УДК 517.95

Г. П. Лопушанська (Львів. нац. ун-т)

УЗАГАЛЬНЕНІ КРАЙОВІ ЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ З ЛІНІЙНОЮ ГОЛОВНОЮ ЧАСТИНОЮ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

The conditions are obtained for the nonlinear part under which the solution (from a certain weighted L_1-space, regular inside a domain) of a quazilinear elliptic equation of order $2m$ takes boundary values from a space of generalized functions.

Получены условия относительно нелинейной части, при которых регулярное внутри области и из некоторого весового L_1-пространства решение квазилинейного с линейной главной частью эллиптического уравнения порядка $2m$ принимает граничные значения из пространства обобщенных функций.

У роботі [1] для $q \in (1, q_c)$, де $q_c = \dfrac{n+1}{n-1}$, у [2] для $q = 2$, у [3] для $q \in [q_c, 2]$, у [4] для $q > q_c$ (в тому числі для $q > 2$) досліджено природу крайових значень g розв'язків задачі

$$\Delta u = |u|^{q-1}u, \quad x \in \Omega, \qquad u \,|_{\partial\Omega} = g.$$

Встановлено, що при $q \in (1, q_c)$ задача однозначно розв'язна для довільного значення g з простору обмежених мір Бореля на $\partial\Omega$, а при $q \geq 1 + \dfrac{2}{n-1}$ узагальнені крайові значення-міри для її розв'язку можуть не існувати.

Відомо (див. роботи [5 – 7] та наведену в них бібліографію), що регулярний в області розв'язок лінійного однорідного рівняння набуває узагальнених крайових значень із простору $(C^\infty)'$ тоді і тільки тоді, коли він належить до певного вагового L_1-простору.

Дослідження розв'язності квазілінійних еліптичних рівнянь у L_1-просторах, зокрема при даних-мірах, проводились у [8 – 13] та інших працях, напівлінійних еліптичних рівнянь при крайових даних із просторів узагальнених функцій ($(C^\infty(S))'$ та із сильними степеневими особливостями) — в [14 – 16]. З результатів [15] випливає, зокрема, розв'язність задачі

$$\Delta u = |u|^q, \quad x \in \Omega, \quad u \,|_{\partial\Omega} = g$$

у певному ваговому L_1-просторі при довільній узагальненій функції $g \in (C^\infty(S))'$ та $q \in (0, q_0)$, де $q_0 \in (0, 1)$ та залежить від порядку сингулярності узагальненої функції g.

У цій роботі ми встановимо умови щодо нелінійних доданків, за яких регулярний всередині області та із певного вагового L_1-простору розв'язок напівлінійного еліптичного рівняння порядку $2m$ набуває узагальнених крайових значень із простору $(C^\infty)'$ та просторів узагальнених функцій із сильними степеневими особливостями. Також буде доведено рівнозначність двох формулювань задачі про знаходження регулярного в області розв'язку такого рівняння при заданих на межі області узагальнених функціях.

1. Основні позначення, функціональні простори. Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею S класу C^∞, у якій задано еліптичний диференціальний вираз $A(x,D)=\sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(x)D^\alpha$ порядку $2m<n$, $a_\alpha\in C^\infty(\overline{\Omega})$, на S задано крайові диференціальні вирази $B_j(x,D)=\sum_{|\alpha|\le m_j} b_{j\alpha}(x)D^\alpha$, $b_{j\alpha}\in C^\infty(S)$, $j=\overline{1,m}$, система $\{B_j(x,D)\}_{j=1}^m$ є нормальною і задовольняє умову Лопатинського для $A(x,D)$, $T_j,\hat{B}_j,\hat{T}_j$ — такі нормальні системи крайових диференціальних виразів відповідно порядків $2m-m_j-1$, $\hat{m}_j$, $2m-\hat{m}_j-1$, $j=\overline{1,m}$, що правильною є формула Гріна (див., наприклад, [17])

$$\int_\Omega (vAu-uA^*v)dx=\sum_{j=1}^m\int_S(\hat{T}_jvB_ju-\hat{B}_jvT_ju)dS,\ u,v\in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{1}$$

Нехай ε_1 — фіксоване мале число, $d(x)=\operatorname{dist}(x,S)$. Через $\varrho(x)$ $(x\in\overline{\Omega})$ позначимо нескінченно диференційовну додатну в Ω функцію, яка має порядок $d(x)$ при $d(x)\le\frac{\varepsilon_1}{2}$. Для фіксованої точки $\hat{x}\in S$ позначимо через $\varrho(x,\hat{x})$ $(x\in\Omega)$ нескінченно диференційовну додатну в Ω функцію, яка має порядок $|x-\hat{x}|$ при $|x-\hat{x}|\le\frac{\varepsilon_1}{2}$, $\varrho(\hat{x},\hat{x})=0$. Також вважаємо $\varrho(x)\le 1$, $\varrho(x,\hat{x})\le 1$ $(x\in\overline{\Omega})$, $\varrho(x,\hat{x})=1$ та $\varrho(x)=1$ при $d(x)\ge\varepsilon_1$.

При $k>0$, $t>0$ визначаємо функціональні простори [7, 16]:

$$\tilde{Z}_k(\Omega,\hat{x})=\Big\{\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega}\setminus\hat{x})\colon \text{для довільного мультиіндексу } \alpha$$

$$\big|D^\alpha\varphi(x)\big|\le\varrho^{k-|\alpha|}(x,\hat{x})\varphi_\alpha(x),\ \ x\in\overline{\Omega},\ \text{ де }\ \varphi_\alpha\in C(\overline{\Omega})\Big\},$$

$$\tilde{Z}_k(S,\hat{x})=\Big\{\varphi\in C^\infty(S\setminus\hat{x})\colon \text{для довільного мультиіндексу } \alpha$$

$$|D^\alpha\varphi(x)|\le\varrho^{k-|\alpha|}(x,\hat{x})\varphi_\alpha(x),\ \ x\in S,\ \text{ де }\ \varphi_\alpha\in C(S)\Big\},$$

$$Z_k(\Omega,\hat{x})=\Big\{\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega}\setminus\hat{x})\colon \text{для довільного мультиіндексу } \alpha$$

$$\big|D^\alpha\varphi(x)\big|\le(\varrho^{k-|\alpha|}(x,\hat{x})+1)\varphi_\alpha(x),\ \ x\in\overline{\Omega},\ \text{ де }\ \varphi_\alpha\in C(\overline{\Omega})\Big\},$$

$$Z_k(S,\hat{x})=\Big\{\varphi\in C^\infty(S\setminus\hat{x})\colon \text{для довільного мультиіндексу } \alpha$$

$$\big|D^\alpha\varphi(x)\big|\le(\varrho^{k-|\alpha|}(x,\hat{x})+1)\varphi_\alpha(x),\ \ x\in S,\ \text{ де }\ \varphi_\alpha\in C(S)\Big\},$$

$$X_k(\overline{\Omega})=\Big\{\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega})\colon (A^*\varphi)(x)=O(d^k(x))\ \text{ при}$$

$$d(x)\to 0,\ \ \hat{B}_j\varphi=0,\ \ j=\overline{1,m}\Big\},$$

$$X_k(\overline{\Omega},\hat{x})=\Big\{\varphi\in Z_{k+2m}(\Omega,\hat{x})\colon (A^*\varphi)(x)=O(|x-\hat{x}|^k)$$

$$\text{при }\ x\to\hat{x},\ \ \hat{T}_j\varphi\in Z_{k+m_j+1}(S,\hat{x}),\ \ \hat{B}_j\varphi=0,\ \ j=\overline{1,m}\Big\},$$

$$\tilde{X}_{k,t}(\overline{\Omega},\hat{x}) = \Big\{\varphi \in \tilde{Z}_{k+2m}(\Omega,\hat{x}) \colon (A^*\varphi)(x) = O(d^k(x)|x-\hat{x}|^{t-k})$$

$$\text{при} \;\; d(x)\to 0 \;\; \text{та} \;\; x\to\hat{x}, \;\; \hat{T}_j\varphi \in \tilde{Z}_{k+m_j+1}(S,\hat{x}), \;\; \hat{B}_j\psi = 0, \;\; j=\overline{1,m}\Big\}.$$

Зауважимо, що $Z_k(\Omega,\hat{x}) \subset C^{[k]}(\overline{\Omega})$, $Z_k(S,\hat{x}) \subset C^{[k]}(S)$, $\tilde{Z}_t(\Omega,\hat{x}) \subset Z_t(\Omega,\hat{x})$, а згідно з [7, 16] при всіх $k>0$, $t \geq \max\limits_{1\leq j\leq m}\{2m-m_j-1\}$ простори $X_k(\overline{\Omega})$ та $\tilde{X}_{k,t-k}(\overline{\Omega},\hat{x})$ є непорожніми.

Через $V'(S)$ позначимо простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на $V(S)$, через $\langle\varphi,F\rangle$ — значення узагальненої функції $F\in V'(S)$ на основній функції $\varphi\in V(S)$, запис $s(F)\leq k'$ означає, що порядок сингулярності узагальненої функції $F\in V'(S)$ не більший, ніж k'.

Далі вважаємо $D(S)=C^\infty(S)$. Зауважимо, що при $F\in V'(S)$, $s(F)\leq k'$ та $k'\geq 0$

$$\langle\varphi,F\rangle = \sum_{|\alpha|\leq k'}\int\limits_S D^\alpha\varphi f_\alpha dS \quad \forall\varphi\in V(S),$$

де $f_\alpha\in L_1(S)$ у випадку $V(S)=D(S)$, $\varrho^{k-|\alpha|}(\cdot,\hat{x})f_\alpha\in L_1(S)$ у випадку $V(S) = \tilde{Z}_k(S,\hat{x})$ (див. [18, 16]).

Нехай

$$\tilde{M}_k(\Omega) = \left\{v\in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)\colon \|v\|_k = \int\limits_\Omega \varrho^k(x)|v(x)|dx < +\infty\right\},$$

$$M_k(\Omega,\hat{x}) = \left\{v\colon \int\limits_\Omega \varrho^k(x,\hat{x})|v(x)|dx < +\infty\right\},$$

$$\tilde{M}_{k,t}(\Omega,\hat{x}) = \left\{v\colon \int\limits_\Omega \varrho^k(x)\varrho^t(x,\hat{x})|v(x)|dx < +\infty\right\}.$$

Зауважимо, що $\tilde{M}_k(\Omega)$, $M_k(\Omega,\hat{x})$ є просторами регулярних узагальнених функцій на просторах $\tilde{Z}_k(\Omega)$, $Z_k(\Omega,\hat{x})$ відповідно (див. [18]).

Відомо, що паралельні до поверхні S класу C^∞ поверхні S_ε при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ також є класу C^∞. Між точками S та S_ε є взаємно однозначна відповідність: $x_\varepsilon = x+\varepsilon\nu(x) = \psi(x,\varepsilon)$, $x\in S$, де $\nu(x)$ — орт внутрішньої нормалі до S у точці $x\in S$, тоді $x=\psi^{-1}(x_\varepsilon,\varepsilon)$. Гомеоморфізми ψ та ψ^{-1} є нескінченно диференційовними та обмеженими разом з усіма похідними (див. [17]).

Для φ із простору гладких функцій $V(S)$ визначимо їхні значення $\psi^*\varphi$ на поверхнях S_ε: $(\psi^*\varphi)(x_\varepsilon) = \varphi(\psi(x,\varepsilon)) = \varphi(x)$ для $\varepsilon\in\left[0,\dfrac{\varepsilon_0}{2}\right]$ та $(\psi^*\varphi)(x_\varepsilon)=0$ для $\varepsilon>\varepsilon_0$.

Якщо $\tilde{B}_j\left(x,\dfrac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|\alpha|\leq j}\tilde{b}_{j\alpha}(x)\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$, $j=\overline{0,2m-1}$, — система Діріхле порядку $2m$ на S [17], то, продовжуючи із S всередину Ω коефіцієнти $\tilde{b}_{j\alpha}$ операторів $\tilde{B}_j\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, на S_ε визначаємо $\tilde{B}_j\left(x_\varepsilon, \dfrac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right) v = \sum_{|\alpha|\le j}(\psi^* \tilde{b}_{j\alpha})(x_\varepsilon) \times$ $\times \left(\dfrac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right)^\alpha v(x_\varepsilon),\ v \in V(\overline{\Omega})$.

Так визначені оператори $\tilde{B}_j\left(x_\varepsilon, \dfrac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\right)$, $j = \overline{0, 2m-1}$, також утворюють систему Діріхле на S_ε (див. [19], ч. 111). У [20] на прикладі задачі Діріхле для системи рівнянь другого порядку показано, що при досить малих ε умова Лопатинського виконується на S_ε, якщо вона виконувалась на S.

Зауважимо, що за вибраною на S системою Діріхле $\{B_j, T_j\}_{j=1}^m$ крайові диференціальні вирази $\hat{B}_j$, $\hat{T}_j$ на S, при яких правильною є формула (1), визначаються однозначно. Так само за продовженими на S_ε виразами $\{B_j, T_j\}_{j=1}^m$ визначаються однозначно такі $\hat{B}_j, \hat{T}_j$ на S_ε, при яких правильною є формула

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (vAu - uA^*v)dx = \sum_{j=1}^m \int\limits_{S_\varepsilon} (\hat{T}_j v B_j u - \hat{B}_j v T_j u) dS, \quad u,\ v \in C^\infty(\overline{\Omega}). \qquad (2)$$

Із існування границі при $\varepsilon \to 0$ лівої частини випливає існування границі при $\varepsilon \to 0$ правої частини цієї рівності. Виберемо функцію u так, що $T_j u\,|_S = 0$, $j = \overline{1, m}$, $B_j u\,|_S = 0$, $j \ne i$, $B_i u\,|_S = \varphi_i \in C^\infty(S)$. Тоді існує границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} (\hat{T}_i v)(x_\varepsilon)(B_i u)(x_\varepsilon) dS$, яка за лемою з [18, с. 70] дорівнює $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon} (\hat{T}_i v)(x_\varepsilon) \times$ $\times \varphi_i(x) dS$. Віднімаючи (1), (2), маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} (\hat{T}_i v)(x_\varepsilon)\varphi_i(x) dS = \int\limits_S (\hat{T}_i v)(x)\varphi_i(x) dS,$$

тобто

$$\int\limits_S \left[\lim_{\varepsilon\to 0}(\hat{T}_i v)(x + \varepsilon\nu(x)) \lim_{\varepsilon\to 0} W_\varepsilon(x) - (\hat{T}_i v)(x)\right] \varphi_i(x) dS = 0,$$

де $W_\varepsilon(x)$ — якобіан перетворення $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$, $x \in S$. За довільністю $\varphi_i \in C^\infty(S)$ та з того, що $W_\varepsilon(x) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$, одержуємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\hat{T}_i v)(x + \varepsilon\nu(x)) = (\hat{T}_i v)(x), \quad i = \overline{1, m}.$$

Так само показуємо, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} (\hat{B}_i v)(x_\varepsilon) = (\hat{B}_i v)(x)$, $i = \overline{1, m}$.

2. Узагальнені крайові значення регулярних розв'язків.

Означення. *Будемо говорити, що регулярна всередині області* Ω *функція* u *набуває на* S *узагальнених крайових значень* $F \in V'(S)$ (*див.* [5 – 7] *та бібліографію*), *якщо існує*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon) dS = \langle \varphi, F \rangle \quad \forall \varphi \in V(S).$$

Ця границя не залежить від того, як визначено продовження $\varphi \in V(S)$ до функції з $V(S_\varepsilon)$. Справді, інтегруючи по S, одержуємо $\int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon) dS_\varepsilon = \int_S \varphi(x +$

$+\,\varepsilon\nu(x))u(x+\varepsilon\nu(x))W_\varepsilon(x)dS$. За лемою [18, с. 70] з існування границі цього виразу випливає, що існує також $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int_S \Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(x+\varepsilon\nu(x))\Big)\, u(x+\varepsilon\nu(x))W_\varepsilon(x)dS =$ $= \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int_S \varphi(x)u(x+\varepsilon\nu(x))dS = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x)u(x_\varepsilon)dS_\varepsilon$.

Через $D_r v$ позначимо $M(r)$-вимірний вектор, компонентами якого є функція v та її похідні до порядку $r \le 2m-1$.

Будемо вважати функцію $f(x,z)$ визначеною та неперервною в $\Omega\times\mathbb{R}^M$, де $M = M(r)$.

Теорема 1. *Нехай s — довільне ціле невід'ємне число, $k > s$, u — розв'язок класу $C^{2m}(\Omega)\cap\tilde{M}_s(\Omega)$ рівняння*

$$A(x,D)u(x) = f(x, D_r u(x)), \quad x\in\Omega, \tag{3}$$

та існує

$$\int\limits_\Omega \big|f(x,D_r u(x))\big|dx < +\infty. \tag{4}$$

Тоді для довільних крайових диференціальних виразів $\tilde{B}_j(x,D)$ порядків $j = \overline{0,2m-1}$ з нескінченно диференційовними коефіцієнтами, які утворюють систему Діріхле, функції $\tilde{B}_j u$ набувають на S узагальнених крайових значень $\tilde{F}_j \in D'(S)$, а також $\tilde{F}_j \in \tilde{Z}'_{k+j+1}(S,\hat{x})$ для довільної точки $\hat{x}\in S$, порядків сингулярностей $s(\tilde{F}_j) \le s+j+1$, $j=\overline{0,2m-1}$.

Доведення. Через Ω_ε позначимо підобласть Ω з межею S_ε. Нехай $\{\alpha_j(x)\}_{j=1}^m$ — розклад одиниці, що відповідає покриттю поверхні S крайовими координатними околами U_j, $x\to\xi = h_j(x)$ — відображення точки $x\in U_j$ у циліндр $\big\{(\xi',\xi_n)\colon |\xi'| \le 1,\ -1<\xi_n<1\big\}$, при якому $U_j\cap S\to\{\xi_n = 0\}$. Для $v\in V(\overline{\Omega})$ визначено $h_j^*(\alpha_j v)(\xi',0) = (\alpha_j v)(h_j^{-1}(\xi',0))$, а продовживши v для $|\xi_n|\ge 1$, одержимо відображення $v\to h_j^*(\alpha_j v)$ $V(S)$ у $V(\mathbb{R}^{n-1}_{\xi'})$, яке далі записуватимемо як v.

У розпрямляючих локальних координатах $\xi = (\xi',\xi_n)$ точки $x\in S$ мають координати $(\xi',0)$, а відповідні їм точки $x_\varepsilon\in S_\varepsilon$ — координати (ξ',ε), $(\alpha_j v)(x_\varepsilon) = (\alpha_j v)(h_j^{-1}(\xi',\varepsilon))$.

Нехай $\tilde{S}$ — така замкнена нескінченно диференційовна поверхня всередині Ω, що $\tilde{S}\subset\bigcup\limits_{l=1}^{l_0} U_l$ $(\operatorname{dist}(\tilde{S},S)>\varepsilon)$, Ω^*_ε — підобласть Ω, розміщена між S_ε та $\tilde{S}$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, функція Φ_ε у кожному крайовому координатному околі U_l у розпрямляючих координатах ξ має вигляд

$$\Phi_\varepsilon(\xi) = \sum_{i=0}^{2m+s-1}(\xi_n-\varepsilon)^i\varphi_i(\xi',\varepsilon),$$

де $\varphi_i(\xi',0)$ — довільні функції із $\tilde{Z}_{k+2m-i}(U_l\cap S,\hat{x})$, $i=\overline{0,2m-1}$, а $\varphi_{2m+j}\in\tilde{Z}_{k-j}(U_l\cap S,\hat{x})$, $j=\overline{0,s}$, і такі, що $A^*\Phi_\varepsilon(\xi) = (\xi_n-\varepsilon)^s\varphi_\varepsilon(\xi',\xi_n)$, де φ_ε — раціональна по ξ_n та ε і обмежена в Ω^*_ε функція. З доведення леми 4 в [16] випливає існування таких функцій φ_{2m+j}, $j=\overline{0,s}$, при цьому функції φ_{2m+j}, $j=\overline{0,s}$, виражаються через φ_i, $i=\overline{0,2m-1}$, та їх похідні до порядків $2m+j-i$

(звідки $\varphi_j \in \tilde{Z}_{k+2m-j}(S,\hat{x})$, $j = \overline{0, 2m+s-1}$), існує $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon(\xi', \xi_n) = \varphi(\xi', \xi_n)$ та $\varphi \,|_{\xi_n=0} \in \tilde{Z}_{k-s}(S,\hat{x})$, обмежена в області Ω^* (між $\tilde{S}$ та S) і є лінійною функцією від $\varphi_0, \ldots, \varphi_{2m+s-1}$ та їх похідних:

$$\left|\varphi(\xi', \xi_n)\right| \le \tilde{C}_j \sum_{|\gamma|\le 2m+s-j} \sup_{\xi' \subset S} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^\gamma \varphi_j(\xi')\right| \quad \forall \xi \in U_l, \tag{5}$$

де $\tilde{C}_j = \mathrm{const} > 0$, $j = \overline{0, 2m+s-1}$. Зрозуміло, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Phi_\varepsilon \in \tilde{Z}_{k+2m}(\Omega,\hat{x})$.

Запишемо формулу Гріна в Ω^*_ε для розв'язку u рівняння (3) та функції Φ_ε:

$$\int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} u A^* \Phi_\varepsilon dx = \int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} \Phi_\varepsilon f dx + \sum_{j=1}^{2m} \int\limits_{S_\varepsilon} \tilde{B}_j u \cdot \tilde{T}_j \Phi_\varepsilon dS, \tag{6}$$

де $\tilde{T}_j$ — крайові диференціальні оператори порядків $2m-j-1$ відповідно, які також утворюють систему Діріхле порядку $2m$ на S_ε. Оскільки оператори $\tilde{B}_j$ і $\tilde{T}_j$ є нормальними, то для них у крайовому координатному околі U_l має місце зображення

$$\tilde{B}_j = \sum_{t=0}^{j} \tilde{B}_{jt}\left(\xi', \frac{\partial}{\partial \xi'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^{j-t},$$

$$\tilde{T}_j = \sum_{t=0}^{2m-1-j} \tilde{T}_{jt}\left(\xi', \frac{\partial}{\partial \xi'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n}\right)^{2m-1-j-t}, \quad j = \overline{0, 2m-1},$$

де $\tilde{B}_{jt}, \tilde{T}_{jt}$ — дотичні диференціальні оператори порядків $\le t$, $B_{j0} = B_{j0}(\xi', \varepsilon) \ne 0$, $\tilde{T}_{j0} = \tilde{T}_{j0}(\xi', \varepsilon) \ne 0$, $j = \overline{0, 2m-1}$. Формула (6) набирає вигляду

$$\int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} u(\xi_n - \varepsilon)^s \varphi_\varepsilon(\xi', \xi_n) d\xi = \int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} \sum_{i=0}^{2m+s-1} (\xi_n - \varepsilon)^i \varphi_i(\xi', \varepsilon) f(\xi, D_r u) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{S_\varepsilon} \sum_{j=0}^{2m-1} \tilde{B}_j u \left\{ \sum_{t=0}^{2m-1-j} \tilde{T}_{jt} \varphi_{2m-1-t-j} (2m-1-t-j)! \right\} dS. \tag{7}$$

За умовою $u \in \tilde{M}_s(\Omega)$ та обмеженістю φ в Ω^* послідовність функціоналів $\int_{\Omega^*_\varepsilon} u \xi_n^s \varphi(\xi', \xi_n) d\xi$ є обмеженою й існує $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega^*_\varepsilon} u \xi_n^s \varphi(\xi', \xi_n) d\xi = \int_{\Omega^*} u \xi_n^s \times$ $\times \varphi(\xi', \xi_n) d\xi$. Тоді за лемою [18, с. 70] існує

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} u(\xi_n - \varepsilon)^s \varphi_\varepsilon(\xi', \xi_n) d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} u \lim_{\varepsilon\to 0}((\xi_n - \varepsilon)^s \varphi_\varepsilon(\xi', \xi_n)) d\xi =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} u \xi_n^s \varphi(\xi', \xi_n) d\xi = \int_{\Omega^*} u \xi_n^s \varphi(\xi', \xi_n) d\xi.$$

Оскільки $\sum_{i=0}^{2m+s-1} \xi_n^i \varphi_i(\xi') \in \tilde{Z}_{k+2m}(\Omega, \hat{x}) \cap \tilde{Z}_{k-s+1}(S, \hat{x})$ та обмежена в Ω^*, то за умовою (4) також існує

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega^*_\varepsilon} \sum_{i=0}^{2m+s-1} (\xi_n - \varepsilon)^i \varphi_i(\xi', \varepsilon) f(\xi, D_r u) d\xi = \int\limits_{\Omega^*} \sum_{i=0}^{2m+s-1} \xi_n^i \varphi_i(\xi') f(\xi, D_r u) d\xi.$$

Тоді з (7) випливає існування

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \sum_{j=0}^{2m-1} \tilde{B}_j u \left\{ \sum_{t=0}^{2m-1-j} \tilde{T}_{jt} \varphi_{2m-1-t-j} (2m-1-t-j)! \right\} dS. \tag{8}$$

Якщо $\varphi_0 \equiv \varphi_1 \equiv \ldots \equiv \varphi_{2m-2} \equiv 0$, то в (8) залишається один доданок (при $t = j = 0$) $(2m-1)! \int_{S_\varepsilon} \tilde{B}_0 u \cdot \tilde{T}_{00} \varphi_{2m-1} dS$.

Введемо лінійний функціонал $\tilde{F}_0$: $\langle \varphi, \tilde{F}_0 \rangle = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \tilde{B}_0 u \cdot \varphi dS$, $\varphi \in \tilde{Z}_{k+1}(S, \hat{x})$. Із (7) маємо

$$\tilde{T}_{00}(2m-1)! \langle \varphi_{2m-1}, \tilde{F}_0 \rangle =$$

$$= \int\limits_{\Omega^*} \xi_n^s u \varphi d\xi - \int\limits_{\Omega^*} \Big[\xi_n^{2m-1} \varphi_{2m-1}(\xi') + \xi_n^{2m} \varphi_{2m}(\xi') + \ldots$$

$$\ldots + \xi_n^{2m+s-1} \varphi_{2m+s-1}(\xi') \Big] f(\xi, D_r u) d\xi. \tag{9}$$

Із формули (5) отримуємо $\big|\varphi(\xi', \xi_n)\big| \leq \tilde{C}_{2m-1} \sum_{|\gamma|\leq s+1} \sup\limits_{\xi'\subset S} \left| \left(\dfrac{\partial}{\partial \xi'}\right)^\gamma \varphi_{2m-1}(\xi') \right|$, тому

$$\int\limits_{\Omega^*} \xi_n^s \big| u \varphi(\xi', \xi_n) \big| d\xi \leq \tilde{C}'_{2m-1} \sum_{|\gamma|\leq s+1} \sup_{\xi'\subset S} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^s \varphi_{2m-1}(\xi') \right|,$$

$$\tilde{C}'_{2m-1} = \tilde{C}_{2m-1} \int\limits_{\Omega^*} \xi_n^s |u| d\xi.$$

Оскільки функція $\xi_n^{2m-1} \varphi_{2m-1}(\xi') + \ldots + \xi_n^{2m+s-1} \varphi_{2m+s-1}(\xi')$ належить $\tilde{Z}_{k+2m}(\Omega, \hat{x})$ та

$$\big| \xi_n^{2m-1} \varphi_{2m-1}(\xi') + \ldots + \xi_n^{2m+s-1} \varphi_{2m+s-1}(\xi') \big| \leq$$

$$\leq \tilde{C}' \sum_{|\gamma|\leq s} \sup_{\xi'} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^\gamma \varphi_{2m-1}(\xi') \right|,$$

то, враховуючи умову (4), із (9) одержуємо

$$\big| \langle \varphi, \tilde{F}_0 \rangle \big| \leq C'_1 \sum_{|\gamma|\leq s+1} \sup_{\xi'} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^\gamma \varphi(\xi') \right| \quad \forall \varphi \in \tilde{Z}_{k+1}(S, \hat{x}), \quad C'_1 = C'_1\big(\|u\|_k\big).$$

Отже, функціонал $\tilde{F}_0$ є лінійним, неперервним на $\tilde{Z}_{k+1}(S,\hat{x})$ і має порядок сингулярності $s(\tilde{F}_0) \leq s+1$.

Вважаючи далі по черзі відмінними від нуля тільки по одній із функцій $\varphi_{2m-2}, \ldots, \varphi_1, \varphi_0$, з (7) та (8) так само одержуємо існування

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon} \varphi \cdot \tilde{B}_j u dS = \langle \varphi, \tilde{F}_j\rangle, \qquad \varphi \in \tilde{Z}_{k+j+1}(S,\hat{x}), \quad j=\overline{0,2m-2}.$$

Справді, $\tilde{F}_0 \in \tilde{Z}'_{k+1}$, а припустивши існування $\tilde{F}_j \in \tilde{Z}'_{k+j+1}(S,\hat{x})$ порядків сингулярностей $s(\tilde{F}_j) \leq s+j+1$ при $j=\overline{0,l-1}$, де $l=\overline{0,2m-1}$, та поклавши $\varphi_{2m-1-j}=0$ для всіх $j\neq l$, у (8) матимемо відмінними від нуля тільки доданки при $t+j=l$. Тоді з (7) одержуємо існування

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon} \tilde{B}_l u \tilde{T}_{l0}\varphi_{2m-l-1} dS =$$

$$= \frac{1}{(2m-l-1)!}\int\limits_{\Omega^*} \xi_n^s u\varphi(\xi',\xi_n)d\xi - \sum_{i=0}^{l-1}\left\langle \tilde{T}_{i\;l-i}\varphi_{2m-l-1}, \tilde{F}_i\right\rangle (2m-1-l)! -$$

$$-\int\limits_{\Omega^*}\left[\xi_n^{2m-l-1}\varphi_{2m-l-1}(\xi') + \ldots + \xi_n^{2m+s-1}\varphi_{2m+s-1}(\xi')\right] f(\xi, D_r u)d\xi,$$

де $\tilde{T}_{i\;l-i}$ — дотичний диференціальний оператор порядку $l-i$ (звідки $\tilde{T}_{i\;l-i}\varphi_{2m-l-1} \in \tilde{Z}_{k+1+i}(S,\hat{x})$). Узагальнені функції $\tilde{F}_i$ за припущенням індукції мають порядки сингулярностей $\leq i+s+1$, тому

$$\left|\langle \tilde{T}_{i\;l-i}\varphi_{2m-l-1}, \tilde{F}_i\rangle\right| \leq C'_i \sum_{|\gamma|\leq s+i+1} \sup_{\xi'}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^\gamma \tilde{T}_{i\;l-i}\varphi_{2m-l-1}(\xi')\right| \leq$$

$$\leq \tilde{C}'_i \sum_{|\gamma|\leq s+l+1} \sup_{\xi'}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^\gamma \varphi_{2m-l-1}(\xi')\right|, \quad i=\overline{0,l-1}.$$

Також

$$\left|\int_{\Omega^*}\xi_n^s u\varphi d\xi\right| \leq \tilde{C}'_{2m-l-1}\sum_{|\gamma|\leq s+l+1}\sup_{\xi'}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^\gamma \varphi_{2m-l-1}(\xi')\right|,$$

$$\xi_n^{2m-l-1}\varphi_{2m-l-1}(\xi') + \ldots + \xi_n^{2m+s-1}\varphi_{2m+s-1}(\xi') \in \tilde{Z}_{k+2m}(\Omega,\hat{x}) \cap Z_{k-s}(S,\hat{x})$$

та

$$\left|\xi_n^{2m-l-1}\varphi_{2m-l-1}(\xi') + \ldots + \xi_n^{2m+s-1}\varphi_{2m+s-1}(\xi')\right| \leq$$

$$\leq \tilde{C}"_{2m-l-1}\sum_{|\gamma|\leq s+l}\sup_{\xi'}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^\gamma \varphi_{2m-l-1}(\xi')\right|.$$

Отже,

$$\left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}\tilde{B}_l u\varphi_{2m-l-1}dS\right| = \left|\langle\tilde{T}_{l0}\varphi_{2m-l-1},\tilde{F}_l\rangle\right| \le$$

$$\le C_l'\sum_{|\gamma|\le s+l+1}\sup_{\xi'}\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^{\gamma}\varphi_{2m-l-1}(\xi')\right|,$$

а оскільки $\tilde{T}_{l0}\neq 0$, то лінійний функціонал $\tilde{F}_l$ є неперервним на $\tilde{Z}_{k+l+1}(S,\hat{x})$ і має порядок сингулярності $s(\tilde{F}_l)\le s+l+1$.

Зокрема, існують $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi\cdot B_j u dS = \langle\varphi, F_j\rangle$, $\varphi\in\tilde{Z}_{k+m_j+1}(S,\hat{x})$, узагальнені функції F_j мають порядки сингулярностей $s(F_j)\le s+m_j+1$, $j=\overline{1,m}$.

Вибираючи для пробної функції Φ функції $\varphi_i\in Z_{k-i}(S,\hat{x})$ $\big(\varphi_i\in C^\infty(S)\big)$, $i=\overline{0,2m-1}$, так само доводимо, що за умови (4) функції $\tilde{B}_j u$ набувають на S узагальнених крайових значень $\tilde{F}_j\in Z'_{k+j+1}(S,\hat{x})$ $\big(\tilde{F}_j\in D'(S)\big)$ порядків сингулярностей $s(\tilde{F}_j)<k+j+1$ $(\le s+j+1)$, $j=\overline{0,2m-1}$.

***Зауваження* 1.** Використовуючи подібні міркування та формулу (7), показуємо таке: якщо для розв'язку $u\in C^{2m}(\Omega)$ рівняння (3) виконується умова (4) та $\left(\dfrac{\partial}{\partial\nu}\right)^t u$ для всіх $t=\overline{0,2m-1}$ набувають узагальнених крайових значень із $D'(S)$ $\big(\tilde{Z}'_{k+t+1}(S,\hat{x})\big)$ порядків сингулярностей $\le s+t+1$, то $u\in\tilde{M}_s(\Omega)$ $\big(u\in\tilde{M}_{s,k-s}(\Omega,\hat{x})\big)$.

3. Формулювання узагальненої крайової задачі. Нехай функція $f(x,z)$ визначена та неперервна в $\Omega\times\mathbb{R}^{M(r)}$, $F_j\in\tilde{Z}'_{p_j}(S,\hat{x})$, $\hat{x}\in S$, $s(F_j)\le s_j<p_j$, $j=\overline{1,m}$.

Зауважимо, що при $F\in D'(S)$, $s(F)\le s'$ також $F\in Z'_k(S,\hat{x})\subset\tilde{Z}'_k(S,\hat{x})$ для всіх $k>s'$ та $\hat{x}\in S$.

Розглядаємо узагальнену нормальну еліптичну крайову задачу

$$A(x,D)=f(x,D_r u),\quad x\in\Omega,\qquad B_j(x,D)u\,|_S=F_j,\quad j=\overline{1,m},\qquad (10)$$

за умови, що відповідна їй лінійна однорідна крайова задача є однозначно розв'язною. Далі вважаємо

$$s\ge s_0=\max_{1\le j\le m}(s_j-m_j-1),\qquad k_1>\max_{1\le j\le m}(p_j-m_j-1),$$

$$k\ge k_0=\max\left\{k_1,\max_{1\le j\le m}(2m-m_j-1)\right\}\quad\text{та}\quad k>s.$$

Тоді $\tilde{Z}_{k+m_j+1}(S,\hat{x})\subset\tilde{Z}_{p_j}(S,\hat{x})$, звідки $\tilde{Z}'_{p_j}(S,\hat{x})\subset\tilde{Z}'_{k+m_j+1}(S,\hat{x})$.

Формулювання 1 *задачі.* Знайти функцію $u\in\tilde{M}_s(\Omega)\cap C^{2m}(\Omega)$ $\big(u\in\in\tilde{M}_{s,k-s}(\Omega,\hat{x})\cap C^{2m}(\Omega)\big)$, яка задовольняє рівняння (3) та крайові умови

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi B_j u dS=\langle\varphi,F_j\rangle\quad\forall\varphi\in\tilde{Z}_{p_j}(S,\hat{x}),\quad j=\overline{1,m}\qquad (11)$$

$\Bigg($ і існують границі

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi T_j u dS \quad \forall\varphi\in Z_{k+\hat{m}_j+1}(S,\hat{x}),\quad j=\overline{1,m}\Big). \tag{12}$$

Якщо $F_j\in Z'_{p_j}(S,\hat{x})\subset\tilde{Z}'_{p_j}(S,\hat{x})$, $j=\overline{1,m}$, то у формулюванні 1 задачі можна вважати $u\in M_k(\Omega,\hat{x})\cap C^{2m}(\Omega)$, в умовах (11) $\varphi\in Z_{p_j}(S,\hat{x})$ замість $\varphi\in\tilde{Z}_{p_j}(S,\hat{x})$, а при $F_j\in D'(S)$, $j=\overline{1,m}$, вважаємо $u\in\tilde{M}_s(\Omega)\cap C^{2m}(\Omega)$ та $\varphi\in D(S)$ в умовах (11).

Формулювання 2 *задачі.* Знайти функцію $u\in\tilde{M}_s(\Omega)$ $(u\in\tilde{M}_{s,k-s}(\Omega,\hat{x}))$, яка задовольняє (4) та виконується тотожність

$$\int\limits_\Omega A^*\psi u dx=\int\limits_\Omega \psi f dx+\sum_{j=1}^m\langle\hat{T}_j\psi,F_j\rangle \quad \forall\psi\in X_s(\overline{\Omega}) \quad (\forall\psi\in\tilde{X}_{s,k}(\overline{\Omega},\hat{x})). \tag{13}$$

Якщо $F_j\in D'(S)$ $\big(F_j\in Z'_{p_j}(S,\hat{x})\big)$, $j=\overline{1,m}$, то у формулюванні 2 задачі шукаємо $u\in\tilde{M}_s(\Omega)$ (відповідно $u\in M_k(\Omega,\hat{x})$) та вимагаємо виконання (13) при $\psi\in X_s(\overline{\Omega})$ (відповідно $\psi\in X_k(\overline{\Omega},\hat{x})$).

Зауважимо, що згідно з [7, 16] при $s\in N$, $k>k_0$, $k>s$, $\psi\in X_k(\overline{\Omega})$ (відповідно $\psi\in X_k(\overline{\Omega},\hat{x})$, $\psi\in\tilde{X}_{s,k}(\overline{\Omega})$) маємо $\hat{T}_j\psi\in D(S)$ (відповідно $\hat{T}_j\psi\in Z_{k+m_j+1}(S,\hat{x})$, $\hat{T}_j\psi\in\tilde{Z}_{k+m_j+1}(S,\hat{x})$), а тому вираз $\sum_{j=1}^m\langle\hat{T}_j\psi,F_j\rangle$ існує.

Зауважимо також, що розв'язок задачі (10) у формулюванні 2 не обов'язково повинен належати просторові $C^{2m}(\Omega)$.

Теорема 2. *Функція* $u\in\tilde{M}_s(\Omega)\cap C^{2m}(\Omega)$, *при якій виконується* (4), *є розв'язком задачі* (10) *у формулюванні* 1 *тоді й тільки тоді, коли вона є розв'язком цієї задачі у формулюванні* 2. *Розв'язок* $u\in\tilde{M}_{s,k-s}(\Omega,\hat{x})\cap C^{2m}(\Omega)$ *задачі* (10) *у формулюванні* 1, *який задовольняє* (4), *також є розв'язком цієї задачі у формулюванні* 2.

Доведення. Нехай $u\in\tilde{M}_s(\Omega)\cap C^{2m}(\Omega)$ $\big(u\in C^{2m}(\Omega)\cap\tilde{M}_{s,k-s}(\Omega,\hat{x})\big)$ є розв'язком задачі (10) у формулюванні 1 та виконується (4). За теоремою 1 (припущенням (12)) також існують $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi T_j u dS$ для довільної $\varphi\in\tilde{Z}_{k+\hat{m}_j+1}(S,\hat{x})$, $j=\overline{1,m}$.

Оскільки $\hat{B}_j\psi\in\tilde{Z}_{k+\hat{m}_j+1}(S,\hat{x})$ при $\psi\in\tilde{X}_{s,k}(\overline{\Omega},\hat{x})$, то за лемою [18, с. 70] існують границі

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{S_\varepsilon}\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\hat{B}_j\psi\Big)T_j u dS=0 \quad \text{для всіх} \quad \psi\in\tilde{X}_{s,k}(\overline{\Omega},\hat{x}),\quad j=\overline{1,m}.$$

Запишемо формулу Гріна в Ω_ε для u та $\psi\in\tilde{X}_{s,k}(\overline{\Omega},\hat{x})$:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}A^*\psi\cdot u dx=\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\psi(x)\cdot f(x,D_r u)dx+\sum_{j=1}^m\int\limits_{S_\varepsilon}\Big(B_j u\cdot\hat{T}_j\psi-T_j u\hat{B}_j\psi\Big)dS. \tag{14}$$

Переходячи в (14) до границі при $\varepsilon\to 0$ і використовуючи лему [18, с. 70], одержуємо

$$\int\limits_{\Omega} A^*\psi \cdot u dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \psi(x) \cdot f(x, D_r u) dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{S_\varepsilon} (B_j u)(x_\varepsilon) \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \hat{T}_j \psi(x_\varepsilon) \right) dS \qquad (15)$$

для всіх $\psi \in \tilde{X}_k(\overline{\Omega}, \hat{x})$. Згідно із зауваженням 1 та умовами (11) рівність (15) набирає вигляду (13).

Нехай тепер $u \in \tilde{M}_s(\Omega) \cap C^{2m}(\Omega)$ є розв'язком задачі (10) у формулюванні 2 та виконується (4). Із (13) при $\operatorname{supp} \psi \subset \Omega_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, матимемо $\int_\Omega A^*\psi \cdot u dx = \int_\Omega \psi(x) \cdot \cdot f(x, D_r u) dx$, тобто $\int_\Omega \psi \cdot A u dx = \int_\Omega \psi(x) \cdot f(x, D_r u) dx$, звідки за гіпоеліптичністю оператора A, регулярністю u, неперервністю f та довільністю ψ одержуємо, що функція u задовольняє у класичному розумінні рівняння (3). За теоремою 1 $B_j u$ та $T_j u$ набувають на S деяких узагальнених крайових значень із $\tilde{Z}'_{k+\hat{m}_j+1}(S, \hat{x})$, $k > s$. Залишається показати, що $B_j u$ набувають на S заданих узагальнених крайових значень F_j, $j = \overline{1, m}$.

Оскільки існує границя при $\varepsilon \to 0$ кожного з доданків у (14), то маємо (15). Віднімаючи (15) від (13), одержуємо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{S_\varepsilon} (B_j u)(x_\varepsilon)(\hat{T}_j \psi)(x) dS_\varepsilon = \sum_{j=1}^{m} \langle \hat{T}_j \psi, F_j \rangle \quad \forall \psi \in \tilde{X}_{s,k}(\overline{\Omega}, \hat{x}). \qquad (16)$$

Згідно з [7] та лемою 4 із [16] для довільних $\varphi_j \in D(S)$ $\left(\varphi_j \in \tilde{Z}_{p_j}(S, \hat{x})\right)$, $j = \overline{1, m}$, існує така $\psi \in X_s(\overline{\Omega})$ (відповідно $\psi \in \tilde{X}_{s,k}(\overline{\Omega}, \hat{x})$), що $\hat{T}_j \psi = \varphi_j$, $j = \overline{1, m}$, тому із (16) одержуємо (11).

Позначимо через $\big(G_0(x, y), G_1(x, y), \ldots, G_m(x, y)\big)$ вектор-функцію Гріна задачі (10), існування якої та властивості встановлено в [22, 23]. Також використовуємо позначення

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} g_j(x) = \sum_{j=1}^{m} \langle G_j(x, y), F_j(y) \rangle, \quad x \in \Omega.$$

***Зауваження* 2.** При $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \leq s_j$, $j = \overline{1, m}$, $s \geq s_0 + n - 1$, функція $g \in \tilde{M}_s(\Omega)$ (див. [15]). При $F_j \in Z'_{p_j}(S, \hat{x})$, $s(F_j) \leq s_j < p_j$, $s_j \leq m_j$, $j = \overline{1, m}$, $k \geq k_0$ маємо $g \in M_k(\Omega, \hat{x})$ (випливає із леми 2 та доведення теореми 2 у [16]). При $F_j \in \tilde{Z}'_{p_j}(S, \hat{x})$, $s(F_j) \leq s_j < p_j$, $s_j \leq m_j$, $j = \overline{1, m}$, $s \geq \max\limits_{1 \leq j \leq m} (p_j - m_j - 1)$, та $k \geq k_0$ маємо $g \in \tilde{M}_{s,k-s}(\Omega, \hat{x})$.

Розв'язком у просторі $\tilde{M}_s(\Omega)$ $\left(\tilde{M}_{s,k-s}(\Omega, \hat{x})\right)$ інтегро-диференціального рівняння

$$u(x) - \int\limits_{\Omega} G_0(x, y) f(y, D_r u(y)) dy = \sum_{j=1}^{m} \langle G_j(x, y), F_j(y) \rangle, \quad x \in \Omega, \qquad (17)$$

називаємо таку $u \in \tilde{M}_s(\Omega)$ $\big(u \in \tilde{M}_{s,k-s}(\Omega,\hat{x})\big)$, що рівність (17) виконується майже скрізь у Ω. Зрозуміло, що для розв'язку u рівняння (17) у просторі $\tilde{M}_s(\Omega)$ $\big(\tilde{M}_{s,k-s}(\Omega,\hat{x})\big)$ також $\int_\Omega G_0(\cdot,y)f(y,D_r u(y))dy \in \tilde{M}_s(\Omega)$ $(\in \tilde{M}_{s,k-s}(\Omega,\hat{x}))$.

Теорема 3. *Функція* u, *яка задовольняє* (4), *є розв'язком рівняння* (17) *у* $\tilde{M}_s(\Omega)$ $\big(\tilde{M}_{s,k-s}(\Omega,\hat{x})\big)$ *тоді й лише тоді, коли* $u \in \tilde{M}_s(\Omega)$ $(u \in \tilde{M}_{s,k-s}(\Omega,\hat{x}))$ *є розв'язком задачі* (10) *у формулюванні* 2.

Доведення. Розглянемо випадок $u \in \tilde{M}_{s,k-s}(\Omega,\hat{x})$ (доведення у випадку $u \in \tilde{M}_s(\Omega)$ є аналогічним). Для розв'язку u рівняння (17) в $\tilde{M}_{s,k-s}(\Omega,\hat{x})$ при всіх $\hat{x} \in S$, $x \in \Omega$

$$\varrho^s(x)\varrho^{k-s}(x,\hat{x})[u(x) - \int\limits_\Omega G_0(x,y)f(y,D_r u(y))dy - \sum_{j=1}^m \langle G_j(x,y),F_j(y)\rangle] = 0. \quad (18)$$

Оскільки $A^*\psi(x) = O(\varrho^s(x)\varrho^{k-s}(x,\hat{x}))$ при $x \to \hat{x}$ для $\psi \in \tilde{X}_{s,k}(\overline{\Omega},\hat{x})$, то існує

$$\int\limits_\Omega A^*\psi(x)u(x)dx = \int\limits_\Omega A^*\psi(x)\left(\int\limits_\Omega G_0(x,y)f(y,D_r u(y))dy\right)dx +$$

$$+ \int\limits_\Omega A^*\psi(x)\sum_{j=1}^m \langle G_j(x,y),F_j(y)\rangle dx, \quad \psi \in \tilde{X}_{s,k}(\overline{\Omega},\hat{x}), \quad j = \overline{1,m}. \quad (19)$$

Згідно з лемою 6 із [16] при $k \geq k_0$ та при $\psi \in \tilde{X}_{s,k}(\overline{\Omega},\hat{x}) \subset X_k(\overline{\Omega},\hat{x})$ правильними є тотожності

$$\int\limits_\Omega A^*\psi(x)G_0(x,y)dx = \psi(y), \ y \in \overline{\Omega},$$

$$\int\limits_\Omega A^*\psi(x)G_j(x,y)dx = \hat{T}_j\psi(y), \qquad y \in S, \quad j = \overline{1,m}. \quad (20)$$

Тоді $\int_\Omega \left(\int_\Omega A^*\psi(x)G_0(x,y)dx\right)f(y,D_r u(y))dy = \int_\Omega \psi(y)f(y,D_r u(y))dy$, а за теоремою Фубіні також

$$\int\limits_\Omega A^*\psi(x)\left(\int\limits_\Omega G_0(x,y)f(y,D_r u(y))dy\right)dx = \int\limits_\Omega \psi(y)f(y,D_r u(y))dy.$$

За аналогом теореми Фубіні [21]

$$\int\limits_\Omega A^*\psi(x)\langle G_j(x,y),F_j(y)\rangle dx =$$

$$= \left\langle \int\limits_\Omega A^*\psi(x)G_j(x,y)dx, F_j(y)\right\rangle = \langle \hat{T}_j\psi(y),F_j(y)\rangle, \quad j = \overline{1,m}.$$

Тому із (19) одержуємо (13).

Якщо u є розв'язком задачі (10) у формулюванні 2, то $u \in \tilde{M}_{s,k-s}(\Omega, \hat{x})$ та виконується тотожність (13). Використовуючи формули (20), теорему Фубіні та її аналог, одержуємо $\int\limits_{\Omega} G_0(\cdot, y) f(y, D_r u(y)) dy \in \tilde{M}_{s,k-s}(\Omega, \hat{x})$ та подаємо тотожність (13) у вигляді (19). За лемою 4 із [16] для довільного $s \in N \cup \{0\}$ та довільної $\varphi \in \tilde{Z}_k(\Omega, \hat{x})$ такої, що $\varphi(x) = O\big(\varrho^s(x) \varrho^{k-s}(x, \hat{x})\big)$ при $d(x) \to 0$ та $x \to \hat{x}$, існує така функція $\psi \in \tilde{X}_{s,k}(\Omega, \hat{x})$, що $A^* \psi = \varphi$. Тому (19) набуває вигляду

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(x)[u(x) - \int\limits_{\Omega} G_0(x, y) f(y, D_r u(y)) dy - \sum_{j=1}^{m} \langle G_j(x, y), F_j(y) \rangle] dx = 0,$$

тобто u — розв'язок рівняння (17) у $\tilde{M}_{s,k-s}(\Omega, \hat{x})$.

Теорема 4. *Нехай* $u \in \tilde{M}_s(\Omega)$ $\big(u \in \tilde{M}_{s,k-s}(\Omega, \hat{x})\big)$ *— розв'язок задачі* (10), *виконано умову* (4) *та для довільної підобласті* Ω' *області* Ω, *розміщеної строго всередині* Ω, *рівномірно збігаються інтеграли*

$$\int\limits_{\Omega'} |x-y|^{2m-n-t} \big| f(y, D_r v(y)) \big| dy, \qquad x \in \overline{\Omega'}, \quad t \le r, \quad D_r v \in [L_1(\Omega')]^{M(r)}. \tag{21}$$

Тоді $u \in C^{2m-1}(\Omega)$. *Якщо, крім того,* $r \le 2m-2$, *функція* $f(x, z)$ *має неперервні похідні першого порядку за всіма аргументами* $x \in \Omega, z \in \mathbb{R}^{M(r)}$, *то* $u \in C^{2m}(\Omega)$.

Доведення. Нехай S_ε — паралельна до S поверхня, розміщена всередині Ω на відстані $\varepsilon > 0$ від S, Ω_ε — область, обмежена поверхнею S_ε, u — розв'язок задачі (10). При $x \in \overline{\Omega}_\varepsilon$ запишемо рівняння (17) у вигляді $u(x) = (Hu)(x)$, де

$$(Hu)(x) = \int\limits_{\Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} G_0(x, y) f(y, D^\alpha u(y)) dy + \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} G_0(x, y) f(y, D_r u(y)) dy + g(x).$$

За властивостями узагальнених функцій, залежних від параметрів, та вектор-функції Гріна маємо $g \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. З умови (4) і того, що $G_0 \in C^\infty\big(\Omega_\varepsilon \times (\Omega \setminus \Omega_{\frac{\varepsilon}{2}})\big)$, одержуємо $\int_{\Omega \setminus \Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} G_0(\cdot, y) f(y, D_r u(y)) dy \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Тоді, враховуючи оцінки похідних вектор-функції Гріна та (21), одержуємо неперервність $D^\gamma (Hu)(x)$, $|\gamma| \le r$, в $\overline{\Omega}_\varepsilon$, зокрема неперервність та обмеженість функції $f(x, D_r u(x))$, $x \in \overline{\Omega}_\varepsilon$, для довільного $\varepsilon > 0$, а звідси неперервність $D^\gamma u = D^\gamma (Hu)$ в Ω_ε для всіх $|\gamma| \le 2m-1$.

Використовуючи „перекидання" диференціювання на $f(y, D_r u(y))$ у виразі $\int_{\Omega_{\frac{\varepsilon}{2}}} D_x^\gamma G_0(x, y) f(y, D_r u(y)) dy$, $x \in \Omega_\varepsilon$, за додаткових умов теореми доводимо неперервність $D^\gamma u$ в Ω_ε і при $|\gamma| = 2m$. Оскільки довільна Ω', розміщена строго всередині Ω, належить також Ω_ε при достатньо малому значенні $\varepsilon > 0$, то $u \in C^{2m}(\Omega')$, тобто $u \in C^{2m}(\Omega)$.

***Зауваження* 3.** У [14–16] для випадку $f = f(x, u)$ знайдено достатні умови розв'язності задачі (10). Використовуючи принцип Шаудера, для функції $f = \mu |u|^q$ при $q > 0$, $\mu \in L_\infty(\Omega)$, також знаходимо достатні умови розв'язності задачі у підпросторах $C_l^M(\Omega) = \left\{ v \in C(\Omega) : \ \varrho^{-l} v \in C(\overline{\Omega}), \ \|v\|' = \sup\limits_{x \in \Omega} \varrho^{-l}(x) \big| v(x) \big| \right\}$,

$l+k > -1$, та $C_l^M(\Omega,\hat{x}) = \Big\{v \in C(\overline{\Omega}\setminus\hat{x}):\ \varrho^{-l}(\cdot,\hat{x})v \in C(\overline{\Omega}),\ \|v\|' = \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x,\hat{x})\big|v(x)\big|\Big\}$, $l+k > -n-1$, просторів $\tilde{M}_k(\Omega)$ та $M_k(\Omega,\hat{x})$ відповідно:

якщо $F_j \in D'(S)$, $s(F_j) \le s_j$, $j=\overline{1,m}$, $-n < s_0 < \dfrac{1}{q} - n$, $k \ge \max\left\{\max\limits_{1\le j\le m}(2m-m_j-1), s_0+n\right\}$, $-\min\left\{\dfrac{1}{q}, k+1\right\} < l \le -\min\{s_0+n,\ 0\}$ при $q>0$, $2m \ge n$ та $q \in \left(0, \dfrac{1}{n-2m}\right)$, $2m<n$, то при всіх $\mu \in L_\infty(\Omega)$ у випадку $q\in(0,1)$ та за достатньо малих значень $\sup\limits_{x\in\Omega}|\mu(x)|$ у випадку $q\ge 1$ існує розв'язок $u \in C_l^M(\Omega) \subset \tilde{M}_k(\Omega)$ задачі (10) (при $q=1$ єдиний);

якщо $F_j \in D'(S)$, $s(F_j)\le s_j$, $\operatorname{supp} F_j = \hat{x}$, $j=\overline{1,m}$, $1-n < s_0 < \dfrac{n}{q} - n + 1$, $k \ge \max\left\{\max\limits_{1\le j\le m}(2m-m_j-1), s_0-1\right\}$, $-\min\left\{k+n, \dfrac{n}{q}\right\} < l \le l_1 = -\min\{s_0+n-1, 0\}$ для $q>0$ при $2m\ge n$ та для $q \in \left(0, \dfrac{n}{n-2m}\right]$ при $2m<n$, $1-n < s_0 \le \dfrac{2m}{q-1} - n + 1$, $-\dfrac{2m}{q-1} \le l \le l_1$ при $q > \dfrac{n}{n-2m}$, $2m<n$, то при всіх $\mu\in L_\infty(\Omega)$ у випадку $q\in(0,1)$ та за достатньо малих значень $\sup\limits_{x\in\Omega}\big|\mu(x)\big|$ у випадку $q\ge 1$ існує розв'язок задачі (10) у $C_l^M(\Omega,\hat{x})$ (при $q=1$ єдиний).

1. *Gmira A., Veron L.* Boundary singularities of solutions of some nonlinear elliptic equation // Indiana Univ. Math. J. – 1991. – **64**. – P. 271 – 324.
2. *Le Gall J.-F.* The Brounian snake and the solutions of $\Delta u = u^2$ in a domain // Probab. Theory and Related Fields. – 1995. – **102**. – P. 393 – 432.
3. *Dynkin E. B., Kuznetsov S. E.* Trace on the boundary for solutions of nonlinear equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1998. – **350**. – P. 4499 – 4519.
4. *Marcus M., Veron L.* Removable singularities and boundary traces // J. math. pures et appl. – 2001. – **80**, № 1. – P. 879 – 900.
5. *Грушин В. В.* О поведении решений дифференциальных уравнений вблизи границы // Докл. АН СССР. – 1964. – **158**. – С. 264 – 267.
6. *Гупало Г. С.* Про узагальнену задачу Діріхле // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1967. – № 7. – С. 843 – 846.
7. *Лопушанська Г. П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D'. – Львів: Вид. центр Львів. нац. ун-ту, 2002. – 287 с.
8. *Boccardo L., Gallovet Th.* Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data // J. Funct. Anal. – 1989. – **87**. – P. 149 – 169.
9. *Rakotoson J. M.* Generalized solutions in a new-type of sets for problems with measures as data // Different. Integral Equats. – 1993. – **6**. – P. 27 – 36.
10. *Alvino A., Ferone V., Trombetti G.* Nonlinear elliptic equations with lower-order terms // Ibid. – 2001. – **14**. – P. 1169 – 1180.
11. *Benilan Ph., Boccardo L., Gallouet T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L.* An L_1-theory of existence and uniquenessof solutions of nonlinear elliptic equations // Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat. – 1995. – **22**. – P. 241 – 273.
12. *Kovalevskii A. A.* Integrability of solutions of nonlinear elliptic equations with right-hand sides from classes close to L^1 // Math. Notes. – 2001. – **70**. – P. 337 – 346.
13. *Poretta A.* Nonlinear equations with natural growth terms and measure data // 2002-Fez Conf. Part. Different. Equat. Electron. J. Different. Equat. – 2002. – P. 183 – 202.
14. *Лопушанська Г. П.* Задача Діріхле для квазілінійних еліптичних рівнянь у просторі розподілів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1990. – Вип. 35. – С. 26 – 31.

15. *Лопушанська Г. П., Жидик У. В.* Про узагальнені граничні значення розв'язків квазілінійного еліптичного рівняння 2-го порядку // Там же. – 2001. – Вип. 59. – С. 126 – 138.
16. *Лопушанська Г. П.* Узагальнені крайові задачі для лінійних та напівлінійних еліптичних рівнянь // Укр. мат. вісн. – 2005. – **2**, № 3. – С. 377 – 394.
17. *Лионс Ж.-Л., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
18. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
19. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях. I – IV. – Чернигов: Изд-во Чернигов. пед. ин-та, 1990, 1991.
20. *Лопатинский Я. Б.* Граничные свойства решений дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа // Докл. АН УССР. – 1956. – № 2. – С 107 – 112.
21. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
22. *Березанский Ю. М., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач // Укр. мат. журн. – 1967. – **19**, № 5. – С. 3 – 32.
23. *Красовский Ю. П.* Свойства функций Грина и обобщенные решения эллиптических граничных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1969. – **33**, № 1. – С. 109 – 137.

Одержано 14.04.06