ -m\sqrt{\mu} & \eta_2 + i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \tag{38}$$

с главным определителем

$$\Delta(\omega) = a^2 - \omega^2 + i\omega b,$$

где $a^2 = m^2 + \eta_1\eta_2$, $b = \eta_1 + \eta_2$.

Вектор-столбец комплексных амплитуд $a_1 = a_1(\omega)$, $a_2 = a_2(\omega)$, являющийся решением системы (38), имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\omega)} \begin{bmatrix} \eta_2 + i\omega & -m\dfrac{1}{\sqrt{\mu}} \\ m\sqrt{\mu} & \eta_1 + i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\omega)} \begin{bmatrix} (\eta_2 + i\omega)h_1 - m\dfrac{1}{\sqrt{\mu}} h_2 \\ m\sqrt{\mu}\, h_1 + (\eta_1 + i\omega) h_2 \end{bmatrix}.$$

Переход к оригиналам Фурье-изображений для исследования энергетического баланса фактически не потребуется, так как по формуле Найквиста интенсивности флуктуационных сил, действующих на входы исследуемой линейной системы, выражены именно через спектральные плотности мощности, т. е. через квадраты модулей Фурье-спектров. С другой стороны, формулы (13), (14) для мгновенных выходных мощностей после усреднения по „быстрому” времени, статистического усреднения и последующего интегрирования по ω в интервале $-\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < \omega < \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ приводятся к выражениям, содержащим общий множитель

$$I = \frac{1}{1-\mu\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\big[\widetilde{a_1(\omega) a_2^*(\omega)}\big] d\omega + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Эти формулы имеют вид

$$W_{\text{out}}^{(u)} = -2k_0\Omega(1+\mu)(1-\nu)I, \tag{39}$$

$$W_{\text{out}}^{(g)} = l_0\Omega\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}+\sqrt{\nu}\right)(1-\mu)(1+\nu)I. \tag{40}$$

Вычисление I упрощается, если обратить внимание на отсутствие парных корреляций между f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22} и воспользоваться формулой Найквиста для выражения интенсивностей флуктуационных сил по каждой из двух степеней свободы. Соответственно, находим, что $\widetilde{h_1(\omega)h_2^*(\omega)} = 0$, а средние квадраты модулей $h_1(\omega)$ и $h_2(\omega)$ не зависят от частоты ω:

$$\widetilde{|h_1(\omega)|^2} = \frac{1}{\pi}\left[r_2T_2(\mu-\nu)(1-\mu\nu)(1+\mu\nu)^2 + \frac{1}{\mu}r_1T_1(\mu+\nu)^2(1-\mu\nu)^2\right],$$

$$\widetilde{|h_2(\omega)|^2} = \frac{1}{\pi}\left[r_1T_1(\mu-\nu)(1-\mu\nu)(1+\mu\nu)^2 + \mu r_2T_2(\mu+\nu)^2(1-\mu\nu)^2\right].$$

В результате получаем, что с относительной погрешностью, не превышающей ε, выражение для I, содержащее табличный интеграл

$$I_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{|\Delta(\omega)|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{(a^2-\omega^2)^2+\omega^2b^2} = \frac{1}{a^2b} = \frac{1}{(\eta_1+\eta_2)(m^2+\eta_1\eta_2)}, \tag{41}$$

можно представить в виде

$$I = mI_0r_1r_2\Bigg[(\mu^2-\nu^2)(1-\mu^2\nu^2)(1-\nu^2)\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}T_1\frac{r_1}{r_2}+\sqrt{\mu}\,T_2\frac{r_2}{r_1}\right) +$$

$$+ (\mu+\nu)^3(1-\mu\nu)^2\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}T_1-\sqrt{\nu}\,T_2\right) + (\mu-\nu)^2(1+\mu\nu)^3\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}T_2-\sqrt{\nu}\,T_1\right)\Bigg].$$

В интересующем нас варианте равенства температур, когда $T_1 = T_2 = T$, при выполнении ранее оговоренного условия (2) знак этого выражения совпадает со знаком результирующего коэффициента модуляции m. Действительно, в этом случае $I|_{T_1=T_2=T} = I_T$ принимает вид

$$I_T = mT\Omega I_0\Psi, \tag{42}$$

$$\Psi = (r_1^2+\mu r_2^2)(1+\nu)(\mu^2-\nu^2)(1-\mu^2\nu^2) +$$

$$+ r_1r_2\left[(\mu+\nu)^3(1-\mu\nu)^2+(\mu-\nu)^2(1+\mu\nu)^3\right].$$

Очевидно, что Ψ строго положительно, как и коэффициент $T\Omega I_0$, так что $\operatorname{sgn} I_T = \operatorname{sgn} m$.

Отсюда следует, что при использовании только одного канала управления никакие параметры настройки данной модели не могут обеспечить положительный энергетический выход, если $T_1 = T_2$. Чтобы в этом убедиться, достаточно поочередно полагать $k_0 = 0$ или $l_0 = 0$ в (37), (39), (40):

$$k_0 = 0 \Rightarrow m < 0, \quad I = I_T < 0, \quad W_{\text{out}}^{(u)} = 0, \quad W_{\text{out}}^{(g)} < 0,$$

$$l_0 = 0 \Rightarrow m > 0, \quad I = I_T > 0, \quad W_{\text{out}}^{(u)} < 0, \quad W_{\text{out}}^{(g)} = 0.$$

Но при $T_2 > \frac{1}{\nu} T_1$ достаточно малая величина разности $\mu - \nu > 0$ (если $\mu + \nu \sim\sim 1$) дает возможность сделать знаки I и m противоположными: $\operatorname{sgn} I|_{\mu \to \nu} = = -\operatorname{sgn} m$. При этом условии все же возможен положительный выход энергии дже в одноканальной управляемой системе, как было показано в работе [6] для модулированной потенциальной связи, когда $g = 0$, $\nu = \mu = \frac{1}{2}$. Теперь остается дать ответ на основной вопрос о существовании в пространстве физически реализуемых параметров модели с двумя каналами управления непустой подобласти, для которой сумма энергетических выходов по обоим каналам в случае $T_1 = T_2 = T$ положительна.

6. Достаточные условия положительного суммарного энергетического выхода при $T_1 = T_2 = T$. Просуммируем (39) и (40), подставив в них значение $I = I_T$, выраженное по формуле (42), в которой m представим согласно (37). Это даст общее представление суммарной усредненной мощности, являющейся выходной для управляемой элементарной подсистемы и в то же время входной для двухканальной системы управления, пополняющей (в сумме) энергию ее когерентных колебаний. В итоге получим

$$W_{\text{out}}^{(\Sigma)} = W_{\text{out}}^{(u)} + W_{\text{out}}^{(g)} = T\Omega^2 I_0 \Psi\left[2k_0\mu(1-\nu^2) - l_0\nu(1-\mu^2)\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} + \sqrt{\nu}\right)\right] \times$$

$$\times \left[l_0(1-\mu)(1+\nu)\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} + \sqrt{\nu}\right) - 2k_0(1+\mu)(1-\nu)\right] = CQ, \tag{43}$$

где

$$C = 4T\Omega^2 k_0^2 I_0 \Psi \mu(1-\nu^2)(1+\mu)(1-\nu), \tag{44}$$

$$Q = (1-ax)(bx-1) = -abx^2 + (a+b)x - 1, \tag{45}$$

$$a = \frac{\nu(1-\mu^2)}{\mu(1-\nu^2)}, \quad b = \frac{(1-\mu)(1+\nu)}{(1+\mu)(1-\nu)}, \quad x = \frac{l_0}{2k_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} + \sqrt{\nu}\right). \tag{46}$$

Теперь результат зависит от дискриминанта квадратичного трехчлена Q. В данном случае для любых μ и ν, $0 < \nu < \mu < 1$,

$$\operatorname{Dis} Q = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0.$$

Из (45) следует, что $Q = 0$ при $x = \frac{1}{a}$ и $x = \frac{1}{b}$ и $Q > 0$ при $\frac{1}{b} < x < \frac{1}{a}$, т. е. когда

$$\frac{(1+\mu)(1-\nu)}{(1-\mu)(1+\nu)} < \frac{l_0}{2k_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}} + \sqrt{\nu}\right) < \frac{\mu(1-\nu^2)}{\nu(1-\mu^2)}, \tag{47}$$

причем это двойное неравенство не противоречит условию

$$0 < \nu < \mu < 1, \quad \text{ибо} \quad b - a = \frac{(\mu-\nu)(1-\mu\nu)}{\mu(1+\mu)(1-\nu^2)} > 0.$$

Таким образом, при выполнении неравенства (47) суммарный усредненный энергетический выход при $T_1 = T_2 = T$ принимает положительные значения. Поскольку $bx > 1$ в указанном интервале $x \in \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right)$, канал модуляции потенциальной связи имеет отрицательную производительность, а канал модуляции гироскопической связи — положительную, перекрывающую потребление энергии предыдущим каналом, обеспечивая тем самым $W_{\text{out}}^{(\Sigma)} > 0$.

7. Оптимизация коэффициентов модуляции по критерию максимума суммарной выходной мощности. Максимальное значение суммарного энергетического выхода соответствует максимуму Q по $\frac{l_0}{k_0}$. Для оптимального значения $x = x_0$ из (45), (46) находим его выражение через a и b:

$$x_0 = \frac{a+b}{2ab}.$$

Подставляя $x = x_0$ в (45), получаем выражение $Q_0 = \frac{(b-a)^2}{4ab}$. В свою очередь, через x_0 и Q_0 определяются

$$\left(\frac{l_0}{k_0}\right)_{\text{opt}} = \Omega \frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\frac{\mu}{(1+\mu)^2} + \frac{\nu}{(1+\nu)^2}\right] \qquad \left(\Omega = \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \sqrt{\nu}\right), \tag{48}$$

$$Q_{\max} = \frac{(\mu-\nu)^2(1-\mu\nu)^2}{4\mu\nu(1+\mu)^2(1+\nu)^2}, \tag{49}$$

а также оптимальное значение результирующего коэффициента модуляции (37):

$$m = m_{\text{opt}} = k_0(\mu-\nu)(1-\mu\nu)\frac{1-\nu}{1+\nu}. \tag{50}$$

Подстановка (49) в (43) с учетом (44) приводит к выражению для максимальной по $\left(\frac{l_0}{k_0}\right)$ суммарной выходной мощности:

$$W_{\max}^{(\Sigma)} = T\Omega^4 k_0^2 l_0 \Psi \frac{(\mu-\nu)^2(1-\mu\nu)^2}{(1+\mu)(1+\nu)}.$$

Наконец, применяя формулы (41) и (50), получаем окончательный результат:

$$W_{\max}^{(\Sigma)} = T\Omega^4 \frac{\Psi(1+\nu)}{(\eta_1+\eta_2)(1+\mu)(1-\nu)^2}\left(1 + \frac{\eta_1\eta_2}{m_{\text{opt}}^2}\right)^{-1}.$$

Дальнейшая оптимизация возможна за счет варьирования μ, ν, r_1, r_2, что уже потребует конкретизации условий физической реализации.

***Замечание* 3.** Пропорциональность выходной мощности температуре T и четвертой степени частоты Ω^4: $W_{\max}^{(\Sigma)} = \text{const}\, T\Omega^4$ ассоциируется с формулой Рэлея – Джинса для спектральной плотности мощности теплового излучения при фиксированном интервале длин волн.

8. Общий вывод. В настоящей статье предложена и исследована математическая модель открытой билинейной системы управления для преобразования тепловой энергии в когерентную форму. Показано, что использование комбинационного параметрического резонанса, создаваемого системой управления в однотемпературном ансамбле слабо диссипативных упруго-гироскопических подсистем, позволяет получить положительный энергетический выход без применения какого-либо охлаждающего устройства, кроме системы управления.

Данная модель демонстрирует принципиальную возможность преобразования энергии флуктуаций, возбуждаемых в элементарных подсистемах δ-коррелированными силами Найквиста, в энергию, передаваемую в когерентизированной форме макроскопическим колебаниям параметрического резонансного управления. При этом не является обязательным использование разности температур между диссипативными элементами, генерирующими тепловые флуктуации. Благодаря наличию двух некоммутативных каналов управления созданы достаточные условия как для локального возмущения термодинамического равновесия ансамбля, находящегося в термическом контакте с однотемпературным источником тепловой энергии, так и для генерации когерентной составляющей энергии за счет возникающей неравновесности. В результате рабочая среда, состоящая из элементарных подсистем с двумя степенями свободы, взаимодействующая с однотемпературным источником тепла, а также с управляющими макроскопическими колебаниями, передает последним энергию в когерентизированной форме.

Рассмотренный вариант реализации положительного энергобаланса в тепловых машинах класса так называемых „демонических холодильников” [9], насколько известно автору по последним публикациям [10], пока еще не имеет аналогов. Можно предположить возможность реализации и других моделей, которые обладали бы подобными свойствами, но исследованная здесь модель отличается минимальной сложностью используемых в ней элементарных подсистем однотемпературного ансамбля, представляющего рабочую среду тепловой машины в целом.

1. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. – Киев: Изд-во АН УССР, 1934. – 112 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с.
3. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
4. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
5. *Самойленко Ю. И.* Проблемы и методы физической кибернетики // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **56**. – 644 с.
6. *Логинов А. А.* Системный анализ управляемого переноса энергии в связке двух осцилляторов // Проблемы управления и информатики. – 2002. – № 5. – С. 5 – 11.
7. *Самойленко Ю. И.* Преобразование энергии тепловых флуктуаций в когерентную форму при параметрической модуляции гироскопически связанных осцилляторов // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, № 3. – С. 233 – 251.
8. *Квасников И. А.* Термодинамика и статистическая физика. Теория неравновесных систем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 559 с.
9. *Lloyd S.* Quantum-mechanical Maxwell's demon // Phys. Rev. A. – 1997. – **56**, № 5. – P. 3374 – 3382.
10. *Фрадков А. А., Якубовский О. А.* (ред.) Управление молекулярными и квантовыми системами (Сб. ст.). – Москва; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003. – 416 с.

Получено 20.03.07