УДК 517.5

**А. И. Степанец** (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

A review of results related to approximation characteristics of spaces $S^p_\varphi$ and their generalizations is presented. The approach suggested in the paper allows one to obtain solutions of problems of the classical approximation theory in abstract linear spaces in the explicit form. The obtained results imply corrolaries whose statements are new even in the case of approximations in the functional Hilbert spaces $L_2$.

Наведено огляд результатів, пов'язаних з апроксимаційними характеристиками просторів $S^p_\varphi$ та їхніх узагальнень. Підхід, що пропонується, дає можливість отримувати розв'язки задач класичної теорії наближень в абстрактних лінійних просторах у явному вигляді. Як наслідки, з отриманих результатів випливають твердження, що є новими навіть у випадку наближень у функціональних гільбертових просторах $L_2$.

В настоящей работе приведен обзор результатов, связанных с аппроксимационными характеристиками пространств $S^p_\varphi$ и их обобщений. Этот материал является результатом поиска новых подходов к задачам теории приближения функций многих переменных и, в частности, периодических функций. В этой теории существует много проблем и определяющими, наверное, являются следующие: выбор приближающих агрегатов, выбор классов функций и аппроксимационных характеристик. В то время, как в одномерном случае вид простейшего агрегата диктуется естественным порядком натурального ряда, в многомерном случае, т. е. когда имеется множество $\mathfrak{X}$ — банахово пространство функций $f(t) = f(t_n, \ldots, t_m)$, $t \in R^m, m$ переменных, выбор простейших агрегатов становится проблематичным. Первые трудности здесь начинаются уже с того, что именно следует считать аналогом частной суммы для кратного ряда

$$\sum_{k \in Z^m} c_k, \quad k = (k_1, \ldots, k_m), \tag{0.1}$$

где $Z^m$ — целочисленная решетка в $R^m$.

Естественно напрашивается введение „прямоугольных” сумм; соответствующие им приближающие агрегаты в периодическом случае — тригонометрические полиномы вида

$$\sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \ldots \sum_{k_m=-n_m}^{n_m} c_{k_1,\ldots,k_m} e^{i(k_1 t_1 + \ldots + k_m t_m)}. \tag{0.2}$$

Однако частные суммы кратного ряда можно определять многими способами, например следующим.

Пусть $\{G_\alpha\}$ — семейство ограниченных областей в $R^m$, которые зависят от числового параметра $\alpha$ и такие, что любой вектор $n \in Z^m$ принадлежит всем областям $G_\alpha$ при достаточно больших значениях $\alpha$. Тогда выражение

$$\sum_{k \in G_\alpha} c_k$$

называют частной суммой ряда (0.1), соответствующей области $G_\alpha$. По аналогии с этим вводятся и соответствующие частные суммы тригонометрических рядов:

$$\sum_{k\in\ G_\alpha} c_k e^{ikx} = \sum_{k\in\ G_\alpha} c_{k_1,\ldots,k_m} e^{i(k_1x_1+\ldots+k_mx_m)}. \tag{0.3}$$

Достаточно быстро обнаружилось, что в случае приближения функций из классов Соболева $W^r_p(R^m)$ вместо прямоугольных сумм вида (0.2) „выгоднее" использовать суммы (0.3), построенные по областям, образованным определенными гиперболами. Такие области впервые были введены К. И. Бабенко в [1, 2] и получили название гиперболических крестов.

Появление гиперболических крестов дало существенный толчок в развитии теории приближения функций многих переменных. В этом направлении получено множество важных и интересных результатов, ознакомиться с которыми можно, например, в работах [3 – 13].

Однако попытки использования гиперболических крестов при приближении функций из классов, отличных от соболевских, желаемых результатов не дают. В связи с этим, естественно, возникают предположения, что для каждого конкретного класса $\mathfrak{N}$ (или же для какого-либо семейства таких классов) нужно подбирать„свое" семейство областей $G_\alpha$, определяющееся параметрами данного класса.

Следует также признать, что качество многих результатов, полученных с использованием гиперболических крестов, для соболевских классов нельзя считать безукоризненным. Как правило, результаты по приближениям в пространствах $L_p(R^m)$ имеют только порядковый характер, а точные результаты получаются лишь в гильбертовых пространствах при $p = 2$. Является ли такое положение следствием недостаточности анализа или же здесь дисгармония исходных данных с поставленными целями — покажет время. По крайней мере, можно предположить, что наряду с удачным выбором приближающих агрегатов другой причиной, усложняющей получение точных результатов по приближениям в многомерном (да и в одномерном) случае является исторически сложившаяся практика рассматривать задачи именно в пространствах $L_p(R^m)$. В периодическом случае норма в этих пространствах

$$\| f \|_{L_p(R^m)} = \left( \int\limits_{Q_m} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad Q_m = \{t \in R^m,\ 0 \le t_i \le 2\pi,\ i = \overline{1, m}\},$$

характеризует всего лишь величину среднего значения $p$-й степени модуля рассматриваемой функции и, наверное, этой информации недостаточно для получения желаемых результатов в общем случае.

При $p = 2$ хорошо известно равенство

$$\| f \|_{L_2(R^m)} = \left( \sum_{|k|\ge 0} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $c_k = c_{k_1\ldots k_m}$ — коэффициенты Фурье функции $f$. Т. е. в этом случае норма функции $f$ полностью характеризует все множество $\{c_k\}_{k\in Z^m}$ (при других значениях $p$, разумеется, подобные равенства возможны лишь в тривиальных ситуациях). Поэтому представляется целесообразной попытка введения норм функций посредством величин, связанных с их коэффициентами Фурье. Такой подход рассматривается в цикле работ автора и его последователей [14 – 32]. Этот подход, в частности, позволяет распространение идей и методов теории приближений на абстрактные линейные пространства, что, в свою очередь, дает возможность рассматривать функции с общих позиций анализа и приводит к достаточно содержательным результатам, часть из которых излагается в настоящей работе.

**1. Пространства $S^p_\Phi$.** Определим пространства, в которых будем затем ставить и решать задачи теории приближений.

Пусть $\mathfrak{X}$ и $Y$ — некоторые линейные пространства векторов $x$ и $y$ соответственно. Предположим, что на $\mathfrak{X}$ задан линейный оператор $\Phi$, действующий в $Y$, а на некотором подмножестве $Y' \subset Y$ определен функционал $f$. Пусть, далее, $E(\Phi)$ — множество значений оператора $\Phi$ и $\mathfrak{X}'$ — прообраз множества $Y'E(\Phi)$ при отображении $\Phi$. В таком случае на $\mathfrak{X}'$ можно определить функционал $f'$, положив

$$f'(x) = f(\Phi(x)), \quad x \in \mathfrak{X}'. \tag{1.1}$$

Если в качестве $f$ выбрать функционал, задающий на $Y'$ норму (или квазинорму), то равенство (1.1) будет определять аналогичную величину на $\mathfrak{X}'$. Именно эти соображения и лежат в основе дальнейших построений.

Пусть $(R^m, d\mu)$, $m \geq 1$, — $m$-мерное евклидово пространство точек $t = (t_1, \ldots, t_m)$, оснащенное некоторой $\sigma$-конечной мерой $d\mu$, $A$ — $\mu$-измеримое подмножество из $(R^m, d\mu)$, $\mu$-мера которого равна $a$, где $a$ — конечное, или же $a = \infty$ :

$$\mathrm{mes}_\mu\, A = |A|_\mu = a, \quad a \in (0, \infty];$$

$Y = Y(A, d\mu)$ — множество всех заданных на $A$ функций $y = y(t)$, измеримых относительно меры $d\mu$. При заданном $p \in (0, \infty]$ через $L_p\,(A, d\mu)$ обозначаются подмножества функций из $Y(A, d\mu)$, для которых конечна величина

$$\|y\|_{L_p(A,d\mu)} = \begin{cases} \left( \int\limits_A |\, y(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & p \in (0, \infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \in A} |\, y(t)|, & p = \infty. \end{cases} \tag{1.2}$$

Известно, что этот функционал при $p \geq 1$ задает норму, а при $p \in (0,1)$ — квазинорму на $L_p\,(A, d\mu)$.

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ — некоторое линейное пространство векторов $x$ и $\Phi$ — линейный оператор, действующий из $\mathfrak{X}$ в $Y$ :

$$\Phi : \mathfrak{X} \to Y(A, d\mu), \quad \Phi(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \hat{x}, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad \hat{x} = Y(A, d\mu).$$

Положим

$$S^p_\Phi \;=\; S^p_\Phi\,(\mathfrak{X}; Y) = \Big\{ x \in \mathfrak{X} : \|\hat{x}\|_{L_p(A,d\mu)} < \infty \Big\}, \quad p \in (0, \infty]. \tag{1.3}$$

Таким образом, множество $S^p_\Phi$ — прообраз в $\mathfrak{X}$ при отображении $\Phi$ множества $L_p\,(A, d\mu)$.

Элементы $x_1, x_2 \in S^p_\Phi$ считаются тождественными, если почти всюду по мере $d\mu$ $\hat{x}_1(t) = \hat{x}_2(t)$.

Для элементов $x_1, x_2 \in S^p_\Phi$, $p \in (0, \infty]$, определим $\Phi$-расстояние между ними с помощью равенства

$$\rho_{\Phi}(x_1;x_2)_p = \|\Phi(x_1-x_2)\|_{L_p(A,d\mu)}.$$

Нулевым элементом множества $S^p_\Phi$ называется элемент $\theta$, для которого почти всюду на $A$ $\hat\theta(t)=0$.

Расстояние $\rho_\Phi(\theta;x)_p$, $x\in S^p_\Phi$, называется $\Phi$-нормой элемента и обозначается через $\|\, x\|_p = \|\, x\|_{p,\,\Phi}$. Таким образом, по определению,

$$\|\, x\|_p = \|\, x\|_{p,\,\Phi} = \rho_\Phi(\theta;x)_p = \|\hat x\|_{L_p(A,d\mu)}. \qquad (1.4)$$

В таком случае $S^p_\Phi$ — линейное пространство: операции сложения элементов и умножения их на числа, заданные в $\mathfrak{X}$, остаются пригодными и для любой пары $x_1,x_2\in S^p_\Phi$. Кроме того, для любых чисел $\lambda_1$ и $\lambda_2$ элемент $x_3=\lambda_1x_1+\lambda_1x_2$ принадлежит $S^p_\Phi$. Действительно, поскольку $x_3\in\mathfrak{X}$, то $\hat x_3(t)=\lambda_1\hat x_1(t)+\lambda_2\hat x_2(t)$. Если теперь $p\ge 1$, то в силу неравенства Минковского

$$\|\, x_3\|_p = \|\,\hat x_3(t)\|_{L_p(A,d\mu)} \le |\lambda_1|\,\|\,\hat x_1\|_{L_p(A,d\mu)} + |\lambda_2|\,\|\,\hat x_2\|_{L_p(A,d\mu)} =$$

$$= |\lambda_1\|\,\|\, x_1\|_p + |\lambda_2|\,\|\, x_2\|_p.$$

Если же $p\in(0,1)$, то, используя неравенство

$$|\, a+b\,|^p \le |\, a\,|^p + |\, b\,|^p, \quad 0\le p<1,$$

получаем

$$\|\, x_3\|_p = \left(\int\limits_A \left|\lambda_1\hat x_1(t)+\lambda_2\hat x_2(t)\right|^p_{d\mu}\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le 2^{1/p}(\,|\lambda_1|\,\|\, x_1\|_p + |\lambda_2|\,\|\, x_2\|_p),$$

т. е. всегда $x_3\in S^p_\Phi$.

Ясно, что функционал $\|\cdot\|_p$ при $p\ge1$ удовлетворяет всем аксиомам нормы, а при $p\in(0,1)$ — аксиомам квазинормы. Следовательно, $S^p_\Phi$ при $p\ge1$ — линейное нормированное пространство, а при $p\in(0,1)$ — пространство с квазинормой.

Рассмотрим несколько простейших реализаций рассматриваемых построений. При этом будем говорить, что некоторое пространство $\mathfrak{N}$ является частным случаем пространства $S^p_\Phi$, если его можно получить путем надлежащего выбора пространства $\mathfrak{X}$, меры $d\mu$ и оператора $\Phi$.

***1.1. Пространство $S^p_\varphi$.*** Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое линейное комплексное пространство и $\varphi=\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — фиксированная счетная система в нем. Предположим, что для любой пары $x,y\in\mathfrak{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит $\varphi$, определено некоторое число —„скалярное произведение” $(x,y)$, удовлетворяющее условиям:

1) $(x,y)=\overline{(y,x)}$, где $\overline{z}$ — число, комплексно-сопряженное с $z$;
2) $(\lambda x_1+\mu x_2,y)=\lambda(x_1,y)+\mu(x_2,y)$, $\lambda,\mu$ — произвольные числа;
3) $(\varphi_k,\varphi_l)=\begin{cases}0, & k\ne l;\\ 1, & k=l.\end{cases}$

Каждому элементу $x\in\mathfrak{X}$ сопоставляется система чисел $\hat x(k)$ посредством равенств

$$\hat{x}(k) = \hat{x}_\varphi(k) = (x, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots \quad (k \in N), \tag{1.5}$$

и при фиксированном $p \in (0, \infty)$ полагается

$$S^p_\varphi = S^p_\varphi(\mathfrak{X}) = \left\{ x \in \mathfrak{X} : \sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{f}_\varphi(k) \right|^p < \infty \right\}. \tag{1.6}$$

Элементы $x, y \in S^p_\varphi$ считаются тождественными, если при всех $k \in N$ $\hat{x}_\varphi(k) = \hat{y}_\varphi(k)$.

Для векторов $x, y \in \mathfrak{X}$ определяется $\varphi$-расстояние между ними с помощью равенства

$$\rho_{_\varphi}(x, y)_{_p} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{x}_\varphi(k) - \hat{y}_\varphi(k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нулевым элементом пространства $S^p_\varphi$ называется вектор $\theta$, для которого $\hat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всех $k \in N$. Расстояние $\rho_{_\varphi}(\theta, x)_p$, $x \in S^p_\varphi$, называется $\varphi$-нормой элемента $x$ и обозначается через $\| x\|_{p,\varphi}$. Таким образом,

$$\| x\|_{p,\varphi} = \rho_{_\varphi}(\theta, x)_p = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{x}_\varphi(k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.7}$$

Пространства $S^p_\varphi$ являются частным случаем пространств $S^p_\Phi$. Действительно, определим в данном пространстве $\mathfrak{X}$ оператор $\Phi$, который каждому $x \in \mathfrak{X}$ ставит в соответствие последовательность $y = \{\hat{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$. В качестве множества $(R^m, d\mu)$ возьмем пространство $R^1$ с мерой $d\mu$, носителем которой является множество $Z^1$ целочисленных точек $k$, в которых $\mu(k) \equiv 1$, и положим $A = \left\{k \in Z^1,\ k \geq 1\right\}$. В таком случае $Y(A, d\mu)$ — множество всех последовательностей $y$ и функционал (1.2) имеет вид

$$\| y\|_{_{L_p(A,d\mu)}} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (0, \infty).$$

Пусть $S$ — множество всех последовательностей комплексных чисел

$$S = \{x = (x_1, x_2, \ldots),\ \ x_k \in C\},$$

в котором операции сложения и умножения определяются стандартным способом:

$$(x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots),$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots), \quad \lambda \in C.$$

В этом случае $S$ — линейное пространство. Выберем в качестве $\mathfrak{X}$ множество $S$, а в качестве $\varphi$ — систему $e = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $e_k = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$, причем

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

„Скалярное произведение” определим, положив

$$(x, e_k) = \hat{x}_e(k) = x_k, \quad (e_k, x) = \overline{x_k} \quad (x = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)).$$

Для такой операции условия 2 и 3 будут выполняться автоматически. Каждому элементу $x \in \mathfrak{X}$ сопоставляется система чисел $\hat{x}(k)$,

$$\hat{x}(k) = x_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и при фиксированном $p \in (0, \infty)$ в соответствии с $(1.6)$ определяются пространства $S^p_e$:

$$S^p_e = S^p_e(\mathfrak{X}) = \left\{ x \in \mathfrak{X} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}.$$

В этом случае, согласно (1.7), $\varphi$-норма элемента $x \in S^p_e$ имеет вид

$$\| x\|_{p,e} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Видим, что $S^p_e$ совпадают с известными пространствами $l_p$.

Возьмем, как и ранее, в качестве $\mathfrak{X}$ пространство $S$, а в качестве $\varphi$ систему $e'$, полученную из $e$ путем удаления из нее некоторых элементов $e_{i_j}$, $j = 1, 2, \ldots,$ и по рассмотренной схеме построим пространства $S^p_{e'}$.

Ясно, что $\varphi$-норма в $S^p_{e'}$, построенная согласно (1.7), удовлетворяет неравенству

$$\| x\|_{p,e'} \leq \| x\|_{p,e},$$

и поэтому $S^p_e \subset S^p_{e'}$. Ясно также, что множество $S^p_{e'} \setminus S^p_e$ может быть не пустым, т. е. множество $S^p_{e'}$ может быть шире множества $l_p$.

***1.1′. Пространства $S^{p,\mu}_{\varphi}$.*** Эти пространства вводятся по аналогии с пространствами $S^p_{\varphi}$, только в этом случае функционалы

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} | \cdot |^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

в равенствах, соответствующих (1.5) – (1.7), заменяются функционалами

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} | \cdot |^p \mu_k^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — заданная система неотрицательных чисел, $\mu_k \geq 0$, $k \in N$; в частности, если $\mu_k \equiv 1$, то $S^{p,\mu}_{\varphi} = S^p_{\varphi}$.

Понятно, что и эти пространства являются частным случаем пространств $S^p_{\Phi}$. В качестве множества $(R^m, d\mu)$ здесь, как и для пространств $S^p_{\varphi}$, используется пространство $R^1$ с мерой $d\mu$, сосредоточенной на множестве $Z^1$ целочисленных точек $k$, в которых $\mu(k) = \mu_k$ и $A = \{k \in Z^1,\, k \geq 1\}$.

Более детально об этих пространствах см. п. 4 настоящей работы.

***1.2. Пространство $S^p_{\mathfrak{F}}(L)$.*** Пусть, как и ранее, $R^m$, $m \geq 1$, — $m$-мерное, евклидово пространство, $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_m)$ — его элементы, $Z^m$ — целочисленная решетка в $R^m$, $xy = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$, $x, y \in R^m$. Пусть, далее, $L = L(R^m, 2\pi)$ — множество всех $2\pi$-периодических по каждой из переменных функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$, суммируемых относительно обычной меры Лебега на кубе периодов $Q^m$,

$$Q^m = \{x : x \in R^m, \ \ -\pi \le x_k \le \pi, \ \ k = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Возьмем в качестве $\mathfrak{X}$ пространство $L(R^m, 2\pi)$ и определим на нем оператор $\Phi$ (который будем обозначать через $\mathfrak{F}$), положив

$$\mathfrak{F}(f) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(x)\, e^{-ikx} dx = \hat{f}(k), \quad k \in Z^m.$$

Этот оператор отображает пространство $L(R^m, 2\pi)$ во множество $Y$ функций $y(t)$, заданных на целочисленной решетке $Z^m$. Пусть еще $d\mu$ — мера в пространстве $R^m$, носителем которой является множество $Z^m$, где она равна единице. В этом случае функционал (1.2) принимает вид

$$\| \, y \, \|_{L_p(R^m, d\mu)} = \left( \int\limits_{R_m} |y(t)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{k \in Z^m} \left| \hat{f}(k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (0, \infty),$$

и пространство $S^p_\Phi$ ( которое обозначим через $S^p_{\mathfrak{F}}(L)$ ) определяется соотношением

$$S^p_{\mathfrak{F}}(L) = \left\{ f \in L : \left( \sum_{k \in Z^m} \left| \hat{f}(k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \infty \right\}.$$

Заметим, что пространства $S^p_{\mathfrak{F}}(L)$ совпадают с рассмотренными выше пространствами $S^p_\varphi(L)$, порождаемыми множеством $L$ и системой $\varphi = \{\tau_s\}_{s=1}^{\infty}$,

$$\tau_s = (2\pi)^{-m/2} e^{ik_s x}, \quad k_s \in Z^m, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

которая получается из системы

$$(2\pi)^{-m/2} e^{ikx}, \quad k \in Z^m,$$

путем произвольной фиксированной нумерации ее членов.

***1.3.*** Рассмотрим пример, в котором пространства $S^p_\Phi$ могут не быть сепарабельными.

Выберем в качестве $\mathfrak{X}$ пространство функций $L_2(R^m)$, а в качестве А пространство $L^2(R^m)$ с обычной нормой Лебега и зададим оператор $\Phi$ преобразованием Фурье:

$$\Phi(f) = \hat{f}(t) = \mathfrak{F}(f; t) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{R^m} f(x)\, e^{-itx} dx, \quad f \in L_2(R^m).$$

Известно (см., например, [33], гл. I), что оператор $\mathfrak{F}$ является унитарным по $L^2(R^m)$. Следовательно, $\Phi$-норма $\| \, f\|_{2,\Phi}$ элемента $f$ совпадает с его нормой в пространстве $L^2(R^m)$:

$$\| \, f\|_{2,F} = \| \, f\|_{L_2(R^m)}, \tag{1.8}$$

и в этом случае пространство $S^2_\Phi(L_2(R^m), R^m, dx)$ в силу формулы (1.3) имеет вид $S^2_\Phi = \{f : f \in L_2(R^m)\}$, т. е. $S^2_\Phi = \mathfrak{X} = L_2(R^m)$.

***1.4.*** По схеме, изложенной в предыдущем примере, строятся пространства $S^2_\Phi$, когда вместо преобразования Фурье берется любой оператор, унитарный на множестве $L_2(A, d\mu)$, где $A$ — некоторое многообразие в $R^m$, а $d\mu$ — некоторая $\sigma$-конечная мера в $R^m$. Пусть, к примеру, $L_2(A, d\mu)$ является множеством $L_2(R^1_+)$ функций $f(t)$, суммируемых по Лебегу с квадратом на полуоси $(0, \infty)$, а $\Phi$ — преобразование Ганкеля

$$H_v f = H_v(f;x) = \hat{f}(x) = \hat{f}_v(x) =$$

$$= x^{-(v+1/2)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^\infty x^{v+1} J_{v+1}(xt) \frac{f(t)}{\sqrt{t}}\, dt, \tag{1.9}$$

где $v$ — некоторое число, $v \geq -1$, а $J_\alpha(z)$ — функция Бесселя I рода порядка $\alpha$.

Известно, что преобразование Ганкеля порождает оператор $H_v$, унитарный на $L_2(R^1_+)$ и совпадающий со своим обратным (см., например, [34], гл. III). Поэтому выполняется аналог равенства (1.15):

$$\| f\|_{2,H_v} = \| f\|_{L_2(R^1_+)}.$$

Следовательно, $S^2_{H_v} = \{f : L_2(R^1_+)\}$, т. е. и в этом случае

$$S^2_{H_v} = \mathfrak{X} = L_2(R^1_+).$$

***1.5.*** Рассмотрим еще частный случай пространств $S^p_\Phi$, которые порождаются тождественным оператором, т. е. когда $\Phi \equiv I$. Ясно, что тогда должно быть $\mathfrak{X} = Y(A, d\mu)$, $\hat{x} = x$ и согласно (1.3)

$$S^p_L = \{x \in \mathfrak{X} : \|x\|_{L_p(A,d\mu)} < \infty\} = L_p(A, d\mu), \quad p \in (0, \infty).$$

**2. Мультипликаторы. Приближающие агрегаты и объекты приближений.** В качестве приближающих агрегатов для элементов $x \in S^p_\Phi$ используются элементы из $S^p_\Phi$, у которых образы имеют носители $\gamma_\sigma$ заданной меры $\sigma$. Понятно, что именно этот принцип заложен в классическом случае при построении, например, тригонометрических полиномов для приближения данной периодической функции, если под оператором $\Phi$ понимать отображение функций во множество их коэффициентов Фурье. В общем случае здесь возникают проблемы, которые в конечном счете вызваны тем, что пространства $S^p_\Phi$ могут быть не полными. В связи с этим дадим следующие определения.

Пусть $\omega = \omega(t)$ — некоторая функция из $Y(A, d\mu)$. Тогда через $M^\omega_\Phi$ обозначим оператор, действующий из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$, который данному $x \in \mathfrak{X}$ ставит в соответствие элемент $x_\omega \in \mathfrak{X}$ такой, что если $\Phi(x) = \hat{x}(t)$, то почти всюду $\hat{x}_\omega(t) = \Phi(x_\omega) = \omega(t)\hat{x}(t)$. Оператор $M^\omega_\Phi$ будем называть мультипликатором оператора $\Phi$, порождаемым функцией $\omega$; через $\Omega_\Phi(\mathfrak{X}) = \Omega_\Phi(\mathfrak{X}, Y)$ обозначим подмножество функций $\omega$ из $Y(A, d\mu)$, для которых мультипликаторы $M^\omega_\Phi$ существуют.

Если $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ — некоторые подмножества из $\mathfrak{X}$, $\omega \in \Omega_\Phi(\mathfrak{X})$ и оператор $M^\omega_\Phi$ отображает $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}'$, то будем говорить, что $M^\omega_\Phi$ имеет тип $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}')$. В частности, если $M^\omega_\Phi$ отображает $S^p_\Phi$ в $S^p_\Phi$, то оператор $M^\omega_\Phi$ имеет тип $(S^p_\Phi, S^p_\Phi)$ или, короче, тип $(p,p)$. Множество функций $\omega$, порождающих операторы типа $(p,p)$, обозначим через $\Omega^p_\Phi$.

Итак, если $\omega \in \Omega^p_\Phi$ и оператор $M^\omega_\Phi$ действует из $S^p_\Phi$, то он действует также в $S^p_\Phi$; при этом каждому $x \in S^p_\Phi$ соответствует элемент $x_\omega = M^\omega_\Phi(x)$, для которого почти всюду на $A$ выполняется равенство

$$\hat{x}_\omega(t) = \Phi(x_\omega) = \omega(t)\hat{x}(t), \quad \hat{x}_\omega \in L_p(A, d\mu). \tag{2.1}$$

Пусть при заданном $\sigma > 0$ $\gamma_\sigma$ — $\mu$-измеримое множество в $A$,

$$\mathrm{mes}_\mu \gamma_\sigma \overset{\mathrm{df}}{=} |\gamma_\sigma| = \sigma, \quad \sigma \le a,$$

и $\lambda = \lambda(t)$ — измеримая функций с носителем $\gamma_\sigma$. Предположим, что при заданном $p \in (0, \infty)$ $\lambda \in \Omega_\Phi^p$ и $U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda) \overset{\mathrm{df}}{=} x_\lambda = M_\Phi^\lambda(x)$, так что согласно (2.1)

$$\hat{U}_{\gamma_\sigma}(x; \lambda) = \Phi(U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda)) = \begin{cases} \lambda(t)\hat{x}(t), & t \in \gamma_\sigma, \\ \\ 0, & t \bar{\in} \gamma_\sigma, \ x \in S_\Phi^p. \end{cases} \tag{2.2}$$

Именно элементы $U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda)$ и рассматриваются в качестве приближающих агрегатов для $x \in S_\Phi^p$. Если при этом $\lambda(t) \equiv 1$ на $\gamma_\sigma$, т. е. когда $\lambda(t)$ совпадает с характеристической функцией $\chi_{\gamma_\sigma}(t)$ множества $\gamma_\sigma$, то полагаем $U_{\gamma_\sigma}(x; \chi_{\gamma_\sigma}) = U_{\gamma_\sigma}(x)$.

Пусть $\Gamma_\sigma = \Gamma_{\sigma(A)}$ — множество всех измеримых подмножеств из $A$, меры которых равны $\sigma$. Будем говорить, что при данном $p > 0$ оператор $\Phi$ удовлетворяет условию $(A_p)$, если функции $\chi_{\gamma_\sigma}(t)$ для всех множеств $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ принадлежат $\Omega_\Phi^p$ при любых $\sigma \in [0, a)$. Таким образом, если $\Phi$ удовлетворяет условию $(A_p)$, то все элементы $U_{\gamma_\sigma}(x)$ определены при любом $x \in S_\Phi^p$ и находятся в $S_\Phi^p$. Элемент $U_{\gamma_\sigma}(x)$ называется сужением элемента $x$ ранга $\sigma$, элемент $U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda)$ — $\lambda$-сужением $x$ ранга $\sigma$.

Пусть $p$ — любое положительное число и $x \in S_\Phi^p$. Тогда в силу (1.4) и (2.2) имеем

$$\|x - U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda)\|_p^p = \|\hat{x}(t) - \hat{U}_{\gamma_\sigma}(x; \lambda; t)\|_{L_p(A, d\mu)}^p =$$

$$= \int\limits_{\gamma_\sigma} |1 - \lambda(t)|^p |\,\hat{x}(t)|^p \, d\mu + \int\limits_{A/\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p d\mu.$$

Отсюда приходим к следующему утверждению.

**Предложение 2.1.** *Пусть* $p \in (0, \infty)$, $x \in S_\Phi^p = S_\Phi^p(\mathfrak{X}; Y)$, $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ *и оператор* $\Phi$ *удовлетворяет условию* $(A_p)$. *Тогда*

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \overset{\mathrm{df}}{=} \inf_{\lambda \in \Omega_\Phi^p} \|\, x - U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda)\|_p \ = \ \|\, x - U_{\gamma_\sigma}(x)\|_p.$$

*При этом выполняется равенство*

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \ = \ \|\, x\|_p^p - \int\limits_{\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p d\mu. \tag{2.3}$$

Таким образом, если $\chi_{\gamma_\sigma} \in \Omega_\Phi^p$, то среди всех элементов $U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda)$, порождаемых мультипликаторами $M_\Phi^\lambda$ и удовлетворяющих условию (2.2), наименее уклоняется от элемента $x$ по $\Phi$-норме в пространстве $S_\Phi^p$ элемент $U_{\gamma_\sigma}(x)$, т. е. среди всех $\lambda$-сужений $x$ данного ранга $\sigma$ ближайшим к $x$ оказывается именно его сужение при $\lambda(t) \equiv 1$. Понятно, что это свойство является аналогом минимального свойства сумм Фурье в пространствах Гильберта $L_2$.

Пусть $\Gamma = \{\gamma_\sigma\}_{\sigma > 0}$, $|\,\gamma_\sigma| = \sigma$, — семейство измеримых подмножеств из $A$, исчерпывающее при $\sigma \to \infty$ все множество $A$, т. е. обладающее тем свойством, что любая точка $t \in A$ находится во всех множествах $\gamma_\sigma$ при всех достаточно больших значениях $\sigma$, так что

$$\lim_{\sigma\to\infty} \int\limits_{\gamma_\sigma\in\Gamma} |\,\hat{x}(t)|^p\, d\mu = \int\limits_A |\,\hat{x}(t)|^p\, d\mu \quad \forall x \in S^p_\Phi. \tag{2.4}$$

Объединяя соотношения (2.3) и (2.4), видим, что

$$\lim_{\substack{\sigma\to\infty\\ \gamma_\sigma\in\Gamma}} \mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p = 0 \quad \forall x \in S^p_\Phi.$$

Определим теперь объекты приближения — объединения элементов $x \in \mathfrak{X}$, соответствующих в теории приближений понятию класса функций. Такие объекты, как и приближающие агрегаты, вводятся с помощью мультипликаторов. Однако здесь представляется более удобным использование несколько другой терминологии, более близкой к традиционной. Пусть $\Psi = \Psi(t)$ — произвольная функция из $\Omega_\Phi(\mathfrak{X})$ и $M^\Psi_\Phi$ — мультипликатор оператора $\Phi$, порождаемый этой функцией. В таком случае образ $x_\Psi$ элемента $x$ при отображении $M^\Psi_\Phi$ будем называть $\Psi$-интегралом элемента $x$ и записывать $M^\Psi_\Phi(x) = x_\Psi = \jmath^\Psi x$; при этом $x$ иногда удобно называть $\Psi$-производной для $x_\Psi$ и записывать $x = D^\Psi x_\Psi$.

Таким образом, если $x_\Psi$ является $\Psi$-интегралом для $x$, то почти всюду

$$\hat{x}_\Psi = \Phi(\jmath^\Psi x) = \Psi(t)\hat{x}(t). \tag{2.5}$$

Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\mathfrak{X}$, то через $\Psi\,\mathfrak{N}$ обозначается множество $\Psi$-интегралов всех тех $x \in \mathfrak{N}$, для которых они существуют. В частности, если $U^p_\Phi$ — единичный шар в некотором пространстве $S^p_\Phi$,

$$U^p_\Phi = \{x : x \in S^p_\Phi, \|\,x\|_{p,\Phi} \le 1\},$$

то $\Psi U^p_\Phi$ — множество $\Psi$-интегралов всех $x \in U^p_\Phi$, для которых эти интегралы существуют.

Сопоставляя соотношения (2.5) и (2.1), видим, что в качестве функций $\Psi$, для которых определение $\Psi$-интеграла корректно, можно выбрать любую функцию из $\Omega_\Phi(S^p_\Phi)$. В этом случае справедливо включение $\Psi S^p_\Phi \subset S^p_\Phi$.

Множества $\Psi U^p_\Phi$ и являются теми объектами, для которых в работе рассматриваются традиционные задачи теории приближений.

**3. Аппроксимационные характеристики множеств $\boldsymbol{\Psi U^p_\Phi}$.** Будем рассматривать следующие величины. Для каждого $\gamma_\sigma \in \Gamma$ положим

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_q = \inf_{\lambda\in\Omega^p_\Phi} \|\,x - U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)\|_{q,\Phi} \quad x \in S^p_\Phi,$$

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_q = \sup_{x\in\Psi U^p_\Phi} \mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_q$$

и

$$D_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_q = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_q.$$

В случае приближения периодических функций тригонометрическими полиномами величине $\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_q$ будет соответствовать наилучшее приближение функции $x$ посредством полиномов степени $\sigma$; величине $\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_q$ — верхняя грань на заданном множестве функций таких наилучших приближений; величина $D_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_q$ напоминает тригонометрический поперечник порядка $\sigma$ множества $\Psi U^p_\Phi$.

Рассматриваются также следующие характеристики, которым в периодическом случае соответствуют величины, связанные с наилучшим $\sigma$-членным приближением:

$$e_\sigma(x)_q = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_q = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \inf_{\lambda \in \Omega^p_\Phi} \| x - U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)\|_{q,\Phi}\, x \in S^p_\Phi \tag{3.1}$$

и

$$e_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_q = \sup_{x \in \Psi U^p_\Phi} e_\sigma(x)_q. \tag{3.2}$$

Ближайшие рассмотрения ограничиваются случаем, когда $p = q$. Кроме того, предполагается, что соответствующие характеристические функции $\chi_{\gamma_\sigma}(\cdot)$ принадлежат $\Omega^p_\Phi$, т. е. оператор $\Phi$ удовлетворяет условию $(A_p)$. В таком случае, согласно предложению 2.1, наибольший интерес представляют величины (3.1), (3.2), когда $\lambda(t) = \chi_{\gamma_\sigma}(t)$. В связи с этим полагаем

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \;=\; \| x - U_{\gamma_\sigma}(x)\|_{p,\Phi}, \quad x \in S^p_\Phi, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_p = \sup_{x \in \Psi U^p_\Phi} \mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \tag{3.4}$$

и

$$D_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_p = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_p. \tag{3.5}$$

Аналогично,

$$e_\sigma(x)_p = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \;\| x - U_{\gamma_\sigma}(x)\|_{p,\Phi} \tag{3.6}$$

и

$$e_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_p = \sup_{x \in \Psi U^p_\Phi} e_\sigma(x)_p.$$

***3.1. Величины $\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_p$ и $D_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_p$.*** В дальнейшем используется понятие перестановки функции в убывающем порядке. Это понятие, по-видимому, впервые появилось в работах Харди и Литтлвуда (см. [35], гл. X) и затем с успехом использовалось многими авторами. Приведем здесь необходимые определения, придерживаясь текста из книги Н. П. Корнейчука [36] (гл. 6). Там рассматриваются перестановки функций одной переменной, но основные определения пригодны и в общем случае.

Пусть на $\mu$-измеримом множестве $A \subset R^m$, $m \geq 1$, $\mathrm{mes}_\mu A = a$, где $a$ — конечно или бесконечно, задана неотрицательная и $\mu$-измеримая функция $f(x)$, у которой функция распределения

$$m_f(y) = \mathrm{mes}_\mu E_y, \quad E_y = \{x : x \in A, f(x) \geq y\}, \quad y \geq 0,$$

принимает при $y > 0$ только конечные значения.

Функция $t = m_f(y)$ не возрастает при всех $y \geq 0$, при этом $m_f(0) = a$. Если $m_f(y)$ непрерывна и строго убывает, то на промежутке $t \in (0, a)$ существует строго убывающая обратная к ней функция $y = \overline{\varphi}(t)$, которую и называют перестановкой функции $f(x)$ в убывающем порядке. В общем случае, в зависимости от функции $f(\cdot)$, $m_f(y)$ может иметь промежутки постоянства, а также разрывы первого рода в конечном или же счетном множестве точек. Чтобы однозначно определить обратную к ней функцию, исправим график функции $m_f(y)$ следующим образом. В каждой точке разрыва $y_j$ функции $m_f(y)$ дополним ее график отрезком $y = y_j$, $m_f(y_j + 0) \leq t \leq m(y_j + 0)$, а на каждом промежутке $[\alpha, \beta]$, где $m_f(y)$ постоянна, оставим в ее графике только одну точку с координатами, например, $y = (\alpha + \beta)/2$, $t = m_f((\alpha + \beta)/2)$. В таком случае каждому $t \in (0, a)$ будет соответствовать единственная точка с координатами $(t, m_f^{-1}(t))$. Это отображение и определяет функцию $y = \overline{\varphi}(t)$ — перестановку функции $\varphi(x)$ в рассматриваемом случае.

При любом $y \geq 0$ мера Лебега множества точек $t \in (0, a)$, на котором $\overline{\varphi}(t) \geq y$, равна $m_f(y)$. Таким образом,

$$\text{mes}\,\{t : t \in (0, a),\ \ \overline{\varphi}(t) \geq y\} =$$

$$= \text{mes}_\mu\{x : x \in A,\ f(x) \geq y\} = m_f(y).$$

Отсюда, в частности, следует справедливость равенства

$$\int\limits_0^a F(\overline{\varphi}(t))dt = \int\limits_A F(f(x))d\mu$$

для любой функции $F$, для которой эти интегралы существуют (см. [35], гл. X).

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.1.** *Пусть $\Psi = \Psi(t)$ — произвольная функция из $Y(A, d\mu)$, существенно ограниченная на $A$:*

$$\text{ess}\sup_{t \in A} |\Psi(t)| = \|\,\Psi\|_M\ < \infty, \tag{3.7}$$

*и в случае, когда множество $A$ не ограничено,*

$$\lim_{|t| \to \infty} \Psi(t) = 0. \tag{3.8}$$

*Тогда для произвольных $\mathfrak{X}$, $A \subset R^m$, $m \geq 1$, $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$, $\sigma < a$ и $p \in (0, \infty)$, для любого оператора $\Phi$, удовлетворяющего условию $(A_p)$, справедливы оценки*

$$\mathcal{E}^p_{\gamma_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_p \leq \overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0 + 0), \tag{3.9}$$

*где $\overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(v)$ — перестановка в убывающем порядке функции*

$$\varphi_\sigma(t) = \varphi_{\gamma_\sigma}(t) = \begin{cases} |\Psi(t)|^p, & t \in A \setminus \gamma_\sigma, \\ 0, & t \in \gamma_\sigma, \end{cases}$$

*и*

$$D_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_p \leq \overline{\Psi}(\sigma + 0), \tag{3.10}$$

*где $\overline{\Psi}(v)$ — перестановка в убывающем порядке функции $|\Psi(t)|$.*

*Если, к тому же, функции $\chi_{\gamma_\sigma}(t)$ для любых $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ и $\sigma \in (0, a)$ принадлежат множеству $E(\Phi)$ значений оператора $\Phi$, а их прообразы $U_{\gamma_\sigma}$ имеют $\Psi$-интегралы, то соотношения* (3.9) *и* (3.10) *являются равенствами. При этом в $\Gamma_\sigma$ имеется множество $\gamma^*_\sigma$, для которого выполняются равенства*

$$\mathcal{E}_{\gamma^*_\sigma}(\Psi U^p_\Phi)_p = D_\sigma(\Psi U^p_\Phi)_p = \overline{\Psi}(\sigma + 0).$$

*Это множество определяется соотношением*

$$\gamma_\sigma^* = \{t \in A : |\Psi(t)| \geq \overline{\Psi}(\sigma + 0)\}, \quad \mathrm{mes}_\mu \, \gamma_\sigma^* = \sigma.$$

Доказательство этой теоремы содержится в [23]. Здесь только отметим, что условия (3.7) и (3.8) гарантируют тот факт, что для функции $|\Psi(t)|$ ее функция распределения $m_{|\Psi|}(y)$,

$$m_{|\Psi|}(y) = \mathrm{mes}_\mu E_y, \quad E_y = \{t \in A : |\Psi(t)| \geq y\}, \quad y \geq 0,$$

принимает при любом $y > 0$ только конечные значения из промежутка $[0, a]$. Поэтому величины $\overline{\varphi}_\sigma(0 + 0)$ и $\overline{\Psi}(\sigma + 0)$ всегда определены.

Заметим также, что в случае, когда $E(\Phi) = L_p(A, d\mu)$, оператор $\Phi$ удовлетворяет условию $(A_p)$ и в силу условий (3.7) и (3.8) также выполняются требования, обеспечивающие равенства в соотношениях (3.9) и (3.10).

***3.2. Величины $e_\sigma(\Psi U_\Phi^p)_p$.*** В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.2.** *Пусть $\Psi = \Psi(t)$ — произвольная функция из $Y(A, d\mu)$, существенно ограниченная на $A$ и в случае, когда множество $A$ не ограничено, удовлетворяет условию* (3.8).

*Тогда для произвольных $\mathfrak{X}$, $A \subset R^m$, $m \geq 1$, $\sigma \leq a$ и $p \in (0, \infty)$, для любого оператора $\Phi$, удовлетворяющего условию $(A_p)$, выполняется соотношение*

$$e_\sigma^p(\Psi U_\Phi^p) \leq \sup_{\sigma < q \leq a} \frac{q - \sigma}{\displaystyle\int_0^q \frac{dt}{\overline{\Psi}^p(t)}}, \tag{3.11}$$

*в котором $\overline{\Psi}(v)$ — перестановка в убывающем порядке функции $|\Psi(t)|$. Величина точной верхней грани в* (3.11) *достигается при некотором конечном значении* $q = q^*$.

*Если, к тому же, множество $E(\Phi)$ значений оператора $\Phi$ совпадает со всем пространством $L_p(A, d\mu)$, то соотношение* (3.11) *на самом деле является равенством.*

***Доказательство*** приведено в [23]. Его существенной частью является теорема 3.3, которая доказана в [23]. Здесь наметим только узловые фрагменты доказательства теоремы 3.2.

Для любого $x \in S_\Phi^p$ согласно (3.6) и (1.2) имеем

$$e_\sigma^p(x)_p = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \| \Phi(x - U_{\gamma_\sigma}(x)) \|_{L_p}^p = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \| \hat{x}(t)(1 - \chi_{\gamma_\sigma}(t)) \|_{L_p}^p =$$

$$= \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left( \int\limits_A |\hat{x}(t)|^p \, d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu \right) =$$

$$= \int\limits_A |\hat{x}(t)|^p \, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu, \quad L_p \overset{\mathrm{df}}{=} L_p(A, d\mu).$$

Следовательно,

$$e_\sigma^p(\Psi U_\Phi^p)_p = \sup_{x\in\Psi U_\Phi^p}\left(\int\limits_A |\,\hat{x}(t)|^p\, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\int\limits_{\gamma_\sigma}|\hat{x}(t)|^p\, d\mu\right). \tag{3.12}$$

Если $x\in\Psi U_\Phi^p$, то $\hat{x}(t)=\Psi(t)\hat{y}(t)$, где $y$ — некоторый элемент из $U_p$. Поэтому справедливо соотношение

$$\sup_{x\in\Psi U_\Phi^p}\left(\int\limits_A |\,\hat{x}(t)|^p\, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\int\limits_{\gamma_\sigma}|\hat{x}(t)|^p\, d\mu\right) \le$$

$$\le \sup_{\nu\in U_p}\left(\int\limits_A |\,\Psi(t)|^p\,|y(t)\,|^p\, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\int\limits_{\gamma_\sigma}|\Psi(t)|^p|\,y(t)\,|^p\, d\mu\right) =$$

$$= \sup_{h\in U_1^+}\left(\int\limits_A |\,\Psi(t)|^p\,|h(t)\,|\, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\int\limits_{\gamma_\sigma}|\Psi(t)|^p|\,h(t)\,|\, d\mu\right), \tag{3.13}$$

где $U_1^+$ — подмножество неотрицательных функций из $U_1$.

Для нахождения значений правой части $(3.13)$ воспользуемся следующим утверждением. Это утверждение, наверное, представляет и самостоятельный интерес, поэтому сформулируем его в виде теоремы.

**Теорема 3.3.** *Пусть $A$ — любое $\mu$-измеримое множество из $R^m, m\ge 1$, $\mathrm{mes}_\mu A = a$, где $a$ — конечно или бесконечно, $\varphi(x)$ — неотрицательная существенно ограниченная на $A$ функция, для которой в случае, когда множество $A$ не ограниченное, предполагается, что*

$$\lim_{|x|\to\infty}\varphi(x)=0.$$

*Тогда при любом $\sigma<a$ выполняется равенство*

$$\mathcal{E}_\sigma(\varphi) = \sup_{h\in U_1^+}\inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\left(\int\limits_A \varphi(x)\,h(x)\,d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma}\varphi(x)\,h(x)\,d\mu\right) =$$

$$= \sup_{\sigma<q\le a}\frac{q-\sigma}{\displaystyle\int_0^q\frac{dt}{\overline{\varphi}(t)}}, \tag{3.14}$$

*где $\Gamma_\sigma=\Gamma_\sigma(A)$ — множество всех $\mu$-измеримых подмножеств $\gamma_\sigma$ из $A$, мера которых равна $\sigma$, а $\overline{\varphi}(t)$ — убывающая перестановка функции $\varphi(x)$.*

*Точная верхняя грань в правой части* (3.14) *достигается при некотором конечном значении $q=q^*$.*

Полагая $\varphi(x)=|\Psi(x)|^p$ и объединяя соотношения (3.12) – (3.14), получаем соотношение (3.11).

Заметим теперь, что знак строгого неравенства в (3.11) может быть только в том случае, когда такой же знак будет в (3.13). Строгое неравенство в (3.11) возможно только из-за того, что не каждая функция $y\in U_p$ имеет свой прообраз в $U_\Phi^p$, обладающий к тому же $\Psi$-интегралом. Однако в случае, когда $E(\Phi)=L_p(A)$, такого быть не может: для любого $y \in U_p$ существует свой прообраз, в силу ограниченности $\Psi$ произведение $\Psi(t)y(t)$ принадлежит $L_p(A, d\mu)$ и, следовательно, также имеет свой прообраз в $S^p_\Phi$, а точнее, в $\Psi U^p_\Phi$. Таким образом, в этом случае соотношение (3.11) является равенством.

**4. Экстремальные задачи в пространствах $S^{p,\mu}_\varphi$.** К настоящему времени наиболее полные и окончательные результаты получены для пространств $S^{p,\mu}_\varphi$. Здесь дается краткий обзор полученных ранее результатов, связанных с наилучшими приближениями и поперечниками множеств, соответствующих множествам $\Psi U^p_\Phi$, и устанавливаются новые утверждения для этих величин в ряде еще не рассмотренных случаев. Пространства $S^{p,\mu}_\varphi$ уже упоминались в п. 1. Однако с целью полноты и строгости изложения здесь приводятся все необходимые для дальнейшего определения.

***4.1. Пространства $S^{p,\mu}_\varphi$.*** Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое линейное комплексное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — фиксированная счетная система в нем. Предположим, что любой паре элементов $x, y \in \mathfrak{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит $\varphi$, поставлено в соответствие число $(x, y)$ — „скалярное произведение" — так, что выполняются условия:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где $\overline{z}$ — число, комплексно-сопряженное с $z$;

2) $(\lambda x_1 + \nu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \nu(x_2, y), \quad \lambda,\ \nu$ — произвольные числа;

3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Пусть, далее, $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ — некоторая система неотрицательных чисел, $\mu_k \geq 0$ $k \in N = \{1, 2, \ldots\}$.

Каждому элементу $x \in \mathfrak{X}$ сопоставим систему чисел $\hat{x}(k) = \hat{x}_\varphi(k)$ посредством равенств

$$\hat{x}(k) = \hat{x}_\varphi(k) = (x, \varphi_k), \quad k \in N,$$

и при данном фиксированном $p \in (0, \infty)$ положим

$$S^{p,\mu}_\varphi = S^{p,\mu}_\varphi(\mathfrak{X}) = \left\{ x \in \mathfrak{X} : \sum_{k=1}^\infty |\mu_k \hat{x}_\varphi(k)|^p < \infty \right\}.$$

Элементы $x, y \in S^{p,\mu}_\varphi$ считаются тождественными, если при всех $k \in N$ $\hat{x}_\varphi(k) = \hat{y}_\varphi(k)$. Таким образом, множество $S^{p,\mu}_\varphi$ порождается пространством $\mathfrak{X}$, системами $\varphi$ и $\mu$, операцией $(\cdot, \cdot)$ и числом $p$.

В случае, когда $\mu_k \equiv 1$, $k \in N$, множества $S^{p,\mu}_\varphi$, как уже отмечалось, совпадают с множествами $S^p_\varphi$, которые введены и изучались в [14–23]; в общем случае они впервые рассматривались в [20].

Для произвольных векторов $x, y \in \mathfrak{X}$ определим $\varphi, \mu$-расстояние между ними с помощью равенства

$$\rho(x, y)_{p,\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \|x - y\|_{p,\mu} = \|x - y\|_{p,\mu,\varphi} = \left( \sum_{k=1}^\infty \left| \hat{x}_\varphi(k) - \hat{y}_\varphi(k) \right|^p \mu_k^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нулевым элементом пространства $S^{p,\mu}_\varphi$ называется вектор $\theta$, для которого $\hat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всех $k \in N$. Расстояние $\rho(\theta, x)_{p,\mu}$, $x \in S^{p,\mu}_\varphi$, называется $\varphi, \mu$-нормой элемента

$x$ и обозначается через $\|x\|_{p,\mu}$. Таким образом, по определению,

$$\| x\|_{p,\mu} = \| x\|_{p,\mu,\varphi} = \rho(\theta, x)_{p,\mu} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\mu_k \hat{x}_\varphi(k)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (4.1)$$

В [20] показано, что множество $S^{p,\mu}_{\varphi}$ — линейное пространство с теми же операциями сложения и умножения числа векторов, которые определены во всем $\mathfrak{X}$.

Если в системе $\mu$ все числа $\mu_k$ отличны от нуля, то равенство $\|x\|_{p,\mu} = 0$ возможно только при $x = \theta$. Отсюда вытекает, что при $p \geq 1$ и $\mu_k > 0$, $k \in N$, функционал $\| \cdot \|_{p,\mu}$, определяемый равенством (4.1) удовлетворяет всем аксиомам нормы, а при $p \in (0,1)$ — квазинормы. Поэтому если $\mu_k > 0$, $k \in N$, то при $p \geq 1$ $S^{p,\mu}_{\varphi}$ — линейное нормированное пространство, а при $p \in (0,1)$ — пространство с квазинормой, содержащее ортогональную систему $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем $\|\varphi_k\|_{p,\mu} = \mu_k$.

Пусть теперь $f$ — произвольный элемент пространства $S^{p,\mu}_{\varphi}$ и

$$S[\, f\,]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k \qquad (4.2)$$

— его формальный ряд по системе $\varphi$.

Пространства $S^{p,\mu}_{\varphi}$ наследуют важнейшие свойства сепарабельных гильбертовых пространств — равенство Парсеваля в виде соотношения (4.1) и минимальное свойство частных сумм Фурье, которые формулируются следующим образом.

**Предложение 4.1.** *Пусть $\{g_\alpha\}$ — семейство ограниченных подмножеств множества $N$, зависящих от параметра $\alpha$ и таких, что любое число $n \in N$ принадлежит всем множествам $\{g_\alpha\}$ с достаточно большими индексами $\alpha$.*

*Пусть, далее, $f \in S^{p,\mu}_{\varphi}$, $p \in (0, \infty)$, и*

$$S_\alpha(f) = S_{g_\alpha}(f) = \sum_{k \in g_\alpha} \hat{f}(k)\varphi_k$$

*— частная сумма ряда Фурье $S[f]_\varphi$ элемента $f$, соответствующая множеству $\{g_\alpha\}$. Тогда среди всех сумм вида*

$$\Phi_\alpha = \sum_{k \in g_\alpha} c_k \varphi_k$$

*наименее уклоняется от $f$ в пространстве $S^{p,\mu}_{\varphi}$ частная сумма $S_\alpha(f)$, т. е.*

$$\inf_{c_k} \|f - \Phi_\alpha\|_{p,\mu} = \|f - S_\alpha(f)\|_{p,\mu}.$$

*При этом*

$$\|f - S_\alpha(f)\|^p_{p,\mu} = \|f\|^p_{p,\mu} - \sum_{k \in g_\alpha} \left|\mu_k \hat{f}(k)\right|^p$$

*и*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \|f - S_\alpha(f)\|_{p,\mu} = 0.$$

Ясно, что это утверждение является перефразировкой предложения 2.1. Отсюда вытекает следующее утверждение.

**Предложение 4.1′**. *Пусть* $f \in S_{\varphi}^{p,\mu}$, $p \in (0, \infty)$, *и*

$$S_n(f) = S_n(f)_\varphi = \sum_{k=1}^{n} \hat{f}(k)\,\varphi_k, \quad n \in N,$$

— *частная сумма ряда* (4.2). *Тогда среди всех сумм вида*

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\varphi_k$$

*при данном* $n \in N$ *наименее уклоняется от* $f$ *в пространстве* $S_{\varphi}^{p,\mu}$ *частная сумма* $S_n(f)$, *т. е.*

$$\inf_{c_k} \|f - \Phi_n\|_{p,\mu} = \|f - S_n(f)\|_{p,\mu}.$$

*При этом*

$$\|f - S_n(f)\|_{p,\mu}^{p} = \|f\|_{p,\mu}^{p} - \sum_{k=1}^{n} \left|\mu_k \hat{f}(k)\right|^p$$

*и*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_{p,\mu} = 0. \tag{4.3}$$

Из (4.3) следует, что для любого элемента $f \in S_{\varphi}^{p,\mu}$ его ряд Фурье (4.2) по системе $\varphi$ сходится к $f$ по норме пространства $S_{\varphi}^{p,\mu}$, т. е. система $\varphi$ полна в $S_{\varphi}^{p,\mu}$ и $S_{\varphi}^{p,\mu}$ сепарабельно.

***4.2. ψ-Интегралы.*** Выделим в пространствах $S_{\varphi}^{p,\mu}$ объекты приближения — объединения элементов $f \in \mathfrak{X}$, соответствующих в теории аппроксимаций понятию класса функций и отвечающих множествам $\Psi U_{\Phi}^{p}$.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система комплексных чисел. Если для данного элемента $f \in \mathfrak{X}$, ряд Фурье которого имеет вид (4.2), существует элемент $F \in \mathfrak{X}$, для которого

$$S[\,f\,]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k\,\hat{f}(k)\varphi_k, \tag{4.4}$$

т. е. когда

$$\hat{F}_\varphi(k) = \psi_k\,\hat{f}(k), \quad k \in N, \tag{4.5}$$

то вектор $F$ называется $\psi$-интегралом вектора $f$. В таком случае записываем $F = \mathcal{J}^{\psi} f$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\mathfrak{X}$, то через $\psi\mathfrak{N}$ обозначается множество $\psi$-интегралов всех элементов из $\mathfrak{N}$. В частности, $\psi S_{\varphi}^{p,\mu}$ — множество $\psi$-интегралов всех векторов, принадлежащих данному пространству $S_{\varphi}^{p,\mu}$.

Если $f$ и $F$ связаны соотношением (4.4) или (4.5), то иногда удобно $f$ называть $\psi$-производной элемента $F$ и писать $f = D^{\psi}F = F^{\psi}$.

В дальнейшем предполагается, что система $\varphi$ подчинена условию

$$\lim_{k\to\infty} |\psi_k| = 0. \tag{4.6}$$

Ясно, что это условие обеспечивает включение $\psi S_{\varphi}^{p,\mu} \subset S_{\varphi}^{p,\mu}$ и для такого включения необходимым и достаточным является условие ограниченности множества чисел $|\psi_k|$, $k \in N$.

Пусть

$$U_\varphi^{p,\mu} = \left\{ f \in S_\varphi^{p,\mu} : \|f\|_{p,\mu} \le 1 \right\} \tag{4.7}$$

— единичный шар в данном пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$ и $\psi\, U_\varphi^{p,\mu}$ — множество $\psi$-интегралов всех элементов из $U_\varphi^{p,\mu}$. Множества $\psi\, U_\varphi^{p,\mu}$ и являются основными объектами, чьи аппроксимационные характеристики здесь изучаются. Заметим, что если

$$\psi_k \ne 0 \quad \forall k \in N,$$

то в силу (4.6) и (4.8)

$$\psi\, U_\varphi^{p,\mu} = \left\{ f \in S_\varphi^{p,\mu} : \sum_{k=1}^{\infty} \left| \mu_k \frac{\hat f(k)}{\psi_k} \right|^p \le 1 \right\}, \tag{4.7$'$}$$

т. е. множество $\psi\, U_\varphi^{p,\mu}$ является $p$-эллипсоидом в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$ с полуосями, равными $|\psi_k|$.

***4.3. Приближающие агрегаты и аппроксимационные характеристики.*** Конструкция агрегатов, используемых для приближения элементов $f \in S_\varphi^{p,\mu}$, определяется характеристическими последовательностями $\varepsilon(\psi), g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ системы $\psi$, которые задаются следующим образом.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условию (4.6). Тогда через $\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ обозначается множество значений величин $|\psi_k|$, упорядоченное по их убыванию, через $g(\psi) = g_1, g_2, \ldots$ — система множеств

$$g_n = g_n^\psi = \{k \in N : |\psi_k\,| \ge \varepsilon_n\}$$

и через $\delta(\psi) = \delta_1, \delta_2, \ldots$ — последовательность чисел $\delta_n = |g_n|$, где $|g_n|$ — количество чисел $k \in N$, содержащихся во множестве $g_n$. Последовательности $\varepsilon(\psi), g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ называются характеристическими для системы $\psi$. Заметим, что при таком определении любое число $n^* \in N$ принадлежит всем множествам $g_n^\psi$ с достаточно большими номерами $n$ и

$$\lim_{k\to\infty} \delta_k = \infty.$$

В дальнейшем удобно через $g_0 = g_0^\psi$ обозначать пустое множество и считать, что $\delta_0 = 0$.

Пусть множество $S_\varphi^{p,\mu}$ порождается пространством $\mathfrak{X}$, системами $\varphi, \mu$ и числом $p,\ p > 0$, и $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная система комплексных чисел, удовлетворяющая условию (4.6).

В качестве приближающих агрегатов для элементов $f \in \psi\, S_\varphi^{p,\mu}$ будем рассматривать полиномы

$$S_n(f)_{\varphi,\psi} = S_{g_n^\psi}(f) = \sum_{k \in g_n^\psi} \hat f(k)\, \varphi_k, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad S_0(f)_{\varphi,\psi} = \theta, \tag{4.8}$$

где $g_n^\psi$ — элементы последовательности $g(\psi)$, $\theta$ — нулевой вектор пространства $S_\varphi^{p,\mu}$. При этом полагаем

$$\mathcal{E}_n(f)_{\psi,p,\mu} = \|\, f - S_{n-1}(f)_{\varphi,\psi}\|_{p,\mu},$$

$$\mathcal{E}_n(\psi\, U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu} = \sup_{f\in\psi\, U_\varphi^{q,\mu}} \mathcal{E}_n(f)_{\psi,p,\mu}, \quad p,q>0. \tag{4.9}$$

Величина $\mathcal{E}_n(f)_{\psi,p,\mu}$ называется приближением элемента $f \in S_\varphi^{p,\mu}$ суммами Фурье, построенными по областям $g_{n-1}^{\psi}$, а $\mathcal{E}_n(\psi\, U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu}$ — приближением множества $\psi\, U_\varphi^{q,\mu}$ такими суммами в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$. Пусть, далее,

$$E_n(f)_{\psi,p,\mu} = \inf_{c_k} \left\| f - \sum_{k\in g_{n-1}^{\psi}} c_k\, \varphi_k \right\|_{p,\mu}$$

— наилучшее приближение элемента $f \in \psi\, S_\varphi^{p,\mu}$ полиномами, построенными по областям $g_{n-1}^{\psi}$, и

$$E_n(\psi\, U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu} = \sup_{f\in\psi\, U_\varphi^{q,\mu}} E_n(f)_{\psi,p,\mu}, \quad p,q>0, \tag{4.10}$$

— наилучшее приближение множества $\psi\, U_\varphi^{q,\mu}$ такими полиномами.

Как обычно,

$$d_n(\mathfrak{M};Y) = \inf_{F_n\in\mathcal{F}_n} \sup_{x\in\mathfrak{M}} \inf_{u\in F_n} \|x-u\|_Y$$

— поперечник по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в пространстве $Y$. Здесь $\mathcal{F}_n$ — множество всех подпространств размерности $n\in N$ пространства $Y$. Согласно неравенству Иенсена, для любой неотрицательной последовательности $a=\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $a_k\geq 0$,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 0<q\leq p.$$

Поэтому справедливы включения

$$S_\varphi^{q,\mu} \subset S_\varphi^{p,\mu}, \quad 0<q\leq p, \tag{4.11}$$

и

$$\psi\, U_\varphi^{q,\mu} \subset \psi\, U_\varphi^{p,\mu}, \quad 0<q\leq p. \tag{4.12}$$

Отсюда, в частности, заключаем, что величины (4.9) и (4.10) корректно определены, по крайней мере, для всех систем $\psi$, удовлетворяющих условию (4.6), в предположении, что $0<q\leq p$.

***4.4. Наилучшие приближения и поперечники q-эллипсоидов.*** Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.1.** *Пусть $\psi=\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система чисел, удовлетворяющая условию* (4.6). *Тогда при любых $n\in N$ и $0<q\leq p<\infty$ выполняются соотношения*

$$E_n(\psi\, U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu} \leq \mathcal{E}_n(\psi\, U_\varphi^{q,\mu})_{\psi,p,\mu} \leq \varepsilon_n. \tag{4.13}$$

*Если при этом*

$$\mu_k \neq 0 \quad \text{и} \quad \psi_k\neq 0 \quad \forall k\in N, \tag{4.14}$$

*то в* (4.13) *знаки неравенств заменяются знаками равенств. Величина $\varepsilon_n$ — $n$-й член характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$.*

Построенные по областям $g_n^{\psi}$ частные суммы вида (4.8) являются оптимальным аппаратом приближения элементов из множеств $\psi\, U_{\varphi}^{q,\mu}$ в смысле колмогоровских поперечников. Точнее, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.2.** *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям* (4.6) *и* (4.14) *и*

$$d_{\nu}\left(\psi\, U_{\varphi}^{p,\mu}\right)_{p,\mu} = d_{\nu}(\psi\, U_{\varphi}^{p,\mu}; S_{\varphi}^{p,\mu}) =$$

$$= \inf_{F_n \in \mathcal{F}_n} \sup_{f \in \psi\, U_{\varphi}^{p,\mu}} \inf_{u \in F_n} \|f-u\|_{p,\mu}, \quad \nu = 0, 1, \ldots,$$

*— поперечники по Колмогорову множеств* $\psi\, U_{\varphi}^{p,\mu}$ *в пространстве* $S_{\varphi}^{p,\mu}$. *Тогда при любых* $p \in [1,\infty)$ *и* $n \in N$ *выполняются равенства*

$$d_{\delta_{n-1}}(\psi\, U_{\varphi}^{p,\mu})_{p,\mu} = d_{\delta_{n-1}+1}(\psi\, U_{\varphi}^{p,\mu}) = \ldots = d_{\delta_n-1}(\psi\, U_{\varphi}^{p,\mu})_{p,\mu} = \varepsilon_n,$$

*в которых* $\delta_s$ *и* $\varepsilon_s$, $s = 1, 2, \ldots,$ *— элементы характеристических последовательностей* $\delta(\psi)$ *и* $\varepsilon(\psi)$ *системы* $\psi$, *а* $\delta_0 = 0$.

Пусть теперь наряду с числами $p, q$ и последовательностью $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ задана последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел, среди которых имеется хотя бы одно отличное от нуля. По данному пространству $\mathfrak{X}$ и системе $\varphi$ построим множества $S_{\varphi}^{p,\mu}$ и $S_{\varphi}^{q,\lambda}$. Если $0 < q \le p$ и последовательности $\lambda$ и $\mu$ совпадают, то справедливы включения (4.11) и (4.12). Ясно также, что при любом $p \in (0,\infty)$ будет выполняться включение

$$S_{\varphi}^{p,\lambda} \subset S_{\varphi}^{p,\mu}$$

при условии, что

$$\lambda_k \ge C\mu_k \quad \forall k \in N,$$

где $C$ — любая положительная постоянная. Поэтому справедливо включение

$$S_{\varphi}^{q,\lambda} \subset S_{\varphi}^{p,\mu} \quad \forall p, q, \quad 0 < q \le p, \quad \lambda_k \ge C\mu_k \quad \forall k \in N.$$

Получим аналоги теорем 4.1 и 4.2 в случае, когда приближаемые элементы находятся в пространстве $S_{\varphi}^{q,\lambda}$, а приближение ищется в пространстве $S_{\varphi}^{p,\mu}$. В этом случае приближающие агрегаты будут строиться опять согласно формулам (4.8), только в качестве последовательности $\psi$, входящей в определение областей $g_n^{\psi}$ и последовательности $\varepsilon(\psi)$, будет использоваться последовательность

$$\psi' = \{\psi'_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}, \tag{4.15}$$

в которой числа $\psi_k$, $k \in N$, те же, что и в определении приближаемых множеств $\psi\, U_{\varphi}^{q,\lambda}$.

**Теорема 4.1′.** *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}, \mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— фиксированные последовательности, подчиняющиеся условию*

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k} = 0. \tag{4.16}$$

*Тогда при любых* $n \in N$ *и* $0 < q \le p$ *выполняются соотношения*

$$E_n(\psi\, U_{\varphi}^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} \le \mathcal{E}_n(\psi\, U_{\varphi}^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} \le {\varepsilon'}_n, \tag{4.17}$$

*где*

$$E_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} = \sup_{f\in\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}} E_n(f)_{\psi',p,\mu},$$

$$E_n(f)_{\psi',p,\mu} = \inf_{c_k}\left\| f - \sum_{k\in g_{n-1}^{\psi'}} c_k\,\varphi_k \right\|_{p,\mu},$$

*и*

$$\mathcal{E}_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} = \sup_{f\in\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}} \mathcal{E}_n(f)_{\psi',p,\mu},$$

$$\mathcal{E}_n(f)_{\psi',p,\mu} = \| f - S_{n-1}(f)_{\varphi,\psi'} \|_{p,\mu}, \tag{4.18}$$

$\varepsilon'_n$ *и* $g_{n-1}^{\psi'}$ *— члены характеристической последовательности системы* (4.15). *Если при этом выполнены условия* (4.14), *то в* (4.17) *знаки неравенств заменяются знаками равенств.*

Для колмогоровских поперечников в этом случае выполняется следующий аналог теоремы 4.2.

**Теорема 4.2$'$.** *Пусть системы* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ *и* $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *удовлетворяют условиям* (4.6) *и* (4.14). *Тогда для любой последовательности* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, *для которой выполняется условие* (4.16), *при любых* $p\in[1,\infty)$ *и* $n\in N$ *справедливы равенства*

$$d_{\delta'_{n-1}}(\psi\, U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} = d_{\delta'_{n-1}+1}(\psi\, U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} = \ldots = d_{\delta'_n-1}(\psi\, U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} = \varepsilon'_n, \tag{4.19}$$

*в которых* $\delta'_s$ *и* $\varepsilon'_s$, $s = 1,2,\ldots,$ *— элементы характеристических последовательностей* $\delta(\psi')$ *и* $\varepsilon(\psi')$ *системы* (4.15), *а* $\delta'_0 = 0$.

***4.5. Величины $D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu}$.*** Пусть $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, $\varepsilon(x) = \{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^\infty$, $g(x) = \{g_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и $\delta(x) = \{\delta_k(x)\}_{k=1}^\infty$ — ее характеристические последовательности. Обозначим через $\overline{x} = \{\overline{x}_k\}_{k=1}^\infty$ перестановку последовательности $\{|x_k|\}_{k=1}^\infty$ в убывающем порядке. Ясно, что значения $\overline{x_k}$, $k\in N$, можно определить согласно формулам

$$\overline{x_k} = \varepsilon_n(x), \quad k\in(\delta_{n-1}(x), \delta_n(x)], \quad n\in N, \quad \delta_0 = 0.$$

В этих обозначениях равенство (4.19) принимает вид

$$d_n(\psi\, U_\varphi^{p,\lambda})_{p,\mu} = \overline{\psi}'_{n+1}, \quad n\in N, \tag{4.19$'$}$$

где $\overline{\psi}'_n$ — $n$-й член последовательности $\overline{\psi}'$. Пусть, далее, $\gamma_n$ — любой набор из $n$ натуральных чисел и $\mathcal{F}_n$ — множество всех полиномов вида

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k\in\gamma_n} c_k\,\varphi_k, \tag{4.20}$$

где $c_k$ — некоторые комплексные числа. В силу определения понятия поперечника из $(4.19')$ заключаем, что всегда

$$\inf_{\gamma_n}\ \sup_{f\in\psi\, U_\varphi^{p,\lambda}}\ \inf_{P_{\gamma_n}\in F_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\mu} \ge \overline{\psi}'_{n+1}, \tag{4.21}$$

а из теоремы $4.1'$ следует, что при выполнении условий (4.14) соотношение (4.21) на самом деле является равенством. В связи с этим в принятых здесь обозначениях для любого подмножества $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{X}$ положим

$$D_n(\mathfrak{N})_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n} \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{P_{\gamma_n} \in F_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\mu}. \tag{4.22}$$

Тогда доказанное соотношение можно записать в виде

$$D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,p,\mu} = \overline{\psi}'_{\,n+1}, \quad p = q.$$

(Понятно, что величина $D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})$ соответствует величине, определенной соотношением (3.5).)

Оказывается, что это соотношение остается в силе и при $0 < q < p$. Точнее, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.3.** *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$, $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *и* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ *— произвольные системы чисел, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{k \to \infty} \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k} = 0. \tag{4.23}$$

*Пусть, далее,* $\gamma_n$ *— любой набор из* $n$ *натуральных чисел,* $q$ *и* $p$ *— любые положительные числа,* $0 < q \le p$. *Тогда при любом* $n \in N$

$$D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,p,\mu} = \inf_{\gamma_n} \sup_{f \in \psi\, U_\varphi^{q,\lambda}} \inf_{P_{\gamma_n} \in F_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\mu} = \overline{\psi}'_{\,n+1}, \tag{4.24}$$

*где* $\overline{\psi}'_{\,n+1}$ *—* $(n+1)$*-й член последовательности* $\overline{\psi}' = \{\overline{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$, *являющейся перестановкой в убывающем порядке последовательности*

$$|\psi'_{\,k}| = \left|\frac{\psi_k\, \mu_k}{\lambda_k}\right|, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Доказательства теорем 4.1 – 4.3 приведены в [20]; в случае, когда $\mu_k = \lambda_k \equiv 1$, эти утверждения установлены в [ 14 – 16]. В [20] показано, что внутренняя нижняя грань в (4.24) реализуется полиномами вида (4.20) при $c_k = \widehat{f}(k)$, а внешняя — множеством $\gamma_n^* = \{i_k\}_{k=1}^n$, где значения $i_k$, $k = \overline{1, n}$, такие, что $|\psi'_{\,i_k}| = \psi'_{\,k}$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.3′.** *Пусть выполняются все условия теоремы* 4.3. *Тогда при любом* $n \in N$

$$D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,p,\mu} = \sup_{f \in \psi\, U_\varphi^{q,\lambda}} \left\| f - \sum_{k \in \gamma_n^*} \widehat{f}(k)\, \varphi_k, \right\|_{p,\mu} = \overline{\psi}'_{\,n+1}, \tag{4.25}$$

*где* $\gamma_n^* = \{i_k\}_{k=1}^n$ *и значения* $i_k$, $k = \overline{1, n}$, *таковы, что*

$$\left|\frac{\psi_{i_k}\, \mu_{i_k}}{\lambda_{i_k}}\right| = \overline{\psi}'_{\,k}.$$

Объединяя (4.25) и $(4.19')$, видим, что значения поперечников $d_n(\psi\, U_\varphi^{p,\lambda})_{\,p,\mu}$ в случае приближения элементов $f \in \psi\, U_\varphi^{p,\lambda}$ в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$ реализуются суммами Фурье, построенными именно по областям $\gamma_n^*$.

Отметим, что в случае приближения периодических функций тригонометрическими полиномами величинам $D_n(\mathfrak{N})_{p,\mu}$ соответствуют так называемые тригонометрические поперечники. Поэтому эти величины можно назвать, к примеру, базисными поперечниками порядка $n$ множества $\mathfrak{N}$ в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$, и тогда из теоремы $4.3'$ следует, что значения базисных поперечников $D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu}$ в случае, когда $0<q\le p$, также реализуются суммами Фурье, построенными по областям $\gamma_n^*$.

***4.6. Наилучшие приближения q-эллипсоидов в пространствах $S_\varphi^{p,\mu}$ при $q>p$.*** Получим аналог теоремы $4.1'$ ( а следовательно, и теоремы 4.1) в случае, когда $0<p<q<\infty$. В этом случае условия (4.16) не достаточны для включения

$$\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}\subset S_\varphi^{p,\mu}.$$

Такое включение на этот раз обеспечивают условия

$$\sum_{k=1}^\infty |\psi'_k|^{p\,q/(q-p)}<\infty,\quad \psi'_k=\psi_k\,\frac{\mu_k}{\lambda_k},\quad k\in N, \tag{4.26}$$

в чем нетрудно убедиться с помощью неравенства Гельдера.

**Теорема 4.4.** *Пусть $\psi,\mu$ и $\lambda$ — последовательности, $p$ и $q$ — неотрицательные числа, $q>p>0$, удовлетворяющие условию* (4.26).

*Тогда при любом натуральном $n$ справедливо равенство*

$$E_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu}=\mathcal{E}_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu}=\left(\sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^\infty (\overline{\psi}'_k)^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}}, \tag{4.27}$$

*где $\overline{\psi}'=\{\overline{\psi}_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность, для которой*

$$\overline{\psi}'_k=\varepsilon'_k,\quad \delta'_{n-1}<k\le\delta'_n,\quad n\in N,$$

*$\varepsilon'_n$ и $\delta'_n$ — члены характеристических последовательностей $\varepsilon(\psi')$ и $\delta(\psi')$.*

В случае, когда $\mu_k=\lambda_k\equiv 1$, эта теорема доказана в [18], § 11.8. Используемые там рассуждения по существу пригодны и в общем случае.

***Доказательство.*** Первое из равенств в (4.27) является следствием предложения 4.1, поэтому достаточно убедиться в справедливости второго из этих равенств.

Пусть $\varepsilon'_n,\delta'_n$ и $g'_n=g_n(\psi')=\{k\in N:|\psi'_k|\ge\varepsilon'_n\}$ — характеристические последовательности системы $\psi'$,

$$S_n(f)_{\varphi,\psi'}=S_{g_n^{\psi'}}=\sum_{k\in g_n^{\psi'}}\widehat{f}_\varphi(k)\,\varphi_k$$

— полиномы, построенные согласно (4.8) для элементов $f\in\psi U_\varphi^{q,\lambda}$. Тогда с учетом формул (4.9) имеем

$$\mathcal{E}_n^p(f)_{\psi',p,\mu}=\|f-S_{n-1}(f)_{\varphi,\psi'}\|_{p,\mu}^p=\sum_{k\overline{\in}\, g_{n-1}^{\psi'}}|\mu_k\,\widehat{f}_\varphi(k)|^p=$$

$$=\sum_{k\overline{\in}\, g_{n-1}^{\psi'}}|\psi_k|^p\,|\mu_k\,\widehat{f}_\varphi^{\,\psi}(k)|^p=\sum_{k\overline{\in}\, g_{n-1}^{\psi'}}|\psi'_k|^p\,|\widehat{f}_\varphi^{\,\psi}(k)|^p\lambda_k^p. \tag{4.28}$$

Обозначим через $i_k$, $k = 1, 2, \ldots$, натуральные числа, выбранные из условия

$$|\psi'_{i_k}| = \overline{\psi}'_k, \quad \text{где} \quad \overline{\psi}_k = \varepsilon'_k \quad \text{при} \quad k \in (\delta'_{n-1}, \delta'_n]. \tag{4.29}$$

Тогда (4.28) можно переписать в виде

$$\mathcal{E}_n^p(f)_{\psi',p,\mu} = \sum_{k=\delta'_{n-1}+1} \left|\overline{\psi}'_k \, \widehat{f}_\varphi^\psi(i_k)\lambda_{i_k}\right|^p. \tag{4.30}$$

Положим

$$m_k = |\widehat{f}_\varphi^\psi(i_k)\lambda_{i_k}|^q. \tag{4.31}$$

В таком случае

$$\lambda_{i_k}^p |\widehat{f}_\varphi^\psi(i_k)|^p = m_k{}^{p/q}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{E}_n^p(f)_{\psi',p,\mu} = \sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} (\overline{\psi}'_k)^p \, m_k^r, \quad r = \frac{p}{q}.$$

Если $f \in \psi \, U_\varphi^{q,\lambda}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k \, \widehat{f}_\varphi^\psi(k)|^p \leq 1.$$

Поэтому, принимая во внимание соотношения (4.18), (4.31) и (4.30), находим

$$\mathcal{E}_n^p(\psi \, U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} \leq \sup\left\{ \sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} (\overline{\psi}'_k)^p \, m_k^r, \quad r = \frac{p}{q}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq 1 \right\}. \tag{4.32}$$

Если положить $(\overline{\psi}'_k)^p = \alpha_k$, то условие (4.26) запишется в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} < \infty, \quad \alpha_k > 0 \quad \forall k \in N. \tag{4.33}$$

Следовательно, нахождение значения правой части (4.32) сводится к решению экстремальной задачи

$$\sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \alpha_k \, x_k^r \to \sup \tag{4.34}$$

при условиях $x_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=\delta_{n-1}+1} x_k = 1$, а числа $\alpha_k$ образуют невозрастающую последовательность и удовлетворяют условию (4.33).

Решения $\overline{x}_k$ такой задачи получены в [18], § 11.8. Они имеют вид

$$\overline{x}_k = \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \left( \sum_{i=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}} \right)^{-1}, \quad k = \delta'_{n-1}+1, \delta'_{n-1}+2, \ldots. \tag{4.35}$$

Объединяя соотношения (4.32) – (4.35), получаем

$$\mathcal{E}_n^p(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\psi',p,\mu} \le \sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \alpha_k \overline{x}_k^r = \left( \sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \right)^{1-r} =$$

$$= \left( \sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} (\overline{\psi}'_k)^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{p\,q}},$$

и для завершения доказательства теоремы остается показать, что это соотношение на самом деле является равенством. Для этого достаточно показать, что во множестве $\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}$ при любом $\varepsilon > 0$ найдется элемент $f_\varepsilon$, для которого выполняется неравенство

$$\mathcal{E}_n(f_\varepsilon)_{\psi',p,\mu} > \left( \sum_{k=\delta'_{n-1}+1}^{\infty} (\overline{\psi}'_k)^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{p\,q}} - \varepsilon. \tag{4.36}$$

Построим такой элемент, придерживаясь схемы, изложенной в [18], § 11.8.

Пусть

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k}\, \varphi_{i_k},$$

где числа $i_k$ выбраны согласно (4.29), а числа $c_{i_k}$ такие, что

$$c_{i_k}^q\, \lambda_{i_k}^q = \begin{cases} 0, & k = 1, 2, \ldots, \delta'_{n-1}, \\ \\ \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}\, \sigma_2^{-1}(\delta'_{n-1}), & k > \delta'_{n-1}, \end{cases}$$

$$\sigma_2(s) = \sum_{i=s}^{\infty} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}}.$$

Ясно, что

$$\|h\|_{q,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k}^q\, \lambda_{i_k}^q = 1. \tag{4.37}$$

Пусть теперь $\varepsilon$ — любое положительное число и $N_\varepsilon$ настолько велико, что при всех $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\sigma_2^{-r}(\delta'_{n-1}) \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} < \varepsilon.$$

Элемент

$$h_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} c_{i_k}\, \varphi_{i_k}$$

в силу (4.37) принадлежит $U_\varphi^q$, поэтому элемент $f_\varepsilon = \mathcal{J}^\psi\, h_\varepsilon$ принадлежит $\psi\, U_\varphi^q$. Вычисляя согласно (4.9) значение $\mathcal{E}_n(f_\varepsilon)_{\psi',p,\mu}$, убеждаемся в справедливости оценки (4.36), и тем самым завершаем доказательство теоремы 4.4.

***4.7. Величины $D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,p,\mu}$ при $q > p > 0$.*** Найдем аналоги теорем 4.3 и $4.3'$ в случае, когда $q > p > 0$. Пусть, как и ранее, $\gamma_n$ — любой набор из $n$ натуральных чисел и $\mathcal{F}_n$ — множество всех полиномов вида (4.20),

$$E_{\gamma_n}(f)_{\,p,\mu} = \inf_{P_{\gamma_n} \in F_n} \|f - P_{\gamma_n}\|_{p,\mu}, \quad f \in S_\varphi^{p,\mu}, \tag{4.38}$$

— наилучшее приближение элемента $f$ посредством полиномов, построенных по заданному набору $\gamma_n$ из $n$ базисных векторов,

$$\mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} = \|\, f - S_{\gamma_n}(f)\|_{p,\mu}, \qquad S_{\gamma_n}(f) = \sum_{k \in \gamma_n} \widehat{f}_\varphi(k)\, \varphi_k, \tag{4.38$'$}$$

$$E_{\gamma_n}(\mathfrak{N})_{\,p,\mu} = \sup_{f \in \mathfrak{N}} E_{\gamma_n}(f)_{\,p,\mu}$$

— верхняя грань величин $E_{\gamma_n}(f)_{\,p,\mu}$ на некотором подмножестве $\mathfrak{N}$ из $S_\varphi^{p,\mu}$ и

$$\mathcal{E}_{\gamma_n}(\mathfrak{N}) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \mathcal{E}_{\gamma_n}(f)_{\,p,\mu}.$$

В таких обозначениях величина $D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,p,\mu}$, определяемая соотношением (4.22), запишется в виде

$$D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,p,\mu} = \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,p,\mu}. \tag{4.39}$$

Введем еще некоторые обозначения. Если $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty = \{\psi(k)\}_{k=1}^\infty$ — некоторая система комплексных чисел, $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ и $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — системы неотрицательных чисел и $\gamma_n$ — фиксированный набор из $n$ натуральных чисел, то будем полагать

$$\psi_{\gamma_n} = \{\psi_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^\infty,$$

где

$$\psi_{\gamma_n}(k) = \begin{cases} 0, & k \in \gamma_n, \\ \psi_k = \psi(k), & k \overline{\in} \gamma_n, \end{cases}$$

$$\psi' = \{\psi'(k)\}_{k=1}^\infty, \quad \psi'(k) = \psi'{}_k = \psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k}, \tag{4.40}$$

$$\psi'{}_{\gamma_n} = \{\psi'{}_{\gamma_n}(k)\}_{k=1}^\infty, \tag{4.41}$$

где

$$\psi'{}_{\gamma_n}(k) = \begin{cases} 0, & k \in \gamma_n, \\ \psi'{}_k, & k \overline{\in} \gamma_n. \end{cases}$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.5.** *Пусть числа $p, q$ и последовательности $\psi, \mu$ и $\lambda$ такие, что $q > p > 0$ и выполняется условие* (4.26).

*Тогда при любом натуральном $n$ выполняется равенство*

$$E_{\gamma_n}(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,p,q} = \mathcal{E}_{\gamma_n}(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,p,q} = \left( \sum_{k=1}^\infty (\overline{\psi}'{}_{\gamma_n}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{p\,q}}, \tag{4.42}$$

*где* $\overline{\psi}'_{\gamma_n}(k)$, $k \in N$, *— перестановка в убывающем порядке последовательности* $|\psi'_{\gamma_n}(k)|$, $k \in N$.

***Доказательство.*** Прежде всего заметим, что равенство (4.27) является частным случаем (4.42). Действительно, пусть $g_{n-1}^{\psi'}$ — $(n-1)$-й член характеристической последовательности областей $g_k^{\psi'}$ для системы $\psi'$, т. е.

$$g_{n-1}^{\psi'} = \{k \in N: \ |\psi'(k)| \geq \varepsilon_{n-1}\}, \tag{4.43}$$

и $n' \overset{\mathrm{df}}{=} \delta'_{n-1} = |g_{n-1}^{\psi'}|$ — количество натуральных чисел, содержащихся в $g_{n-1}^{\psi'}$. Выберем набор $\gamma_{n'}^*$ из условия $\gamma_{n'}^* = g_{n-1}^{\psi'}$. В таком случае, согласно (4.40) и (4.41), будем иметь

$$\overline{\psi}'_{\gamma_{n'}^*}(k) = \overline{\psi}'(k+n'), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4.44}$$

Следовательно, в силу (4.43), (4.44) и (4.27)

$$E_{\gamma_{n'}^*}(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,p,q} = \mathcal{E}_{\gamma_{n'}^*}(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,p,q} = \left(\sum_{k=n'+1}^{\infty} (\overline{\psi}'(k))^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}} = E_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,\psi'\,p,\mu}.$$

Таким образом,

$$E_{\gamma_{\delta_{n-1}}^*}(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,p,q} = \mathcal{E}_{\gamma_{\delta_{n-1}}^*}(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,p,q} =$$

$$= E_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,\psi'\,p,\mu} = \mathcal{E}_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,\psi'\,p,\mu}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.4, поэтому остановимся только на его узловых моментах. В силу предложения 4.1 достаточно доказать только второе из равенств в (4.42). С этой целью сначала с учетом $(4.38')$ и (4.41) запишем аналог равенства (4.28):

$$\mathcal{E}_{\gamma_n}^p(f)_{\,p,\mu} = \sum_{k \overline{\in}\, \gamma_n} |\mu_k \widehat{f}_\varphi(k)|^p = \sum_{k \overline{\in}\, \gamma_n} |\psi'_k|^p\, |\widehat{f}_\varphi^{\,\psi}(k)|^p\, \lambda_k^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |\psi'_{\gamma_n}(k)|^p\, |\,\widehat{f}^{\,\psi}(k)|^p\, \lambda_k^p \tag{4.45}$$

и через $i_k$, $k \in 1, 2, \ldots$, обозначим натуральные числа, выбранные из условия

$$\psi'_{\gamma_n}(i_k) = \overline{\psi}'_{\gamma_n}(k), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда (4.45) перепишется в виде

$$\mathcal{E}_{\gamma_n}^p(f)_{\,p,\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} |\overline{\psi}'_{\gamma_n}(k)\, \widehat{f}_\varphi^{\,\psi}(i_k)\, \lambda_{i_k}|^p.$$

Выполняя замену (4.31), получаем аналог неравенства (4.32):

$$\mathcal{E}_{\gamma_n}^p(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{\,p,\mu} \leq \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (\overline{\psi}'_{\gamma_n}(k))^p\, m_k^r, \quad r = \frac{p}{q}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq 1\right\},$$

после чего доказательство этой теоремы завершается фактически повторением соответствующих рассуждений из доказательства теоремы 4.4.

Рассматривая нижние грани обеих частей равенства (4.42) по всевозможным наборам $\gamma_n$ из $n$ натуральных чисел, видим, что точная нижняя грань правой части (4.42) реализуется набором $\gamma_n^*$, который определяется соотношением

$$\gamma_n^* = \{i_k \in N: \ |\psi'_{i_k}| = |\overline{\psi}'_{i_k}|, \ k = 1, 2, \ldots, n\}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Согласно (4.40) и (4.41)

$$\overline{\psi}'_{\gamma_n^*}(k) = \overline{\psi}'(k+n), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Поэтому в силу (4.39)

$$D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\overline{\psi}'_{\gamma_n^*}(k))^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (\overline{\psi}'(k))^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.6.** *Пусть числа $p, q$ и последовательности $\psi, \mu$ и $\lambda$ такие, что $q >$ $> p > 0$ и выполняется условие* (4.26). *Тогда при любом натуральном $n$ выполняется равенство*

$$D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (\overline{\psi}'_k)^{\frac{p\,q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{p\,q}}, \tag{4.46}$$

*в котором $\overline{\psi}'_k$, $k \in N$, — перестановка в убывающем порядке последовательности $\{|\psi'_k|\}_{k=1}^{\infty}$.*

Обратим внимание на то, что последовательность $\overline{\psi}'_k$, $k \in N$, в общем случае является ступенчатой. Поэтому, в силу равенства (4.24), такой же характер имеет и величина $D_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu}$ при $p \geq q > 0$. Если же $p < q$, то согласно (4.46), эта величина строго убывает с ростом параметра $n$.

***4.8. Наилучшие $n$-членные приближения.*** Пусть $S_\varphi^{p,\mu} = S_\varphi^{p,\mu}(\mathfrak{X})$ — пространство, определяющееся пространством $\mathfrak{X}$, системой $\varphi$, числом $p > 0$ и последовательностью $\mu$. Пусть, далее, $f \in S_\varphi^{p,\mu}$ и $E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu}$ — величина наилучшего приближения элемента $f$ посредством полиномов, построенных по заданному набору $\gamma_n$ из $n$ базисных векторов, определяемая равенством (4.38). Величина

$$e_n(f)_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n} E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} \tag{4.47}$$

называется наилучшим $n$-членным приближением элемента $f$ в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$, а величина

$$e_n(\mathfrak{N})_{p,\mu} = \sup_{f \in \mathfrak{N}} e_n(f)_{p,\mu} \tag{4.48}$$

— наилучшим $n$-членным приближением подмножества $\mathfrak{N}$ из $S_\varphi^{p,\mu}$ в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$. Ясно, что величины $e_n(f)_{p,\mu}$ и $e_n(\mathfrak{N})_{p,\mu}$ соответствуют величинам (3.1) и (3.2).

Величины, аналогичные определяемым равенством (4.48), по-видимому, впервые рассматривались С. Б. Стечкиным [37] и затем изучались в теории приближений периодических функций многими авторами (см., например, [38 – 50]).

В качестве множеств $\mathfrak{N}$ будем рассматривать множества $\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}$ $\psi$-интегралов всех элементов из единичных шаров в пространствах $S_\varphi^{q,\lambda}$ при условиях, обеспечивающих включение

$$S_{\varphi}^{q,\lambda} \subset S_{\varphi}^{p,\mu}.$$

**Теорема 4.7.** *Пусть $p$ и $q$ — действительные числа такие, что $p \geq q > 0$; $\psi, \mu$ и $\lambda$ — последовательности, удовлетворяющие условию* (4.23). *Тогда при любом $n \in N$ выполняется равенство*

$$e_n^p(\psi\, U_{\varphi}^{q,\lambda})_{p,\mu} = \sup_{l>n} (l-n) \left( \sum_{k=1}^{l} (\overline{\psi}'_k)^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}} = (l^*-n) \left( \sum_{k=1}^{l^*} (\overline{\psi}'_k)^{-q} \right)^{-\frac{p}{q}},$$

*где $\overline{\psi}' = \{\overline{\psi}'_k\}_{k=1}^{\infty}$ — перестановка в убывающем порядке последовательности*

$$|\psi'_k| = \left| \frac{\psi_k\, \mu_k}{\lambda_k} \right|, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

*а $l^*$ — некоторое натуральное число.*

Эта теорема, а также теорема 4.8 в случае, когда $\mu_k = \lambda_k \equiv 1$, $k \in N$, доказаны в работах [14, 15] (см. также [18]). В общем случае они получены в [20]. Существенной частью доказательства теоремы 4.7 является следующее утверждение, доказанное в [14] (см. также [18]).

**Лемма 4.1.** *Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел $\alpha_k \geq 0$, $k \in N$, для которой*

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0,$$

*и $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел $m_k \geq 0$, $k \in N$, удовлетворяющая условию*

$$|m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \leq 1.$$

*Пусть, далее, $r$ — любое число, $r \geq 1$,*

$$S^{(r)}(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, m_k^r, \qquad S_{\gamma_n}^{(r)}(m) = \sum_{k\in\gamma_n} \alpha_k\, m_k^r,$$

*где $\gamma_n$ — произвольный набор из $n$ натуральных чисел,*

$$\mathcal{E}_n(m) = \mathcal{E}_n^{\alpha,r}(m) = S^{(r)}(m) - \sup_{\gamma_n} S_{\gamma_n}^{(r)}(m)$$

*и*

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^{\alpha,r} = \sup_{|m|\leq 1} \mathcal{E}_n^{\alpha,r}(m).$$

*Тогда для любого натурального $n$ существует число $l^* > n$ такое, что*

$$\mathcal{E}_n = (l^*-n) \left( \sum_{k=1}^{l^*} \alpha_k^{-1/r} \right)^{-r}.$$

*Число $l^*$ определяется равенством*

$$\sup_{l>n} (l-n) \left( \sum_{k=1}^{l} \alpha_k^{-1/r} \right)^{-r} = (l^*-n) \left( \sum_{k=1}^{l^*} \alpha_k^{-1/r} \right)^{-r}.$$

*При этом для последовательности $m' = \{m'_k\}_{k=1}^{\infty}$, у которой*

$$m'_k = \begin{cases} \alpha_k^{-1/r} \left( \sum\limits_{i=1}^{l^*} \alpha_i^{-1/r} \right)^{-r}, & k = 1, 2, \ldots, l^*, \\ 0, & k > l^*, \end{cases}$$

*выполняется равенство*

$$\mathcal{E}_n(m') = (l^* - n) \left( \sum_{i=1}^{l^*} \alpha_i^{-1/r} \right)^{-r}.$$

В случае, когда $q < p$, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.8.** *Пусть $p$ и $q$ — произвольные числа, причем $q > p$; $\psi, \mu$ и $\lambda$ — последовательности, для которых выполняется условие* (4.26). *Тогда при любом $n \in N$ выполняется равенство*

$$e_n^p(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda})_{p,\mu} = \overline{\sigma}_1^{\,-\frac{p}{q}} \left[ (s-n)^{\frac{q}{q-p}} + \overline{\sigma}_1^{\,\frac{q}{q-p}}\, \overline{\sigma}_2 \right]^{\frac{q-p}{q}},$$

*где*

$$\overline{\sigma}_1 = \overline{\sigma}_1(s) = \sum_{k=1}^{s} (\overline{\psi}'_k)^{-q}, \qquad \overline{\sigma}_2 = \overline{\sigma}_2(s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} (\overline{\psi}'_k)^{-pq/(q-p)},$$

$\overline{\psi}' = \{\overline{\psi}'_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— перестановка в убывающем порядке последовательности*

$$|\psi'_k| = |\psi_k \frac{\mu_k}{\lambda_k}|, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

*а число $s$ выбрано из условия*

$$(\overline{\psi}'_s)^{-q} \le \frac{1}{s-n} \sum_{k=1}^{s} (\overline{\psi}'_k)^{-q} < (\overline{\psi}'_{s+1})^{-q}.$$

*Такое число $s$ всегда существует и единственно.*

***Доказательство*** этой теоремы опирается на следующий аналог леммы 4.1, полученной в [16] (см. также [18]).

**Лемма 4.2.** *Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел $\alpha_k \ge 0$, $k \in N$, для которой при данном $r \in (0,1)$*

$$\sum_k \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} < \infty,$$

*и $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел $m_k \ge 0$, $n \in N$, удовлетворяющая условию*

$$|m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \le 1.$$

*Пусть, далее, $S^{(r)}(n_1)$, $S_{\gamma_n}^{(r)}(m)$, $\mathcal{E}_n(m)$ и $\mathcal{E}_n$ — величины, определенные в лемме* 4.1.

*Тогда для любого натурального $n$*

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n(\alpha; r) = \sigma_1^{-r}(s) \left[ (s-n)^{\frac{1}{1-r}} + \sigma_1^{\frac{1}{1-r}}\, \sigma_2(s) \right]^{1-r},$$

*где*

$$\sigma_1(s) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{-1/r}, \qquad \sigma_2(s) = \sum_{k=s+1}^{s} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}},$$

*число $s$ выбрано из условия*

$$a_s^{-1/r} \leq \frac{\sigma_1(s)}{s-n} \leq \alpha_{s+1}^{-1/r}, \quad s > n.$$

*Такое число $s$ всегда существует и единственно.*

*Верхняя грань в соотношении*

$$\mathcal{E}_n = \sup_{|m|\leq 1} \mathcal{E}_n(m)$$

*реализуется последовательностью $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, где*

$$m_k = \begin{cases} \left(\dfrac{t_s}{\alpha_k}\right)^{1/r}, & k = 1, 2, \ldots, s, \\ \\ \dfrac{1 - t_s^{1/r}\sigma_1(s)}{\sigma_2(s)}\, \alpha_k^{1/(1-r)}, & k > s, \end{cases}$$

$$t_s = \left(\sigma_1(s) + \left(\frac{\sigma_1(s)}{s-n}\right)^{1/(1-r)} \sigma_2(s)\right)^{-r}.$$

***4.9. Наилучшие $n$-членные приближения с ограничениями.*** Пусть $\Gamma_n$ — множество всех наборов $\gamma_n$ из $n$ натуральных чисел.

В таком случае величину $e_n(f)_{p,\mu}$, определяемую равенством (4.47), можно представить в виде

$$e_n(f)_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n \in \Gamma_n} E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu}.$$

Наряду с $e_n(f)_{p,\mu}$ можно рассматривать и величины

$$e_n(f; \Gamma'_n)_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n \in \Gamma_n{}'} E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu},$$

где $\Gamma_n{}'$ — некоторое собственное подмножество из $\Gamma_n$. В связи с этим величину $e_n(f)_{p,\mu}$ удобно назвать абсолютным наилучшим $n$-членным приближением, а величину $e_n(f; \Gamma'_n)_{p,\mu}$ — наилучшим $n$-членным приближением с ограничениями, имея в виду, что здесь термин „ограничение" относится к выбору подмножества $\Gamma'_n$.

В качестве $\Gamma'_n$ будем рассматривать два подмножества: $\Gamma_n^{(1)}$ и $\Gamma_n^{(2)}$. Через $\Gamma_n^{(1)}$ обозначается множество наборов

$$\gamma_n^{(1)} = \{i\,n+1,\ i\,n+2, \ldots, (i+1)n\}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

а через $\Gamma_n^{(2)}$ — множество наборов

$$\gamma_n^{(2)} = \{i+1,\ i+2, \ldots, i+n\}, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Ясно, что всегда

$$\Gamma_n^{(1)} \subset \Gamma_n^{(2)} \subset \Gamma_n,$$

и поэтому выполняются неравенства

$$e_n(f)_{p,\mu} \le e_n(f;\Gamma_n^{(2)})_{p,\mu} \le e_n(f;\Gamma_n^{(1)})_{p,\mu}.$$

Следовательно, если положить

$$e_n(\mathfrak{N};\Gamma'_n) = \sup_{f\in\mathfrak{N}} e_n(f;\Gamma'_n),$$

где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $S_\varphi^{p,\mu}$, то будут выполняться оценки

$$e_n(\mathfrak{N})_{p,\mu} \le e_n(\mathfrak{N};\Gamma_n^{(2)})_{p,\mu} \le e_n(\mathfrak{N};\Gamma_n^{(1)})_{p,\mu}.$$

Как и ранее, в качестве множеств $\mathfrak{N}$ будут использоваться множества $\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}$ $\psi$-интегралов всех элементов единичного шара $U_\varphi^{q,\lambda}$ в пространстве $S_\varphi^{q,\lambda}$.

Сначала рассмотрим случай, когда $p \ge q > 0$. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.9.** *Пусть $p$ и $q$ — действительные числа такие, что $p \ge q > 0$; $\psi, \mu$ и $\lambda$ — последовательности, для которых величины*

$$|\psi'_k| = \left|\frac{\psi_k\mu_k}{\lambda_k}\right|, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.49}$$

*не возрастая, стремятся к нулю. Тогда при любом $n \in N$ выполняются равенства*

$$e_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda};\Gamma^{(1)})_{p,\mu} = e_n(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda};\Gamma^{(2)})_{p,\mu} =$$

$$= (l^*-1)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{l^*} |\,\psi'_{(k-1)n+1}|^{-q}\right)^{-1/q},$$

*где $l^*$ — натуральное число, для которого*

$$\sup_{l>1}(l-1)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{l}|\psi'_{(k-1)n+1}|^{-q}\right)^{-1/q} = (l^*-1)\left(\sum_{k=1}^{l^*}|\psi'_{(k-1)n+1}|^{-q}\right)^{-1/q}.$$

*Такое число $l^*$ всегда существует.*

***Доказательство.*** Эта теорема в случае, когда $\mu_k \equiv \lambda_k \equiv 1$, $k \in N$, по существу доказана в [20]; в общем случае — в [51]. Ее доказательство получается фактически с помощью рассуждений из [20] и опирается на доказанное там следующее утверждение.

**Лемма 4.3.** *Пусть $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ — невозрастающая последовательность положительных чисел, для которой*

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k = 0, \tag{4.50}$$

*и $m = \{m_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность неотрицательных чисел такая, что*

$$|m| = \sum_{k=1}^\infty m_k \le 1. \tag{4.51}$$

(*В таком случае записываем $\alpha \in A$ и, соответственно, $m \in \mathcal{M}$.*)

*Пусть, далее, при каждом $n \in N$*

$$F_{n,r}(\alpha,m) = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k\, m_k^r - \sup_{\gamma_n\in\Gamma_n^{(1)}}\sum_{k\in\gamma_n}\alpha_k\, m_k^r, \quad \alpha\in A, \quad m\in\mathcal{M}, \quad r>0,$$

*и*

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \sup_{m\in\mathcal{M}} F_{n,r}(\alpha, m).$$

*Тогда при любом* $r \geq 1$ *и* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \sup_{q>1}(q-1)\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r}\right)^{-r}. \tag{4.52}$$

*Верхняя грань в правой части* (4.52) *всегда достигается при некотором значении* $q^*$. *При этом для последовательности* $m' = \{m'_k\}_{k=1}^{\infty}$ *из* $\mathcal{M}$,

$$m'_k = \begin{cases} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r}\left(\sum\limits_{j=1}^{q^*} \alpha_{(j-1)n+1}^{-1/r}\right)^{-1}, & k=(i-1)n+1,\ i=1,2,\ldots,q^*, \\ 0 & \text{при остальных значениях } k, \end{cases}$$

*выполняется равенство*

$$F_{n,r}(\alpha, m') = (q^*-1)\left(\sum_{i=1}^{q^*} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r}\right)^{-r}.$$

В случае, когда $q > p > 0$, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.10.** *Пусть p и q — действительные числа такие, что* $q > p > 0$; $\psi, \mu$ *и* $\lambda$ *— последовательности, для которых величины* (4.49), *не возрастая, стремятся к нулю и, кроме того, удовлетворяют условию* (4.26). *Тогда при любом* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$e_n^p(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(1)})_{p,\mu} = \widetilde{\sigma}_1^{-\frac{p}{q}}(s)\,\left[(s-1)^{\frac{q}{q-p}} + \widetilde{\sigma}_1^{\frac{p}{q-p}}(s)\,\widetilde{\sigma}_2(s)\right]^{\frac{q-p}{q}},$$

*в котором*

$$\widetilde{\sigma}_1(s) = \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=(k-1)n+1}^{kn} |\psi'_i|^{\frac{pq}{q}}\right)^{-\frac{q-p}{q}},$$

$$\widetilde{\sigma}_2(s) = \sum_{k=sn+1}^{\infty} |\psi'_k|^{\frac{pq}{q-p}}.$$

*Число s выбрано из условия*

$$\left(\sum_{k=(s-1)n+1}^{sn} |\psi'_k|^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{-\frac{q-p}{p}} \leq \frac{\widetilde{\sigma}_1(s)}{s-1} < \left(\sum_{k=sn+1}^{(s+1)n} |\psi'_k|^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{-\frac{q-p}{p}}.$$

*Такое число s всегда существует и единственно.*

Доказательство этой теоремы приведено в [51]. Оно опирается на следующий аналог леммы 4.3.

**Лемма 4.4.** *Пусть* $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— невозрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию* (4.50), *и, кроме того, при данном* $r \in (0,1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} < \infty,$$

*а* $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность неотрицательных чисел, для которой выполняется условие* (4.51). (*В таком случае записываем* $\alpha \in A_r$ *и, как и ранее,* $m \in \mathcal{M}$.)

*Пусть, далее, при каждом* $n \in N$

$$F_{n,r}(\alpha, m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, m_k^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(1)}} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k\, m_k^r,\ \alpha \in A_r,\ m \in \mathcal{M},\ r \in (0,1),$$

*и*

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \sup_{m \in \mathcal{M}} F_{n,r}(\alpha, m). \tag{4.53}$$

*Тогда при любых* $r \in (0,1)$ *и* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \overline{\sigma}_1^{\,-r}(s)\ [(s-1)^{\frac{1}{1-r}} + \overline{\sigma}_1^{\,\frac{r}{1-r}}(s)\, \overline{\sigma}_2(s)]^{1-r},$$

*где*

$$\overline{\sigma}_1(s) = \overline{\sigma}_1(\alpha; s) = \sum_{k=1}^{s} \left( \sum_{i=(k-1)n+1}^{k\,n} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}} \right)^{-\frac{1-r}{r}},$$

$$\overline{\sigma}_2(s) = \overline{\sigma}_2(\alpha; s) = \sum_{k=s\,n+1}^{\infty} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}};$$

*число* $s$ *выбрано из условия*

$$a_s^{-\frac{1}{r}} \le \frac{\overline{\sigma}_1(s)}{s-1} < a_{s+1}^{-\frac{1}{r}}, \quad a_j = \left( \sum_{i=(j-1)n+1}^{j\,n} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}} \right)^{1-r}, \quad j = 1, 2, \ldots;$$

*такое число* $s$ *всегда существует и единственно.*

*Верхняя грань в* (4.53) *реализуется последовательностью* $m^*$, *для которой*

$$m_k^* = \mu_i^*\, \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}\, a_i^{-\frac{1}{1-r}}, \qquad (i-1)n + 1 \le k \le i\,n, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

*где*

$$\mu_i^* = \begin{cases} \left(\dfrac{t_s}{a_i}\right)^{1/r}, & i = 1, 2, \ldots, s, \\ \dfrac{1 - t_s^{\frac{1}{r}}\, \overline{\sigma}_1(s)}{\overline{\sigma}_2(s)}\, a_i^{\frac{1}{1-r}}, & i > s, \\ t_s = \left( \overline{\sigma}_1(s) + \left( \dfrac{\overline{\sigma}_1(s)}{s-1} \right)^{\frac{1}{1-r}} \overline{\sigma}_2(s) \right)^{-r}. & \end{cases}$$

Результаты о величине $e_n\left(\psi\, U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(2)}\right)_{p,\mu}$ при $q > p > 0$ изложены в [51].

**5. Приближение индивидуальных элементов в пространствах $S_\Phi^p$.** В п. 4 рассматривались экстремальные задачи для различных аппроксимационных характеристик множеств $\psi\, U_\varphi^{p,\mu}$. В данном же пункте приводятся результаты для наилучших приближений индивидуальных элементов из пространств $S_\Phi^p$.

Пусть, как и в пп. 4.3,

$$E_n(f) = E_n(f)_{\psi,p,\mu} = \inf_{c_k} \left\| f - \sum_{k \in g_{n-1}^{\psi}} c_k \varphi_k \right\|_{p,\mu} \tag{5.1}$$

— наилучшее приближение элемента $f \in \psi S_{\varphi}^{p,\mu}$ полиномами, построенными по областям $g_{n-1}^{\psi}$. В случае, когда последовательность $\mu$ такова, что $\mu_k \equiv 1$, индекс $\mu$ во всех рассматриваемых объектах условимся опускать. В таких обозначениях в [16] доказаны следующие утверждения.

**Теорема 5.1.** *Пусть $f \in S_{\varphi}^p$, $p > 0$, и последовательность $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию* (4.6). *Тогда ряд*

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p) E_k^p(f)_{\psi,p}$$

*сходится и при любом $n \in N$ справедливо равенство*

$$E_n^p(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n^p E_n^p(f^{\psi})_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p) E_k^p(f^{\psi})_{\psi,p}, \tag{5.2}$$

*в котором величины $E_n(x)_{\psi,p}$ определяются равенством* (5.1), *а $\varepsilon_k$, $k = 1, 2, \ldots$, — элементы характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$.*

**Теорема 5.2.** *Пусть $f \in S_{\varphi}^p$, $p > 0$, и последовательность $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию* (4.6). *Пусть, далее,*

$$\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k^{-1} E_k(f)_{\psi,p} = 0.$$

*Тогда для того чтобы выполнялось включение*

$$f \in S_{\varphi}^p,$$

*необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p}) E_k^p(f)_{\psi,p}.$$

*Если этот ряд сходится, то при любом $n \in N$ выполняется равенство*

$$E_n^p(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n^{-p} E_n^p(f^{\psi})_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p}) E_k^p(f)_{\psi,p},$$

*в котором величины $E_n(x)_{\psi,p}$ и $\varepsilon_k$ имеют тот же смысл, что и в теореме* 5.1.

Теорема 5.1 устанавливает связь между наилучшим приближением элемента $f$ и наилучшими приближениями его производных. Подобные утверждения в теории приближений, как известно, принято называть прямыми теоремами. Теорема 5.2 в этом смысле является обратной: в ней по свойствам наилучшего приближения элемента $f$ указывается о наличии у него производных и дается информация о наилучшем приближении этих производных.

Величины $\varepsilon_n$ строго убывают, поэтому из (5.2) следует оценка

$$E_n^p(f)_{\psi,p} \le \varepsilon_n^p E_n^p(f^{\psi})_{\psi,p} \quad \forall f \in \psi S_{\varphi}^p \quad \forall n \in N. \tag{5.3}$$

Заметим, что в силу предложения 4.1 всегда

$$\lim_{n\to\infty} E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} = 0.$$

На важных подмножествах $\mathfrak{N}$ из $\psi\, S_\varphi^p$ соотношение (5.3) дает точный результат. Отметим один из таких случаев.

Возьмем в качестве $\mathfrak{N}$ множество $\psi\, U_\varphi^q$ при $0 < q < p$. Если $f \in \psi\, U_\varphi^q$, то $f^\psi \in \in U_\varphi^q$ и, тем более, $f^\psi \in U_\varphi^p$. Значит, $\|f^\psi\|_p \le 1$. Следовательно, и $E_n^p(f^\psi)_{\psi,p} \le 1$. Поэтому

$$E_n^p(f)_{\psi,p} \le \varepsilon_n^p \quad \forall\, f \in \psi\, U_\varphi^q, \quad 0 < q \le p. \tag{5.4}$$

С другой стороны, пусть $k'$ — любая точка из множества $g_n^\psi \setminus g_{n-1}^\psi$ и $f_* = \psi_{k'}\, \varphi_{k'}$ $(\psi_{k'}) \ne 0$. Поскольку $f_*^\psi = \varphi_{k'}$, при любом $q > 0$ $\|f_*^\psi\|_q = 1$. Следовательно, $f_* \in \psi\, U_\varphi^q$ при любом $q > 0$. Но ясно, что

$$E_n(f_*)_{\psi,p} = \|f_*\|_{\varphi,p} = \psi_{k'} = \varepsilon_n. \tag{5.5}$$

Таким образом, объединяя соотношения (5.4) и (5.5) и полагая

$$E_n(\psi\, U_\varphi^q)_{\psi,p} = \sup_{f\in\psi\, U_\varphi^q} E_n(f)_{\psi,p}, \qquad \mathcal{E}_n(\psi\, U_\varphi^q)_{\psi,p} = \sup_{f\in\psi\, U_\varphi^q} \mathcal{E}_n(f)_{\psi,p},$$

приходим к следующему утверждению.

**Теорема 5.3.** *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — система чисел, удовлетворяющая условиям* (4.6) *и* (4.14). *Тогда при любых $n \in N$ и $0 < q \le p < \infty$ справедливы равенства*

$$E_n(\psi\, U_\varphi^q)_{\psi,p} = \mathcal{E}_n(\psi\, U_\varphi^q)_{\psi,p} = \varepsilon_n,$$

*где $\varepsilon_n$ — $n$-й член характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$.*

Заметим, что это утверждение является частным случаем теоремы 4.1.

**6. Приложения полученных результатов к задачам приближения периодических функций многих переменных.** Рассмотрим одну из возможных конкретизаций пространств $S_\varphi^p = S_\varphi^p(\mathfrak{X})$, позволяющую из полученных в пп. 4 и 5 общих результатов получать утверждения о приближениях периодических функций.

Пусть $R^m$ — $m$-мерное, $m \ge 1$, евклидово пространство, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ — его элементы, $Z^m$ — целочисленная решетка в $R^m$ — множество векторов $k = = (k_1, \ldots, k_m)$ с целочисленными координатами, $x\,y = x_1\, y_1 + \ldots + x_m\, y_m$, $|x| = = \sqrt{(x\,x)}$ и, в частности, $k\,x = k_1\, x_1 + \ldots + k_m\, x_m$, $|k| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}$.

Пусть, далее, $L = L(R^m)$ — множество всех $2\pi$-периодических по каждой из переменных функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$, суммируемых на кубе периодов $Q^m$,

$$Q^m = \{x:\ x \in R^m,\ \ -\pi \le x_k \le \pi,\ \ k = 1, \ldots, m\}.$$

Если $f \in L$, то через $S[f]$ обозначается ряд Фурье функции $f$ по тригонометрической системе

$$(2\pi)^{-m/2}\, e^{ikx}, \quad k \in Z^m, \tag{6.1}$$

т. е.

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2} \sum_{k\in Z^m} \widehat{f}(k)\, e^{ikx}, \qquad \widehat{f}(k) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(t)\, e^{ikt} dt. \tag{6.2}$$

Если считать неразличимыми функции, эквивалентные относительно меры Лебега, то в качестве $\mathfrak{X}$ можно взять пространство $L(R^m)$, а в качестве системы $\varphi$ — тригонометрическую систему $\tau = \{\tau_s\}$, $s \in N$, где

$$\tau_s = (2\pi)^{-m/2}\, e^{ik_s\, x}, \qquad k_s \in Z^m, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

полученную из системы (1.6) путем произвольной фиксированной нумерации ее элементов; скалярное произведение в таком случае задается известным образом:

$$(f, \tau_s) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(t)\, e^{-ik_s\, t} dt = \widehat{f}(k_s) = \widehat{f}_\tau(k_s).$$

При фиксированном $p \in (0, \infty)$ согласно (1.6) положим

$$S^p_\tau = S^p_\tau\,(L(R^m)) = \left\{ f \in L(R^m)) : \sum_{s=1}^{\infty} |\widehat{f}(k_s)|^p \leq \infty \right\}. \tag{6.3}$$

„$\varphi$-Норма” в пространстве $S^p_\tau$ вводится согласно (1.7):

$$\| f \|_{p,\tau} = \left( \sum_{s=1}^{\infty} \left| \widehat{f}(k_s) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6.4}$$

В силу равенств (6.3) и (6.4) величины $\| \cdot \|_{p,\tau}$ и сами пространства $S^p_\tau$ не зависят от нумерации системы (6.1), и поэтому в дальнейшем полагаем $S^p_\tau = S^p$.

Пусть теперь $\psi = \{\psi(k)\}_{k \in Z^m}$ — произвольная система комплексных чисел — кратная последовательность. Для функций $f \in L$ наряду с (6.2) рассмотрим ряд

$$(2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in Z^m} \psi(k)\, \widehat{f}(k)\, e^{ikx}.$$

Если этот ряд для данной функции $f$ и системы $\psi$ является рядом Фурье некоторой функции $F$ из $L$, то $F$ назовем $\psi$-интегралом функции $f$ и будем писать $F(x) = \mathcal{J}^\psi(f; x)$. При этом иногда удобно функцию $f$ называть $\psi$-производной функции $F$ и писать $f(x) = D^\psi(F; x) = F^\psi(x)$. Множество $\psi$-интегралов всех функций $f \in L$ обозначается через $L^\psi$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $L$, то $L^\psi\, \mathfrak{N}$ будет обозначать множество $\psi$-интегралов всех функций из $\mathfrak{N}$. Ясно, что если $f \in L^\psi$, то коэффициенты Фурье функций $f$ и $f^\psi$ связаны соотношением

$$\widehat{f}(k) = \psi(k)\, \widehat{f}^{\,\psi}(k), \quad k \in Z^m.$$

Будем рассматривать в качестве $\mathfrak{N}$ единичный шар $U^p$ в пространстве $S^p$:

$$U^p = \{f : \ f \in S^p, \ \|f\|_p \leq 1\}.$$

В таком случае полагаем $L^\psi\, U^p = L^\psi_p = L^\psi_p(R^m)$. Относительно системы $\psi$ предполагается, что

$$\lim_{|k| \to \infty} \psi(k) = 0. \tag{6.5}$$

Заметим, что если $f \in L^\psi S^p$ и $|\psi(k)| \leq C, \ k \in Z^m, C > 0$, то $f \in S^p$, т. е. условие (6.5) всегда гарантирует включение $L^\psi_p \subset S^p$.

Определим характеристические последовательности $\varepsilon(\psi), g(\psi)$ и $\delta(\psi)$ следующим образом:

$\varepsilon(\psi) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — множество значений величин $|\psi(k)|$, $k \in Z^m$, упорядоченное по их убыванию; $g(\psi) = \{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$g_n = g_n^{\psi} = \{k \in Z^m : \ |\psi(k)| \geq \varepsilon_n\};$$

$\delta(\psi) = \{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\delta_n = \delta_n^{\psi} = |g_n|$ — количество чисел $k \in Z^m$, принадлежащих множеству $g_n$.

Ввиду условия (6.5) в рассматриваемом случае последовательности $\varepsilon(\psi)$ и $g(\psi)$ определяются, как и в пп. 4.3, с учетом того, что $k \in Z^m$. Как и ранее, считается, что $g_0 = g_0^{\psi}$ — пустое множество и $\delta_0 = \delta_0^{\psi} = 0$.

В качестве приближающих агрегатов для функций $f \in L^{\psi}$ рассмотрим тригонометрические полиномы — аналоги сумм (4.8):

$$S_n(f;x) = S_{g_n^{\psi}}(f;x) = (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in g_n^{\psi}} \widehat{f}(k)\, e^{ikx}, \tag{6.6}$$

$$n \in N, \quad S_0(f;x) = 0,$$

где $g_n^{\psi}$ — элементы последовательности $g(\psi)$.

Пусть $p$ и $q$ — произвольные числа, $p, q > 0$,

$$\mathcal{E}_n(f)_{\psi,p} = \|f(x) - S_{n-1}(f;x)\|_{S^p}\ , \tag{6.7}$$

$$\mathcal{E}_n(L_q^{\psi})_p = \sup_{f \in L_q^{\psi}} \mathcal{E}(f)_{\psi,p}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{6.8}$$

$$E_n(f)_{\psi,p} = \inf_{a_k} \|f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in g_{n-1}^{\psi}} a_k\, e^{ikx}\|_{S^p} \tag{6.9}$$

и

$$E_n(L_q^{\psi})_p = \sup_{f \in L_q^{\psi}} E_n(f)_{\psi,p}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{6.10}$$

Пусть, далее,

$$d_n(L_p^{\psi})_p = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in L_p^{\psi}} \inf_{u \in F_n} \|f - u\|_{S^p}, \quad n \in N, \qquad d_0(L_p^{\psi})_p \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in L_p^{\psi}} \|f\|_{S^p},$$

где $G_n$ — множество всех $n$-мерных подпространств в $S^p$, — поперечники по Колмогорову классов $L_p^{\psi}$ и

$$e_n(L_q^{\psi})_p = \sup_{f \in L_q^{\psi}} \inf_{a_k, \gamma_n} \|f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in \gamma_n} a_k\, e^{ikx}\|_{S^p},$$

где $\gamma_n$ — произвольный набор из $n$ векторов $k \in Z^m$, — величина наилучшего $n$-членного приближения класса $L_q^{\psi}$ в пространстве $S^p$.

В принятых обозначениях справедливы следующие утверждения — аналоги, а по существу частные случаи теорем, доказанных в пп. 4 и 5.

**Теорема 6.1.** *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k \in Z^m}$ — система чисел, удовлетворяющих условиям* (6.5) *и таких, что*

$$\psi(k) \neq 0 \quad \forall k \in Z^m. \tag{6.11}$$

*Тогда при любых $n \in N$ и $0 < q \le p < \infty$ справедливы равенства*

$$E_n(L_q^{\psi})_p = \mathcal{E}_n(L_q^{\psi})_p = \varepsilon_n, \tag{6.12}$$

$$e_n(L_q^{\psi})_p = \sup_{l>n}\,(l-n)\left(\sum_{k=1}^{l}\overline{\psi}_k^{\,-q}\right)^{-\frac{p}{q}} = (l^*-n)\left(\sum_{k=1}^{l^*}\overline{\psi}_k^{\,-q}\right)^{-\frac{p}{q}}, \tag{6.13}$$

*где $\overline{\psi} = \{\overline{\psi}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность, определяющаяся соотношениями*

$$\overline{\psi}_k = \varepsilon_n \quad \text{при} \quad k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

*$\varepsilon_n$ и $\delta_n$ — члены характеристических последовательностей системы $\psi$, а $l^*$ — натуральное число, которое в условиях теоремы всегда существует.*

Аналогами теорем 5.1 и 5.2 являются следующие утверждения.

**Теорема 6.2.** *Пусть $f \in L_p^{\psi}$, $p > 0$, и $\psi = \{\psi_k\}_{k\in Z^m}$ — система чисел, удовлетворяющая условиям* (6.5). *Тогда ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p)E_k^p(f^{\psi})_{\psi,p}$$

*сходится и при любых $n \in N$ справедливо равенство*

$$E_n^p(f)_{\psi,p} = \varepsilon_n^p\,E_n^p(f^{\psi})_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty}(\varepsilon_k^p - \varepsilon_{k-1}^p)E_k^p(f^{\psi})_{\psi,p},$$

*где величины $E_{\nu}(\cdot)_{\psi,p}$ определяются равенством* (6.9), *а $\varepsilon_k$ — элементы характеристической последовательности $\varepsilon(\psi)$ системы $\psi$.*

**Теорема 6.3.** *Пусть $f \in S^p$, $p > 0$, и система $\psi = \{\psi_k\}_{k\in Z^m}$ удовлетворяет условию* (6.9). *Пусть, далее,*

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k^{-1}\,E_k(f)_{\psi,p} = 0.$$

*Тогда для того чтобы выполнялось включение*

$$f \in L_p^{\psi},$$

*необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p})E_k^p(f)_{\psi,p}.$$

*Если этот ряд сходится, то при любом $n \in N$ справедливо равенство*

$$E_n^p(f^{\psi})_{\psi,p} = \varepsilon_n^{-p}\,E_n^p(f)_{\psi,p} + \sum_{k=n+1}^{\infty}(\varepsilon_k^{-p} - \varepsilon_{k-1}^{-p})E_k^p(f)_{\psi,p},$$

*в котором величины $E_n(\cdot)_{\psi,p}$ и $\varepsilon_k$ имеют тот же смысл, что и в теореме* 6.2.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k\in Z^m}$ — произвольная система чисел, удовлетворяющая условию (6.5). Перенумеруем все векторы $k \in Z^m$ в каком-нибудь порядке, используя натуральный индекс $s$. Будем говорить, что система $\psi$ принадлежит множеству $A_{p,q}$ при некоторых значениях $p$ и $q$, $q > p > 0$, если

$$\sum_{s=1}^{\infty}|\psi(k_s)|^{\frac{pq}{q-p}} < \infty. \tag{6.14}$$

Ясно, что множества $A_{p,q}$ не зависят от способа нумерации чисел $k \in Z^m$, а полностью определяются величинами $|\psi(k)|$ и числами $p$ и $q$.

**Теорема 6.4.** *Пусть система $\psi = \{\psi_k\}_{k \in Z^m}$ при данных $p$ и $q$, $q > p > 0$, принадлежит множеству $A_{p,q}$. Тогда*

$$E_n(L^\psi_q)_p = \mathcal{E}_n(L^\psi_q)_p = \left( \sum_{k=\delta_{n-1}+1}^{\infty} \overline{\psi}^{\,\frac{p\,q}{q-p}} \right)^{\frac{q-p}{p\,q}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

*и*

$$e^p_n(L^\psi_q)_p = \widetilde{\sigma}_1^{\,-\frac{p}{q}}(s) \Big[ (s-n)^{\frac{q}{q-p}} + \widetilde{\sigma}_1^{\frac{p}{q-p}}(s)\, \widetilde{\sigma}_2(s) \Big]^{\frac{q-p}{q}},$$

*где*

$$\widetilde{\sigma}_1(s) = \sum_{k=1}^{s} \overline{\psi}_k^{\,-q}, \qquad \widetilde{\sigma}_2(s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} \psi_k^{\frac{p\,q}{q-p}},$$

$\overline{\psi} = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ *— последовательность, для которой*

$$\overline{\psi}_k = \varepsilon_k \ \ \text{при } k \in (\delta_{n-1}, \delta_n], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

*$\varepsilon_n$ и $\delta_n$ — члены характеристических последовательностей $\varepsilon(\psi)$ и $\delta_\psi$; число $s$ в* (6.13) *выбрано из условия*

$$\overline{\psi}_s^{\,-q} \le \frac{1}{s-n} \sum_{k=1}^{s} \overline{\psi}_k^{\,-q} < \psi_{s+1}^{-q}. \tag{6.15}$$

*Такое число $s$ всегда существует и единственно.*

***Доказательства*** этих теорем основаны на соответствующих теоремах из предыдущих пунктов.

Отправляясь от заданных систем $\psi$, фигурирующих в этих утверждениях, перенумеруем все векторы $k \in Z^m$ так, чтобы числами $s$ при $s \in (\delta_{n-1}, \delta_n]$ были перенумерованы все векторы $k$ из множеств $g^\psi_n \setminus g^\psi_{n-1}$ в каком-нибудь фиксированном порядке. Затем определим последовательность $\psi' = \{\overline{\psi}_s\}_{s=1}^\infty$, положив

$$\psi'_s = \psi(k_s), \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{6.16}$$

Тогда

$$S[f] = (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in Z^m} \widehat{f}(k)\, e^{ikx} = (2\pi)^{-m/2} \sum_{s=1}^{\infty} \widehat{f}(k_s)\, e^{i\,k_s\,x},$$

и, согласно (6.16),

$$\mathcal{J}^{\psi'}(f; x) = (2\pi)^{-m/2} \sum_{s=1}^{\infty} \psi(k_s) \widehat{f}(k_s)\, e^{i\,k_s\,x} = \mathcal{J}(f; x) \ \ \forall f \in L.$$

Следовательно, $L^{\psi'} = L^\psi$. Заметим далее, что $L^{\psi'} = \psi' U^p$, где $\psi' U^p$ — множество, определяющееся согласно равенству $(4.7')$:

$$\psi' U^p = \{ f \in L : \ \ f^{\,\psi'} \in U^p \},$$

в котором $U^p = U^p_\varphi$ и $\varphi = \{2\pi^{-m/2} e^{i\,k_s\,x}\}_{s=1}^\infty$. Кроме того, последовательности $\mathcal{E}(\psi')$ и $\mathcal{E}^\psi$, а также $\delta(\psi')$ и $\delta(\psi)$ совпадают и справедливы равенства

$$S_{g_n^{\psi'}}(f) = S_{g_n^\psi}(f; x), \ \mathcal{E}_n(f)_{\psi', p} = \mathcal{E}_n(f)_{\psi, p}, \ \mathcal{E}_n(\psi' U^q)_p = \mathcal{E}_n(L^\psi_q)_p,$$

$$E_n(f)_{\psi',p} = E_n(f), \qquad E_n(\psi' U^q)_p = E_n(L_q^\psi)_p\,,$$

в которых левые части определяются равенствами (4.8), (4.9), а правые — соотношениями (6.6) – (6.10) соответственно. Ясно также, что $e_n(L_q^\psi)_p = e_n(\psi' U^q)$ и $\overline{\psi}' = \overline{\psi}$. Отсюда заключаем, что равенство (6.12) следует из (4.13); равенство (6.13), — из теоремы 4.7; теоремы 6.2 и 6.3 вытекают из теорем 5.1 и 5.2, теорема 6.4 следует из теорем 4.4 и 4.8.

Ради полноты изложения приведем здесь переформулировку утверждения теоремы 4.2 для колмогоровских поперечников множеств $L_p^\psi$.

**Теорема 6.5.** *Пусть* $\psi = \{\psi_k\}_{k\in Z^m}$ *— система чисел, удовлетворяющая условиям* (6.5) *и* (6.11) *и* $p \in [1,\infty)$. *Тогда при любом* $n \in N$

$$d_{\delta_{n-1}}(L_p^\psi; S^p) = d_{\delta_{n-1}+1}(L_p^\psi; S^p) = \ldots = d_{\delta_{n}-1}(L_p^\psi; S^p) = \mathcal{E}_n(L_p^\psi)_p = \varepsilon_n,$$

*где* $\varepsilon_n$ *и* $\delta_n$ *— члены характеристических последовательностей* $\varepsilon(\psi)$ *и* $\delta(\psi)$.

**7. Замечания.** *7.1.* ***О последовательностях*** $\boldsymbol{\Psi}$**.** Во всех предыдущих построениях центральное место отводится последовательностям $\psi$: они определяют приближаемые множества, по ним строится аппарат приближения и через них выражаются аппроксимационные характеристики. Кроме условий вида (6.9) и (6.21), без которых рассмотрения становятся почти бессодержательными, в настоящей работе на последовательности $\psi$ никаких ограничений не налагалось. Поэтому сами системы $\psi$, а с ними и их характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$, в общем случае могут быть достаточно сложными.

В многомерном случае, по-видимому, наиболее простыми и естественными являются системы $\psi$, у которых числа $\psi(k)$ представляются произведениями

$$\psi(k) = \psi(k_1,\ldots,k_m) = \prod_{j=1}^m \psi_j(k_j), \quad k_j \in Z^1, \quad j=\overline{1,m}, \tag{7.1}$$

значений одномерных последовательностей $\psi_j = \{\psi_j(k_j)\}_{k_j=1}^\infty$. Если, к тому же,

$$\psi(-k_j) = \overline{\psi_j(k_j)}, \quad j = \overline{1,m}$$

(через $\overline{z}$ обозначено число, комплексно-сопряженное к $z$), то множества $g_n^\psi$ будут симметричными относительно всех координатных плоскостей и, как нетрудно убедиться,

$$\sum_{k\in Z^m} \psi(k)\, e^{ikt} = \sum_{k\in Z_+^m} 2^{m-q(k)} \prod_{j=1}^m |\psi_j(k_j)| \cos\left(k_j t_j - \frac{\beta_{k_j}\pi}{2}\right), \tag{7.2}$$

где $Z_+^m = \{k\in Z^m,\ k_i \ge 0,\ i=\overline{1,m}\}$, $q(k)$ — количество координат вектора $k$, равных нулю, а числа $\beta_{k_j}$ определяются равенствами

$$\cos\frac{\beta_{k_j}\pi}{2} = \frac{Re\,\psi_j(k_j)}{|\psi_j(k_j)|}, \qquad \sin\frac{\beta_{k_j}\pi}{2} = \frac{Im\,\psi_j(k_j)}{|\psi_j(k_j)|}.$$

В этом случае множество $L^\psi$ $\psi$-интегралов действительных функций $\varphi$ из $L(R^m)$ состоит из действительных функций $f$, и если при этом ряд в (7.2) является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $\mathcal{D}_\psi(t)$, то необходимым и достаточным условием включения $f \in L^\psi\mathfrak{N}$ является возможность представления $f$ сверткой вида

$$f(x) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{Q^m} \varphi(x-t)\,\mathcal{D}_\psi(t)dt,$$

в которой $\varphi \in \mathfrak{N}$ и почти всюду $\varphi(x) = f^\psi(x)$. Это, в частности, означает, что классы $L^\psi\mathfrak{N}$ охватывает классы функций, представимых свертками с фиксированными суммируемыми ядрами (см., например, [52], § 1.9).

***7.2. О связи между пространствами $S^p$ и $L_p$.*** Пусть $L_p = L_p(R^m)$, $p \in \in [1,\infty)$, — пространство функций $f \in L$ с конечной нормой $\|\cdot\|_{L_p}$,

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_{Q^m} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}. \tag{7.3}$$

Связь между множествами $L_p$ и $S^p$ устанавливает известная теорема Хаусдорфа–Юнга (см., например, [53], п. XII.2), утверждающая, что:

I. Если $f \in L_p$, $p \in (1,2]$, и $\widehat{f}(k)$ — коэффициенты Фурье функции $f$, определяемые формулой

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{Q^m} f(t)\,e^{-ikt}dt,$$

то

$$\left(\sum_{k\in Z^m} |\widehat{f}(k)|^{p'}\right)^{1/p'} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\,\|f\|_{L_p}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

II. Пусть $\{c_k\}_{k\in Z^m}$ — последовательность комплексных чисел, для которой

$$\sum_{k\in Z^m} |c_k|^p < \infty, \quad p\in(1,2].$$

Тогда существует функция $f \in L_{p'}$, для которой $\widehat{f}(k) = c_k$, и

$$\|f\|_{L_{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \left(\sum_{k\in Z^m} |c_k|^p\right)^{1/p}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Из этой теоремы следует, что если $p\in(1,2]$, то

$$L_p \subset S^{p'} \quad \text{и} \quad \|f\|_{S^{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\,\|f\|_{L_p}, \tag{7.4}$$

$$S^p \subset L_{p'} \quad \text{и} \quad \|f\|_{L_{p'}} \le (2\pi)^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\,\|f\|_{S^p}. \tag{7.5}$$

В частности, при $p = p' = 2$ справедливы равенства

$$L_2 = S^2 \quad \text{и} \quad \|\cdot\|_{L_2} = \|\cdot\|_{S^2}. \tag{7.6}$$

В силу соотношений (7.4) и (7.5) теоремы, доказанные для пространств $S^p$, содержат информацию и для пространств $L_p$, которая является более полной вследствие (7.6) в случае, когда $p=2$.

Ввиду особой важности этого случая приведем точные формулировки соответствующих утверждений.

Пусть, как и ранее, $\psi = \{\psi_k\}_{k\in Z^m}$ — произвольная система комплексных чисел и $L^\psi\mathfrak{N}$ — множество $\psi$-интегралов всех функций $f\in\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $L = L(R^m)$, $m \geq 1$. Возьмем в качестве $\mathfrak{N}$ единичный шар $U_{L_2}$ в пространстве $L_2$:

$$U_{L_2} = \{f : f \in L_2, \ \|f\|_{L_2} \leq 1\}. \tag{7.7}$$

Здесь норма $\|\cdot\|_{L_2}$ определяется равенством (7.3) при $p = 2$. В таком случае положим $L^\psi U_{L_2} = U^\psi_{L_2}$.

Считая выполненным условие (6.5), определим характеристические последовательности $\varepsilon(\psi)$, $g(\psi)$ и $\delta(\psi)$, а также полиномы $S_n(f;x)$ согласно формулам (6.6) и для $f \in U^\psi_{L_2}$ положим

$$\mathcal{E}^\psi_n(f)_{L_2} = \|f(x) - S_{n-1}(f;x)\|_{L_2}, \quad \mathcal{E}_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \sup_{f \in U^\psi_{L_2}} = \mathcal{E}^\psi_n(f)_{L_2},$$

$$E^\psi_n(f)_{L_2} = \inf_{a_k} \left\| f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in g^\psi_{n-1}} a_k\, e^{ikx} \right\|_{L_2}$$

и

$$E_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \sup_{f \in U^\psi_{L_2}} E^\psi_n(f)_{L_2}.$$

Пусть еще

$$d_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \inf_{F_n \in G_n} \sup_{f \in L^\psi_p} \inf_{u \in F_n} \|f - u\|_{L_2}, \quad n \in N, \qquad d_0(U^\psi_{L_2}) = \sup_{f \in U^\psi_{L_2}} \|f\|_{L_2},$$

где $G_n$ — множество всех $n$-мерных подпространств в $L_2$, и

$$e_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \sup_{f \in U^\psi_{L_2}} \inf_{a_k, \gamma_n} \left\| f(x) - (2\pi)^{-m/2} \sum_{k \in \gamma_n} a_k\, e^{ikx} \right\|_{L_2},$$

где $\gamma_n$ — произвольный набор из $n$ векторов $k \in Z^m$, — величина наилучшего $n$-членного приближения класса $U^\psi_{L_2}$ в пространстве $L_2$. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 7.1.** *Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k \in Z^m}$ — система чисел, удовлетворяющая условиям* (6.3) *и* (6.9). *Тогда при любых $n \in N$ выполняются равенства*

$$E_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \mathcal{E}_n(U^\psi_{L_2}) = \varepsilon_n, \tag{7.8}$$

$$d_{\delta_{n-1}}(U^\psi_{L_2})_{L_2} = d_{\delta_{n-1}+1}(U^\psi_{L_2}) = \ldots = d_{\delta_n - 1}(U^\psi_{L_2})_{L_2} = E_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \varepsilon_n, \tag{7.9}$$

$$e^2_n(U^\psi_{L_2})_{L_2} = \sup_{l > n} (q - n) / \sum_{s=1}^{l} \overline{\psi}_s^{\,-2} = (l^* - n) / \sum_{s=1}^{l^*} \overline{\psi}_s^{\,-2}. \tag{7.10}$$

*В этих равенствах $\varepsilon_s$ и $\delta_s$ — элементы характеристических последовательностей $\varepsilon(\psi)$ и $\delta(\psi)$, $\delta_0 = 0$, $l^*$ — некоторое натуральное число и*

$$\overline{\psi}_s = \varepsilon_n, \quad \delta_{n-1} < s < \delta_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

***Доказательство.*** В силу (7.6) и (7.7) видим, что $U_{L_2} = U^2$ и, следовательно, $U^{\psi}_{L_2} = L^{\psi}_2$. Поэтому справедливы равенства

$$\mathcal{E}_n(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} = \mathcal{E}_n(L^{\psi}_2)_2, \quad E_n(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} = E_n(L^{\psi}_2)_2, \quad d_n(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} = d_n(L^{\psi}_2)_2$$

и

$$e_n(U^{\psi}_{L_2})_{L_2} = e_n(L^{\psi}_2)_2, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда заключаем, что равенства (7.7) – (7.10) следуют из соотношений (6.12), (6.15) и (6.13).

Отметим, что равенства (7.8) и (7.9) в одномерном случае, т. е. при $m = 1$, в несколько другой терминологии были получены в 1936 г. в известной работе А. Н. Колмогорова [54], положившей начало исследованию поперечников различных функциональных классов. В общем случае эти равенства можно получить и путем анализа результатов и рассуждений $\S$ 4.4 книги В. М. Тихомирова [55].

Равенство (7.10), по-видимому, является новым даже в одномерном случае.

Отметим также, что, как следует из равенств (7.8) и (7.9), в пространстве $L_2$ значения поперечников множеств $U^{\psi}_{L_2}$ реализуют приближения суммами (6.6), т. е. полиномами, которые являются наилучшими в смысле поперечников в пространствах $S^p$ при всех $p \in [1, \infty)$ для классов $L^{\psi}_p$. Это позволяет предположить, что именно суммы (6.6) будут наилучшим аппаратом приближения (в смысле колмогоровских поперечников) и в пространствах $L_p$ при всех $p \geq 1$ для соответствующих множеств $U^{\psi}_{L_p}$,

$$U^{\psi}_{L_p} = L^{\psi} U_{L_p}, \qquad U_{L_p} = \{f : \ f \in L_p, \ \|f\|_{L_p} \leq 1\},$$

являющихся прямым обобщением известных пространств Соболева, которые получаются из $U^{\psi}_{L_p}$, если взять $\psi(k)$ в виде (7.1) в случае, когда

$$\psi_j(k_j) = \begin{cases} 1, & k_j = 0, \\ (ik_j)^{r_j}, & k_j \neq 0, \quad j = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{7.11}$$

где $r_j$ — некоторые действительные числа.

Пусть $m = 2$ и последовательности $\psi_1(k_1)$ и $\psi_2(k_2)$ заданы равенствами (7.11) при условии $r_1 = r_2 = r > 0$.

Классы $U^{\psi}_{L_2}$, определяющиеся такими последовательностями, с точки зрения нахождения их поперечников впервые рассматривал К. И. Бабенко в [1, 2], который в этом случае фактически получил и соотношение (7.9).

В данном случае характеристическая последовательность $\varepsilon(\psi)$ состоит из элементов $\varepsilon_n = n^{-r}$, $n \in N$, множества $g^{\psi}_n$ — множества векторов $k = (k_1, k_2) \in Z^2$, удовлетворяющих условию

$$k'_1 k'_2 \leq n,$$

где

$$k'_j = \begin{cases} 1, & k_j = 0, \\ |k_j|, & k_j \neq 0, \quad j = 1, 2. \end{cases}$$

Такие множества впервые появились в упомянутых работах К. И. Бабенко, и сейчас их принято называть гиперболическими крестами.

Все эти комментарии приводились автором в [15]. Там же имеются и более детальные результаты для периодического случая вплоть до конкретных численных примеров.

Основное содержание этой статьи анонсировано автором в препринте [56].


1. *Бабенко К. И.* О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами // Докл. АН СССР. – 1960. — **132**, № 2. — С. 247 – 250.
2. *Бабенко К. И.* О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами // Там же. – 1960. – **132**, № 5. – С. 982 – 985.
3. *Теляковский С. А.* Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных // Сиб. мат. журн. – 1963. – **4**, № 6. – С. 1404 – 1411.
4. *Теляковский С. А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. – 1964. – **63 (105)**. – С. 426 – 444.
5. *Бугров Я. С.* Приближение класса функций с доминирующей смешанной производной // Там же. – **64 (106)**. – С. 410 – 418.
6. *Никольская Н. С.* Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике $L_p$ // Докл. АН СССР. – 1973. – **208**, № 5. – С. 1283 – 1285.
7. *Никольская Н. С.* Приближение периодических функций класса $SH^r_{p^*}$ суммами Фурье // Сиб. мат. журн. – 1975. – **16**, № 4. – С. 761 – 780.
8. *Галеев Э. М.* Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике $L_p$ // Успехи мат. наук. – 1977. – **32**, № 4. – С. 251 – 252.
9. *Галеев Э. М.* Приближение сумами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 2. – С. 197 – 212.
10. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – С. 1 – 112.
11. *Задерей П. В.* Приближение $(\overline{\psi},\overline{\beta})$-дифференцируемых периодических функций многих переменных // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 3. – С. 367 – 377.
12. *Романюк А. С.* О приближении классов периодических функций многих переменных // Там же. – 1992. – **44**, № 5. – С. 662 – 672.
13. *Романюк А. С.* Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве $L_q$ // Там же. – 1991. – **43**, № 10. – С. 1398 – 1408.
14. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств $S^p_\varphi$. – Киев, 2001. – 85 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2001.2).
15. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств $S^p_\varphi$ // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392 – 416.
16. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств $S^p_\varphi$ в разных метриках // Там же. – № 8. – С. 1121 – 1146.
17. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы теории приближений функций в пространстве $S^p$ // Там же. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106 – 124.
18. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Тр. Ин-та математики НАН Украины. – 2002. – **40**, Ч. II. – 468 с.
19. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств $S^p$ // Теорія наближень та гармонійний аналіз: Пр. Укр. мат. конгресу-2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – С. 208 – 226.
20. *Степанец А. И., Рукасов В. И.* Пространства $S^p$ с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 264 – 277.
21. *Степанец А. И., Рукасов В. И.* Наилучшие „сплошные" $n$-членные приближения в пространствах $S^p_\varphi$ // Там же. – № 5. – С. 663 – 670.
22. *Степанец А. И., Шидлич А. Л.* Наилучшие $n$-членные приближения $\Lambda$-методами в пространствах $S^p_\varphi$ // Там же. – № 8. – С. 1107 – 1126.
23. *Степанец А. И.* Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах // Там же. – № 10. – С. 1392 – 1423.
24. *Степанец А. И.* Наилучшие приближения $q$-эллипсоидов в пространствах $S^{p,\mu}_\varphi$ // Там же. – 2004. – **56**, № 10. – С. 1378 – 1383.
25. *Сердюк А. С.* Поперечники в просторі $S^p$ класів функцій, що означаються модулями неперервності їх $\psi$-похідних // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 229 – 248.
26. *Войцеховський В. Р.* Поперечники деяких класів з простору $S^p$ // Там же. – С. 17 – 26.

27. *Вакарчук С. Б.* Неравенство типа Джексона и точные значения поперечников классов функций в пространствах $S^p$, $1 \le p < \infty$ // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 5. – С. 595 – 605.
28. *Вакарчук С. Б.* О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации в пространствах $S^p$ $(1 \le p < \infty)$ // Воронеж. зим. мат. школа „Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 26 янв. – 2 февр. 2003 г.). – Воронеж: Воронеж. ун-т, 2003. – С. 47 – 48.
29. *Войцеховський В. Р.* Нерівності типу Джексона при наближенні функцій з простору $S^p$ сумами Зигмунда // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **35**. – С. 33 – 46.
30. *Шидліч А. Л.* Насичення лінійних методів підсумовування рядів Фур'є в просторах $S^p_\varphi$ // Там же. – С. 215 – 232.
31. *Шидліч А. Л.* Найкращі $n$-членні наближення $\Lambda$-методами в просторах $S^p_\varphi$ // Там же. – 2003. – **46**. – С. 283 – 306.
32. *Рукасов В. И.* Наилучшие $n$-членные приближения в пространствах с несимметричной метриках // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 806 – 816.
33. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.
34. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
35. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
36. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
37. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37 – 40.
38. *Осколков К. И.* Аппроксимационные свойства суммируемых функций на множествах полной меры // Мат. сб. – 1977. – **103**, № 4. – С. 563 – 589.
39. *Майоров В. Е.* О линейных поперечниках соболевских классов // Докл. АН СССР. – 1978. – **243**, № 5. – С. 1127 – 1130.
40. *Macovoz G. Y.* On trigonometric $n$-widths and their generalization // J. Approxim. Theory. – 1984. – **41**, № 4. – P. 361 – 366.
41. *Кашин Б. С.* Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1985. – **172**. – С. 187 – 191.
42. *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций многих переменных ..плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Докл. АН СССР. – 1985. – **284**, № 6. – С. 1294 – 1297.
43. *Кашин Б. С., Темляков В. Н.*. О наилучших $m$-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве $L$ // Мат. заметки. – 1994. – **56**, № 5. – С. 57 – 86.
44. *Темляков В. Н.* Нелинейные поперечники по Колмогорову // Мат. заметки. – 1998. – **63**, № 6. – С. 891 – 902.
45. *Temlyakov V. N.* Greedy algorithm and $m$-term trigonometric approximation // Constr. Approxim. – 1998. – **14**. – P. 569 – 587.
46. *Dinh Dung.* Continuons algorithms in $n$-term approximation and non-linear-widths // J. Approxim. Theory. – 2000. – **102**. – P. 217 – 242.
47. *Романюк А. С.* Наилучшие $M$-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 2. – С. 61 – 100.
48. *De Vore R. A., Temlyakov V. N.* Nonlinear approximation in finite-dimensional spaces // J. Complexity. – 1997. – **13**. – P. 489 – 508.
49. *De Vore R. A.* Nonlinear approximation // Acta Numerica. – 1998. – P. 51 – 150.
50. *Temlyakov V. N.* Nonlinear methods of approximation // Found. Comput. Math. – 2003. – **3**. – P. 33 – 107.
51. *Степанец А. И.* Наилучшие $n$-членные приближения с ограничениями // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 533 – 553.
52. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Тр. Ин-та математики НАН Украины. – 2002. – **40**, ч. I. – 426 с.
53. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 ч. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 537 с.
54. *Kolmogorov A. N.* Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklass // Ann. Math. – 1936. – **37**, № 1. – S. 107 – 110.
55. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 307 с.
56. *Степанец А. И.* Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах. – Киев, 2005. – 82 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2005.1).

Получено 04.10.2005