УДК 517.5

Д. М. Бушев, Ю. І. Харкевич (Волин. ун-т, Луцьк)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ЛІНІЙНИМИ ДОДАТНИМИ ОПЕРАТОРАМИ

In an N-dimensional space, we consider the approximation of classes of periodic functions which are invariant with respect to a displacement by a linear operator with kernel determined as the product of two kernels, one of which is positive. We establish that the least upper bound of this approximation does not exceed the sum of respectively chosen least upper bounds in m- and $(N-m)$-dimensional spaces. We also consider the cases in which the obtained inequality becomes the equality.

Встановлено, що в N-вимірному просторі точна верхня межа наближення класів періодичних функцій, інваріантних відносно зсуву, лінійним оператором з ядром, що є добутком двох ядер, одне з яких є додатним, не перевищує суми відповідно вибраних точних верхніх меж в m- і $(N-m)$-вимірних просторах. Розглянуто випадки, в яких для отриманої нерівності має місце знак рівності.

Відомо, що знаходження величин точних верхніх меж наближення класів періодичних функцій лінійними операторами у просторі розмірності N не завжди можна звести до обчислення відповідних величин у просторі меншої розмірності. В даній роботі якраз і вказано умови, при яких це можливо зробити.

Доведено, що в N-вимірному просторі точна верхня межа наближення класів періодичних функцій, інваріантних відносно зсуву, лінійним оператором з ядром, що є добутком двох ядер, одне з яких m-вимірне і додатне, не перевищує суми відповідно вибраних точних верхніх меж в m- і $(N-m)$-вимірних просторах. Встановлено, що в нерівності має місце знак рівності для центрально-симетричних класів неперервних або істотно обмежених функцій, які задовольняють ще одну додаткову умову. З одержаних результатів у вигляді наслідку можна одержати теорему 1 з роботи [1].

Показано, що наближення лінійним додатним оператором з довільним ядром залежить лише від одновимірних складових цього ядра, тобто збігається з наближенням деяким лінійним додатним оператором з ядром, що є добутком одновимірних ядер.

Нехай C^N, L_∞^N і L_p^N — простори 2π-періодичних по кожній із N-змінних функцій $f(x)=f(x_1,\ldots,x_N)$, відповідно неперервних, суттєво обмежених і сумовних в p-му степені $(1\le p<\infty)$, з нормами

$$\|f\|_{C^N} = \sup_x|f(x)|, \qquad \|f\|_{L_\infty^N} = \sup_x \operatorname{vrai}|f(x)|,$$

$$\|f\|_{L_p^N} = \left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^N \int\limits_{P_N} |f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

де

$$P_N = \prod_{i=1}^{N}[0;2\pi]$$

— N-вимірний куб.

Позначимо через $x^m=(x_1,\ldots,x_m)$, $x^{N-m}=(x_{m+1},\ldots,x_N)$ і $x=(x_1,\ldots,x_N)$ відповідно m-, $(N-m)$- і N-вимірні вектори, координатами яких є дійсні числа; через E^m, E^{N-m} відповідно множини всіх m- і $(N-m)$-вимірних векторів

$k^m = (k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_m)$, $k^{N-m} = (k_{m+1}, \ldots, k_N)$, координатами яких є цілі невід'ємні числа. $S(k^m)$ і $S(k^{N-m})$ — число координат векторів k^m і k^{N-m}, що дорівнюють нулю, B^m і B^{N-m} — відповідно множини найможливіших m- і $(N - m)$-вимірних векторів, кожна координата яких дорівнює 0 або 1; $B(k^m)$ і $B(k^{N-m})$ — підмножини множин B^m і B^{N-m} такі, що якщо $k_j = 0$, то і $i_j = 0$, де $i^m = (i_1, \ldots, i_j, \ldots, i_m) \in B(k^m)$,

$$a_{k^m}^{i^m} = \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{P_m} f(t^m) \prod_{j=1}^{m} \cos\left(k_j t_j - \frac{\pi}{2} i_j\right) dt$$

— коефіцієнти Фур'є функції $f(x^m)$, де $i^m = (i_1, \ldots, i_j, \ldots, i_m) \in B(k^m)$,

$$U_{n^m}^{+}(\Lambda; f; x^m) = \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{P_m} f(x^m + t^m)\, \Lambda_{n^m}^{+}(\lambda, t^m)\, dt,$$

$$U_{n^{N-m}}(\Lambda; f; x^{N-m}) = \frac{1}{\pi^{N-m}} \int\limits_{P_{N-m}} f(x^{N-m} + t^{N-m})\, \Lambda_{n^{N-m}}(\lambda, t^{N-m})\, dt,$$

$$U_{n^m; n^{N-m}}^{+}(\Lambda; f; x) = \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{P_N} f(x+t)\, \Lambda_{n^m}^{+}(\lambda, t^m)\, \Lambda_{n^{N-m}}(\lambda, t^{N-m})\, dt,$$

$$U_{n_1; \ldots; n_m; n^{N-m}}^{+}(\Lambda; f; x) = \frac{1}{\pi^N} \int\limits_{P_N} f(x+t) \prod_{i=1}^{m} \Lambda_{n_i}^{+}(\lambda, \mu, t_i)\, \Lambda_{n^{N-m}}(\lambda, t^{N-m})\, dt,$$

$$U_{n_i}^{+}(\lambda; \mu; f; x_i) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} f(x_i + t_i)\, \Lambda_{n_i}^{+}(\lambda, \mu, t_i)\, dt_i$$

— лінійні оператори відповідно з ядрами

$$\Lambda_{n^m}^{+}(\lambda; t^m) = \sum_{k^m \in E^m} \frac{1}{2^{s(k^m)}} \left(\sum_{l^m \in B(k^m)} \lambda_{k^m}^{l^m} \prod_{i=1}^{m} (-1)^{l_i} \cos\left(k_i t_i - \frac{\pi}{2} l_i\right) \right) \geq 0,$$

$$\Lambda_{n^{N-m}}(\lambda; t^{N-m}) =$$

$$= \sum_{k^{N-m} \in E^{N-m}} \frac{1}{2^{s(k^{N-m})}} \left(\sum_{l^{N-m} \in B(k^{N-m})} \lambda_{k^{N-m}}^{l^{N-m}} \prod_{i=m+1}^{N} (-1)^{l_i} \cos\left(k_i t_i - \frac{\pi}{2} l_i\right) \right),$$

$$\Lambda_{n_i}^{+}(\lambda; \mu; t_i) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n_i - 1} \left(\lambda_k^{(n_i)} \cos k t_i - \mu_k^{(n_i)} \sin k t_i \right) \geq 0.$$

Оператор $U_{n^m}^{+}(\Lambda; f; x^m)$ можна записати у вигляді

$$U_{n^m}^{+}(\Lambda; f; x^m) =$$

$$= \sum_{k^m \in E^m} \frac{1}{2^{s(k^m)}} \left(\sum_{l^m \in B(k^m)} \lambda_{k^m}^{l^m} \left(\sum_{i^m \in B(k^m)} a_{k^m}^{i^m} \prod_{j=1}^{m} \cos\left(k_j t_j - \frac{\pi}{2}(i_j + l_j)\right) \right) \right).$$

Якщо $f(x) = f(x_i)$ — функція однієї змінної x_i, то

$$U^{+}_{n^m}(\Lambda; f; x_i) = \frac{1}{2^m} a_0 +$$

$$+ \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k_i=1}^{n_i-1} \Big(\lambda_{k_i} \big(a_{k_i} \cos k_i x_i + b_{k_i} \sin k_i x_i \big) + \mu_{k_i} \big(a_{k_i} \sin k_i x_i - b_{k_i} \cos k_i x_i \big) \Big),$$

де

$$\begin{aligned} a_{k_i} &= a^{0,\ldots,0,0,0,\ldots,0}_{0,\ldots,0,k_i,0,\ldots,0}, & b_{k_i} &= a^{0,\ldots,0,1,0,\ldots,0}_{0,\ldots,0,k_i,0,\ldots,0}, \\ \lambda_{k_i} &= \lambda^{0,\ldots,0,0,0,\ldots,0}_{0,\ldots,0,k_i,0,\ldots,0}, & \mu_{k_i} &= \lambda^{0,\ldots,0,1,0,\ldots,0}_{0,\ldots,0,k_i,0,\ldots,0}. \end{aligned} \tag{1}$$

Введемо позначення

$$U^{+}_{n_i}(\Lambda; f; x_i) = 2^{m-1} U^{+}_{n^m}(\Lambda; f; x_i) = \frac{1}{\pi^m} \int_{P_m} f(x_i + t_i) \Lambda^{+}_{n^m}(\lambda; t^m)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x_i + t_i) \Lambda^{+}_{n_i}\big(\bar{\lambda}; t_i\big) dt_i,$$

де

$$\Lambda^{+}_{n_i}\big(\bar{\lambda}; t_i\big) = \frac{1}{2} + \sum_{k_i=1}^{n_i-1} \big(\lambda_{k_i} \cos k_i t_i - \mu_{k_i} \sin k_i t_i \big) \geq 0,$$

а λ_{k_i} і μ_{k_i} визначаються формулами (1).

Нехай A — будь-який лінійний оператор, який відображає множину $M \subset X^N$ ($X^N = C^N$, L^N_∞, L^N_p) в X^N, множина M є інваріантною відносно зсуву, тобто з включення $f(x) \in M$ випливає, що $f(x+t) \in M$ і $G(M, A)_{X^N} = \sup_{f \in M} \| f - A(f) \|_{X^N}$ — наближення множини M оператором A у просторі X^N.

Позначимо через M_{X^m}, $M_{X^{N-m}}$ і M^{x_i} підмножини функцій множини M, які отримуються з M, якщо зафіксувати змінні відповідно $(x_{m+1}, \ldots, x_N)$, $(x_1, \ldots, x_m)$ і $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N)$.

У роботі доведено, що якщо множина M є інваріантною відносно зсуву, то

$$G\Big(M, U^{+}_{n^m; n^{N-m}}\Big)_{X^N} \leq G\Big(M_{X^m}, U^{+}_{n^m}\Big)_{X^m} + G\Big(M_{X^{N-m}}, U_{n^{N-m}}\Big)_{X^{N-m}}, \tag{2}$$

і розглянуто випадки, при яких в нерівності (2) має місце знак рівності.

Якщо зафіксувати змінні $\big(x^0_1, \ldots, x^0_m\big) = x^m_0$ або $\big(x^0_{m+1}, \ldots, x^0_N\big) = x^{N-m}_0$, то з означення норм випливає

$$\| f \|_{C^N} = \sup_{x^m_0} \Big\| f\big(x^m_0, x^{N-m}\big) \Big\|_{C^{N-m}} = \sup_{x^{N-m}_0} \Big\| f\big(x^m, x^{N-m}_0\big) \Big\|_{C^m}, \tag{3}$$

$$\| f \|_{L^N_\infty} = \sup_{x^m_0} \operatorname{vrai} \Big\| f\big(x^m_0, x^{N-m}\big) \Big\|_{L^{N-m}_\infty} = \sup_{x^{N-m}_0} \operatorname{vrai} \Big\| f\big(x^m, x^{N-m}_0\big) \Big\|_{L^m_\infty}, \tag{4}$$

$$\| f \|_{L^N_p} \leq \sup_{x^m_0} \Big\| f\big(x^m_0, x^{N-m}\big) \Big\|_{L^{N-m}_p}, \tag{5}$$

$$\| f \|_{L^N_p} \leq \sup_{x^{N-m}_0} \Big\| f\big(x^m, x^{N-m}_0\big) \Big\|_{L^m_p}. \tag{6}$$

Лема 1. *Якщо множина* $M \subset X^N$ *є інваріантною відносно зсуву, то виконується нерівність* (2).

Доведення. Введемо допоміжні лінійні оператори

$$U^+_{n^m;\infty}(\Lambda; f; x) = \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{P_m} f(x^m + t^m, x^{N-m}) \Lambda^+_{n^m}(\lambda, t^m) dt,$$

$$U_{n^{N-m};\infty}(\Lambda; f; x) = \frac{1}{\pi^{N-m}} \int\limits_{P_{N-m}} f(x^m, x^{N-m} + t^{N-m}) \Lambda_{n^{N-m}}(\lambda, t^{N-m}) dt.$$

Використовуючи теорему Фубіні, невід'ємність ядра $\Lambda^+_{n^m}(\lambda; t^m)$ і визначення операторів $U^+_{n^m;\infty}(\Lambda; f; x)$, $U_{n^{N-m};\infty}(\Lambda; f; x)$, отримуємо

$$\left\| f(x) - U^+_{n^m;\, n^{N-m}}(\Lambda; f; x) \right\|_{X^N} \le$$

$$\le \left\| \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{P_m} \big(f(x) - f(x^m + t^m; x^{N-m}) \big) \Lambda^+_{n^m}(\lambda, t^m) dt^m \right\|_{X^N} + \left\| \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{P_m} \Lambda^+_{n^m}(\lambda, t^m) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{\pi^{N-m}} \int\limits_{P_{N-m}} \big(f(x^m + t^m, x^{N-m}) - f(x+t) \big) \Lambda_{n^{N-m}}(\lambda, t^{N-m}) dt^{N-m} \right) dt^m \right\|_{X^N} =$$

$$= \left\| f(x) - U^+_{n^m;\,\infty}(\Lambda; f; x) \right\|_{X^N} +$$

$$+ \left\| \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{P_m} \Lambda^+_{n^m}(\lambda, t^m) \Big(f(x^m + t^m, x^{N-m}) - U_{n^{N-m};\,\infty}\big(\Lambda; f; (x^m + t^m, x^{N-m})\big) \Big) dt^m \right\|_{X^N}. \tag{7}$$

Із нерівності (7), використовуючи узагальнену нерівність Мінковського, (див., наприклад, [2, с. 22]), знаходимо

$$G\Big(M, U^+_{n^m;\, n^{N-m}}\Big) \le \sup_{f \in M} \left(\left\| f(x) - U^+_{n^m;\,\infty}(\Lambda; f; x) \right\|_{X^N} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{P_m} \Lambda^+_{n^m}(\lambda, t^m) \left\| f(x^m + t^m; x^{N-m}) - U_{n^{N-m};\,\infty}\Big(\Lambda; f; \big(x^m + t^m, x^{N-m}\big)\Big) \right\|_{X^N} dt^m \right). \tag{8}$$

Із нерівності (8) і співвідношень (3) – (6) випливає

$$G\Big(M, U^+_{n^m;\, n^{N-m}}\Big) \le \sup_{f \in M} \sup_{x_0^{N-m}} \left\| f\big(x^m, x_0^{N-m}\big) - U^+_{n^m;\,\infty}\Big(\Lambda; f; \big(x^m, x_0^{N-m}\big)\Big) \right\|_{X^m} +$$

$$+ \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{P_m} \Lambda^+_{n^m}(\lambda, t^m) \times$$

$$\times \sup_{f \in M} \sup_{x_0^m + t_0^m} \left\| f\big(x_0^m + t_0^m, x^{N-m}\big) - U_{n^{N-m};\,\infty}\Big(\Lambda; f; \big(x_0^m + t_0^m, x^{N-m}\big)\Big) \right\|_{X^{N-m}} dt^m.$$

Оскільки $f(x)$ при фіксованих x_0^{N-m} і $x_0^m + t_0^m$ належить відповідно множинам M_{X^m} і $M_{X^{N-m}}$, то, використовуючи означення операторів $U^+_{n^m;\,\infty}(\Lambda; f; x)$ і $U_{n^{N-m};\,\infty}(\Lambda; f; x)$, $U^+_{n^m}(\Lambda; f; x^m)$, $U_{n^{N-m}}(\Lambda; f; x^{N-m})$, отримуємо

$$G\Big(M, U^{+}_{n^m;\,n^{N-m}}\Big)_{X^N} \le \sup_{f \in M_{X^m}} \left\| f(x) - U^{+}_{n^m}(\Lambda; f; x^m) \right\|_{X^m} +$$

$$+ \frac{1}{\pi^m} \int\limits_{P_m} \Lambda^{+}_{n^m}(\lambda, t^m) \sup_{f \in M_X^{N-m}} \left\| f(x) - U_{n^{N-m}}(\Lambda; f; x^{N-m}) \right\|_{X^{N-m}} dt^m =$$

$$= G\Big(M_{X^m}, U^{+}_{n^m}\Big)_{X^m} + G\Big(M_{X^{N-m}}, U_{n^{N-m}}\Big)_{X^{N-m}}.$$

Лему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *Якщо множина* $M \subset X^N$ *є інваріантною відносно зсуву, то*

$$G\Big(M, U^{+}_{n_1,\ldots,n_m;\,n^{N-m}}\Big)_{X^N} \le \sum_{i=1}^{m} G\Big(M^{x_i}, U^{+}_{n_i}(\lambda, \mu)\Big)_X + G\Big(M_{X^{N-m}}, U_{n^{N-m}}\Big)_{X^{N-m}}.$$

Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай множина* $M \in X^N$ $(X^N = C^N,\ L^N_\infty)$ *є інваріантною відносно зсуву і центрально-симетричною, тобто з включення* $f(x) \in M$ *випливає, що* $-f(x) \in M$. *Якщо з включення* $f(x^m) \in M_{X^m} \subset M$ *і* $g(x^{N-m}) \in M_{X^{N-m}} \subset M$ *випливає, що* $\big(f(x^m) + g(x^{N-m})\big) \in M$, *то*

$$G\Big(M, U^{+}_{n^m;\,n^{N-m}}\Big)_{X^N} = G\Big(M_{X^m}, U^{+}_{n^m}\Big)_{X^n} + G\Big(M_{X^{N-m}}, U_{n^{N-m}}\Big)_{X^{N-m}}. \qquad (9)$$

Доведення. Припустимо, що $G\Big(M_{X^m}, U^{+}_{n^m}\Big)_{X^m} = \infty$ або $G\Big(M_{X^{N-m}}, U_{n^{N-m}}\Big)_{X^{N-m}} = \infty$. Оскільки $M_{X^m} \subset M$ і $M_{X^{N-m}} \subset M$, то

$$G\Big(M, U^{+}_{n^m;\,n^{N-m}}\Big)_{X^N} \ge G\Big(M_{X^m}, U^{+}_{n^m;\,n^{N-m}}\Big)_{X^N} = G\Big(M_{X^m}, U^{+}_{n^m}\Big)_{X^m} = \infty$$

або

$$G\Big(M, U^{+}_{n^m;\,n^{N-m}}\Big)_{X^N} \ge G\Big(M_{X^{N-m}}, U_{n^{N-m}}\Big)_{X^{N-m}}.$$

З леми 1 випливає (9).

Нехай $G\Big(M_{X^m}, U^{+}_{n^m}\Big)_{X^m} < \infty$ і $G\Big(M_{X^{N-m}}, U_{n^{N-m}}\Big)_{X^{N-m}} < \infty$. Тоді за означенням точної верхньої межі існують функції $\varphi_k(x^m) \in M_{X^m}$ і $\phi(x^{N-m}) \in M_{X^{N-m}}$ такі, що мають місце співвідношення

$$G\Big(M_{X^m}, U^{+}_{n^m}\Big)_{X^m} = \left\| \varphi_k(x^m) - U^{+}_{n^m}(\Lambda; \varphi_k; x^m) \right\|_{X^m}$$

і

$$G\Big(M_{X^{N-m}}, U_{n^{N-m}}\Big)_{X^{N-m}} = \left\| \phi_k(x^{N-m}) - U_{n^{N-m}}(\Lambda; \phi_k; x^{N-m}) \right\|_{X^{N-m}},$$

або існують послідовності функцій $\big\{\varphi_k(x^m)\big\} \in M_{X^m}$ і $\big\{\phi_k(x^{N-m})\big\} \in M_{X^{N-m}}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, для яких

$$G\Big(M_{X^m}, U^{+}_{n^m}\Big)_{X^m} = \lim_{k \to \infty} \left\| \varphi_k(x^m) - U^{+}_{n^m}(\Lambda; \varphi_k; x^m) \right\|_{X^m} \qquad (10)$$

і

$$G\Big(M_{X^{N-m}}, U_{n^{N-m}}\Big)_{X^{N-m}} = \lim_{k \to \infty} \left\| \phi_k(x^m) - U_{n^{N-m}}(\Lambda; \phi_k; x^{N-m}) \right\|_{X^{N-m}}. \qquad (11)$$

Покладаючи $f_k(x) = \big(\varphi_k(x^m) + \phi_k(x^{N-m})\big) \in M$ та враховуючи центральну симетрію множини M і те, що $X^N = C^N$ або $X^N = L^N_\infty$, отримуємо

$$G\Big(M, U^{+}_{n^m;n^{N-m}}\Big)_{X^N} \geq \lim_{k\to\infty}\Big\| f_k(x) - U^{+}_{n^m;n^{N-m}}(\Lambda; f; x)\Big\|_{X^N} =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\Big\|\varphi_k(x^m) - U^{+}_{n^m}(\Lambda; \varphi_k; x^m)\Big\|_{X^m} +$$
$$+ \lim_{k\to\infty}\Big\|\phi_k(x^{N-m}) - U_{n^{N-m}}(\Lambda; \phi_k; x^{N-m})\Big\|_{X^{N-m}},$$

а це разом із співвідношеннями (10), (11), (2) і доводить (9).

Відмітимо, що існує множина $M \subset C^N$, інваріантна відносно зсуву і центрально-симетрична, для якої із включень $f(x^m) \in M_{X^m}$ і $g(x^{N-m}) \in M_{X^{N-m}}$ не випливає, що $\big(f(x^m) + g(x^{N-m})\big) \in M$.

Нехай, наприклад, $M = H_{\omega(t,z)} \subset C^2$ — множина неперервних 2π-періодичних по кожній із змінних функцій $f(x, y)$, для яких $\omega(f; t; z) \leq \omega(t, z)$, де

$$\omega(f; t; z) \leq \sup_{|h|\leq t, |\partial|\leq z} \| f(x+h, y+\partial) - f(x, y)\|_{C^2},$$

а $\omega(t, z)$ — функція типу модуля неперервності. Відомо (див., наприклад, [3, с. 124]), що

$$\max\{\omega(t, 0); \omega(0, z)\} \leq \omega(t, z) \leq \omega(t, 0) + \omega(0, z).$$

Якщо $\omega(t, z) \neq \omega(t, 0) + \omega(0, z)$, то $f(t) \in \omega(t, 0) \in H_{\omega(t,0)} = M^x$ і $g(z) = \omega(0, z) \in H_{\omega(0,z)} = M^y$, але $(f(t) + g(z)) \notin M$.

Наслідок 2. *Якщо M — центрально-симетрична множина, інваріантна відносно зсуву, для якої із включень $f(x_i) \in M^{x_i} \subset M$, $i = \overline{1, m}$, і $g(x^{N-m}) \in M_{X^{N-m}} \subset M$ випливає, що $\Big(\sum_{i=1}^m f(x_i) + g(x^{N-m})\Big) \in M$, то*

$$G\Big(M, U^{+}_{n_1,\ldots,n_m;n^{N-m}}\Big)_{X^N} = \sum_{i=1}^{m} G\Big(M^{x_i}, U_{n_i}(\lambda, \mu)\Big)_{x_i} + G\Big(M_{X^{N-m}}, U_{n^{N-m}}\Big)_{X^{N-m}},$$

де $X^N = C^N$ або $X^N = L^N_\infty$.

З наслідку 1, міркуючи, як і при доведенні теореми 1, одержуємо наслідок 2.

Позначимо через $H^N_{\omega^{(1)}}$ клас функцій $f(x) \in C^N$, які задовольняють умову

$$| f(x) - f(x')| \leq \sum_{i=1}^{N} \omega_i^{(1)}(|x_i - x_i'|),$$

а через $H^N_{\omega^{(2)}}$ клас функцій $f(x) \in C^N$, для яких

$$| f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq \sum_{i=1}^{N} \omega_i^{(2)}(|h_i|).$$

Тут $\omega_i^{(1)}(t_i)$ і $\omega_i^{(2)}(t_i)$ — довільні фіксовані функції типу модулів неперервності першого і другого порядків відповідно. Оскільки класи $H^N_{\omega^{(i)}}$, $i = 1, 2$, задовольняють умови наслідку 2, то, використавши його, можна отримати, наприклад, теорему 1 з [1].

Теорема 2. *Якщо множина N задовольняє умови наслідку 2 і, крім того, із включення $f(x) \in M$ випливає, що $(f(x) + C) \in M$, де C — довільна стала, то*

$$G\Big(M, U^{+}_{n^m;n^{N-m}}\Big)_{X^N} = \sum_{i=1}^{m} G\Big(M^{x_i}, U^{+}_{n_i}(\Lambda)\Big)_{X^1} + G\Big(M_{X^{N-m}}, U_{n^{N-m}}\Big)_{X^{N-m}}. \quad (12)$$

Доведення. Оскільки множина $M_{X^m} \in X^N$ є інваріантною відносно зсуву, $X^N = C^N$ *або $X^N = L_\infty^N$ і для кожної функції $f(x^m) \in M_{X^m}$ випливає, що $(f(x^m) + C) \in M_{X^m}$, то

$$G\left(M_{X^m}, U^+_{n^m}\right)_{X^m} = \sup_{f \in M^0_{X^m}} \left| \frac{1}{\pi^m} \int_{P_m} f(t^m)\, \Lambda^+_{n^m}\left(\lambda, t^m\right) dt \right|, \qquad (13)$$

де $M^0_{X^m}$ — підмножина функцій множини M_{X^m} таких, що $f(0) = f(0, \ldots, 0) = 0$. Внаслідок того, що множини M^{x_i} задовольняють ті ж умови, що і множина M_{X^m}, враховуючи означення операторів $U^+_{n_i}(\Lambda; f; x_i)$, маємо

$$G\left(M^{x_i}, U^+_{n_i}(\Lambda)\right)_{X^1} = \sup_{f \in M_0^{x_i}} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t_i)\, \Lambda^+_{n_i}\left(\overline{\lambda}, t_i\right) dt_i \right|, \qquad (14)$$

де $M_0^{x_i}$ — підмножина функцій множини M^{x_i} таких, що $f(0) = 0$.

Використовуючи теорему Фубіні, маємо

$$\left| \frac{1}{\pi^m} \int_{P_m} f(t^m)\, \Lambda^+_{n^m}\left(\lambda, t^m\right) dt \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi^{m-1}} \left(\int_{P_{m-1}} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(t_1, t_2, \ldots, t_m) - f(0, t_2, \ldots, t_m) \right) \Lambda^+_{n^m}(\lambda, t^m)\, dt_1 \right) dt_2 \ldots dt_m \; + \right.$$

$$+ \int_{P_{m-1}} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(0, t_2, t_3, \ldots, t_m) - f(0, 0, t_3, \ldots, t_m) \right) \Lambda^+_{n^m}(\lambda, t^m)\, dt_2 \right) dt_1\, dt_3 \ldots dt_m \; + \ldots$$

$$\left. \ldots + \int_{P_{m-1}} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(0, 0, 0, \ldots, 0, t_m)\, \Lambda^+_{n^m}(\lambda, t^m)\, dt_m \right) dt_1 \ldots dt_{m-1} \right). \qquad (15)$$

Якщо $f(t_1, \ldots, t_m) \in M^0_{X^m}$, то при фіксованих $(t_2, \ldots, t_m)$, $(t_3, \ldots, t_m)$,$\ldots$, t_m відповідно $(f(t_1, t_2, \ldots, t_m) - f(0, t_2, \ldots, t_m)) \in M_0^{t_1}$, $(f(0, t_2, t_3, \ldots, t_m) - f(0, 0, t_3, \ldots, t_m)) \in M_0^{t_2}$, $\ldots$, $f(0, 0, 0, \ldots, t_m) \in M_0^{t_m}$. Тоді, використовуючи (15), невід'ємність ядра $\Lambda^+_{n^m}(\lambda, t^m)$ і означення операторів $U^+_{n_i}(\Lambda; f; x_i)$, отримуємо

$$\sup_{f \in M^0_{X^m}} \left| \frac{1}{\pi^m} \int_{P_m} f(t^m)\, \Lambda^+_{n^m}\left(\lambda, t^m\right) dt \right| \le \sum_{i=1}^m \sup_{f \in M_0^{t_i}} \left| \frac{1}{\pi^m} \int_{P_m} f(t_i)\, \Lambda_{n^m}\left(\lambda, t^m\right) dt \right| =$$

$$. \qquad = \sum_{i=1}^m \sup_{f \in M_0^{t_i}} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t_i)\, \Lambda^+_{n_i}\left(\overline{\lambda}, t_i\right) dt_i \right|. \qquad (16)$$

З (13), (16), (14) і теореми 1 випливає, що

$$G\left(M, U^+_{n^m; n^{N-m}}\right)_{X^N} \le \sum_{i=1}^m G\left(M^{x_i}, U^+_{n_i}(\Lambda)\right)_{X^1} + G\left(M_{X^{N-m}}, U_{n^{N-m}}\right)_{X^{N-m}}.$$

Доведення справедливості рівності (12) аналогічне доведенню рівності (9).

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Для класів функцій, що задовольняють умови теореми 2, наближення лінійним додатним оператором із довільним ядром залежить від одновимірних доданків цього ядра. Тому, згідно з наслідком 2, для таких класів функцій наближення додатним оператором із довільним ядром збігається з наближенням додатним оператором з ядром, що є добутком одновимірних ядер.

Використовуючи доведені твердження, можна, наприклад, знаходити оцінки зверху або асимптотичні рівності для величин $G\left(M, U^{+}_{n^m;\, n^{N-m}}\right)_{X^N}$, якщо відомі оцінки зверху або асимптотичні рівності відповідно для величин $G\left(M_{X^m}, U^{+}_{n^m}\right)_{X^m}$, $G\left(M_{X^{N-m}}, U_{n^{N-m}}\right)_{X^{N-m}}$, $G\left(M^{x_i}, U^{+}_{n_i}(\Lambda)\right)_X$, $i = \overline{1, m}$.

Позначимо через

$$F_l(f,\ x_1) \ = \ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x_1+t_1)\,\Lambda_l^{+}(t_1)\,dt_1$$

оператор Фейєра з ядром

$$\Lambda_l^{+}(t_1) \ = \ \frac{\sin^2(lt_1/2)}{2l\sin(t_1/2)},$$

через

$$S_{n,m}(f,\ x_2, x_3) \ = \ \frac{1}{\pi^2}\iint_{P_2} f(x_2+t_2, x_3+t_3)\,D_n(t_2)\,D_m(t_3)\,dt_2\,dt_3$$

оператор Фур'є, де

$$D_k(t) \ = \ \frac{\sin(k+1/2)t}{2\sin(t/2)}$$

— ядро Діріхле, через

$$F_l S_{n,m}(f,\ x^3) \ = \ \frac{1}{\pi^3}\int_{P_3} f(x^3+t^3)\,\Lambda^{+}_{l,n,m}(t^3)\,dt^3$$

оператор з ядром $\Lambda^{+}_{l,n,m}(t^3) = \Lambda_l^{+}(t_1)D_n(t_2)D_m(t_3)$, яке є добутком ядра Фейєра і ядер Діріхле. Тоді з наслідку 2 випливає $G\left(H^3_{\omega^{(1)}}, F_l\, S_{n,m}\right)_{C^3} = G\left(H^1_{\omega^{(1)}}, F_l\right)_{C^1} + G\left(H^2_{\omega^{(1)}}, S_{n,m}\right)_{C^2}$.

Зауважимо, що з асимптотичними рівностями для величин $G\left(H^2_{\omega^{(1)}}, S_{n,m}\right)_{C^2}$ і $G\left(H^1_{\omega^{(1)}}, F_l\right)_{C^1}$, а також відповідною бібліографією можна детальніше ознайомитись в монографії О. І. Степанця [4].

1. *Задерей П. В.* О приближении периодических функций многих переменных положительными полиномиальными операторами // Исследования по теории приближения функций и их приложений. – Киев, 1978. – С. 85 – 88.
2. *Бесов О. В., Ильин В. Т., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
4. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 339 с.

Одержано 14.06.2005