УДК 517.5

О. В. Федуник (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЛІНІЙНІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ У ПРОСТОРІ L_q

We obtain exact order estimates of linear widths of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic multivariable functions in the space L_q for some values of the parameters p and q.

Одержано точні за порядком оцінки лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q для деяких значень параметрів p та q.

1. Позначення і допоміжні твердження. Нехай $\mathbb{R}^d$ — евклідів простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ і $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[0; 2\pi]$. Позначимо через $L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, простір 2π-періодичних по кожній змінній функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі скінченною нормою, яка визначається таким чином:

$$\|f\|_{L_p(\pi_d)} = \|f\|_p = \left((2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

і

$$\|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)|.$$

Далі будемо вважати, що для функцій $f \in L_p(\pi_d)$ виконується додаткова умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d}.$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо через

$$S[f] = \sum_k \hat{f}(k) e^{i(k,x)}$$

її ряд Фур'є, де $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d}\int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є, $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, d}$, і $(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_d x_d$.

Кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність множину

$$\rho(s) = \left\{k : 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d}\right\}$$

і для $f(x)$ позначимо

$$\delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}.$$

Тоді ряд Фур'є функції f можна записати у вигляді

$$S[f] = \sum_s \delta_s(f, x).$$

За допомогою рівності

$$\Delta^l_{h_j} f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \ldots, x_d)$$

означимо l-ту різницю функції $f(x)$ з кроком h_j за змінною x_j.

Для $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ і $h = (h_1, \ldots, h_d)$ введемо мішану l-ту різницю

$$\Delta^l_h f(x) = \Delta^l_{h_d} \ldots \Delta^l_{h_1} f(x) = \Delta^l_{h_d}(\ldots(\Delta^l_{h_1} f(x))).$$

Означимо для $f \in L_p(\pi_d)$ мішаний модуль неперервності порядку l

$$\Omega^l(f, t)_p = \sup_{|h_j| < t_j,\, j = \overline{1,d}} \left\| \Delta^l_h f(\cdot) \right\|_p .$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$; $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^d t_j > 0$;

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \le \left(\prod_{j=1}^d m_j\right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$.

Будемо вважати, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S), (S_l), які називають умовами Барі – Стєчкіна [1]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \le C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Функція $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, тобто існує така не залежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що

$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \ge C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \quad 0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1.$$

Будемо говорити, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) і (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови по кожній змінній t_j при фіксованих t_i, $i \ne j$.

Зазначимо, що функції, які задовольняють умови 1 – 4, (S) та (S_l), можуть мати вигляд

$$\Omega(t) = t_1^{r_1} \ldots t_d^{r_d} \left(\log \frac{1}{t_1}\right)^{m_1} \ldots \left(\log \frac{1}{t_d}\right)^{m_d},$$

де $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$, а m_j, $j = \overline{1,d}$, — фіксовані дійсні числа.

Означимо деякі порядкові співвідношення, які будемо використовувати далі.

Функції $\mu(n)$ і $\nu(n)$ будемо називати функціями однакового порядку і писати $\mu(n) \asymp \nu(n)$, якщо для будь-якого натурального n виконується нерівність $C_3 \mu(n) \le \nu(n) \le C_4 \mu(n)$, де сталі C_3, $C_4 > 0$ можуть залежати тільки від параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій вимірюється похибка наближення, та розмірності d простору $\mathbb{R}^d$. Якщо ж $\mu(n) \le$ $\le C_5 \nu(n)$ або $\mu(n) \ge C_6 \nu(n)$, то позначимо відповідно $\mu(n) << \nu(n)$ і $\mu(n) >> \nu(n)$.

В подальшому отримані результати будуть містити порядкове співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$, M, $n \in \mathbb{N}$, яке розуміється таким чином, що існують сталі $0 <$ $< C_7 < C_8$, такі, що виконуються нерівності

$$C_7 2^n n^{d-1} \le M \le C_8 2^n n^{d-1}.$$

Для $1 \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і заданої функції типу мішаного модуля неперервності $\Omega(t)$, яка задовольняє умови 1 – 4, (S) і (S_l), клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ визначається таким чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \left\{ f \in L_p(\pi_d) \colon \| f \|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\},$$

$$\| f \|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left\{ \int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega^l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\| f \|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega^l(f,t)_p}{\Omega(t)}.$$

У роботі [2] для $1 < p < \infty$ доведено, що

$$\| f \|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_{s} \| \delta_s(f,\cdot) \|_p^{\theta} \, \Omega(2^{-s})^{-\theta} \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1}$$

$$\| f \|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_{s} \frac{\| \delta_s(f,\cdot) \|_p}{\Omega(2^{-s})}, \tag{2}$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Зазначимо, що класи функцій $B^{\Omega}_{p,\theta}$ були розглянуті в роботі [2]. У випадку $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$ з (1), (2) випливають зображення

$$\| f \|_{B^{r}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_{s} 2^{(r,s)\theta} \| \delta_s(f,\cdot) \|_p^{\theta} \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\| f \|_{B^{r}_{p,\infty}} \asymp \sup_{s} 2^{(r,s)} \| \delta_s(f,\cdot) \|_p,$$

які були встановлені в [3]. При $\theta = \infty$ клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігається з уведеним в [4] класом H^{Ω}_{p}.

У даній роботі будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального вигляду

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j \right), \tag{3}$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S) і (S_l). Легко переконатися, що для $\Omega(t)$ вигляду (3) виконуються властивості 1 – 4 функції типу мішаного модуля неперервності порядку l, а також умови (S) і (S_l). Тому при такій функції типу мішаного модуля неперервності $\Omega(t)$, за якою визначається клас $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, зберігаються зображення (1), (2) для норм функцій цього класу.

Метою роботи є встановлення точних за порядком оцінок лінійних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі $L_q(\pi_d)$ для деяких значень параметрів p та q. Зазначимо, що поняття лінійного поперечника було введено В. М. Тихомировим [5]. Сформулюємо тепер це означення.

Нехай W — множина в банаховому просторі X. Тоді лінійний поперечник множини W у просторі X (позначається $\lambda_M(W, X)$) визначається за формулою

$$\lambda_M(W, X) = \inf_A \sup_{f \in W} \| f - Af \|_X, \tag{4}$$

де нижня межа береться по всіх діючих в X лінійних операторах A, розмірність області значень яких не перевищує M.

Колмогоровським поперечником центрально-симетричної множини W у просторі X (позначається $d_M(W, X)$) називається величина

$$d_M(W, X) = \inf_{L_M} \sup_{f \in W} \inf_{h \in L_M} \| f - h \|_X,$$

де L_M — підпростір в X, розмірність якого не перевищує M.

Нагадаємо, що лінійний поперечник $\lambda_M(W, X)$ пов'язаний із поперечником Колмогорова $d_M(W, X)$ нерівністю

$$d_M(W, X) \le \lambda_M(W, X). \tag{5}$$

У зв'язку з цим цікаво з'ясувати, в яких випадках (для конкретних множин W і просторів X) поперечники $d_M(W, X)$ і $\lambda_M(W, X)$ рівні за порядком, а в яких випадках має місце порядкова нерівність

$$d_M(W, X) << \lambda_M(W, X).$$

На даний час є велика кількість робіт, в яких досліджувались лінійні поперечники тих чи інших класів функцій, або скінченновимірних множин [6, 7]. Тут згадаємо лише роботи [8 – 10], в яких вивчались величини (4) для класів функцій багатьох змінних W^r_p, H^r_p і $B^r_{p,\theta}$, а також відомі книги [11 – 13], в яких наведено досить детальну бібліографію.

При викладі результатів нам будуть необхідні деякі відомі твердження.

Нехай l^m_p позначає простір $\mathbb{R}^m$, в якому введено норму

$$\| x \|_{l^m_p} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1 \le i \le m} |x_i|, & p = \infty, \end{cases}$$

і B^m_p — одинична куля в l^m_p.

Має місце наступна теорема.

Теорема А [6]. *Нехай* $M < m$, $1 \le p < 2 \le q < \infty$, $1/p + 1/q \ge 1$. *Тоді*

$$\lambda_M(B^m_p, l^m_q) \asymp \max\left\{ m^{1/q - 1/p}, \min\left\{1, m^{1/q} M^{-1/2}\right\} \sqrt{1 - \frac{M}{m}} \right\}.$$

Зауважимо, що у випадку $p = 1$, $q > 2$ відповідний результат випливає з твердження, встановленого Б. С. Кашиним [7].

Нехай $s \in \mathbb{N}^d$ і $\mathcal{T}(\rho(s))$ — множина функцій вигляду

$$f(x) = \sum_{k \in \rho(s)} c_k e^{i(k,x)}.$$

Теорема Б [14]. *Між простором тригонометричних поліномів $\mathcal{T}(\rho(s))$ і простором $\mathbb{R}^{2^{(s,1)}}$ існує ізоморфізм, який ставить у відповідність функції $f(\cdot)$ вектор $\delta_s f^j = \{f_n(\tau_j)\} \in \mathbb{R}^{2(s,1)}$,*

$$f_n(t) = \sum_{\operatorname{sgn} k_l = \operatorname{sgn} n_l} c_k e^{i(k,t)}, \quad l = \overline{1,d}, \quad n = (\pm 1, \ldots, \pm 1) \in \mathbb{R}^d,$$

$$\tau_j = (\pi 2^{2-s_1} j_1, \ldots, \pi 2^{2-s_d} j_d), \quad j_i = 1, 2, \ldots, 2^{s_i - 1}, \quad i = \overline{1,d},$$

і при цьому мають місце співвідношення

$$\|\delta_s(f,x)\|_p \asymp \left(2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left|\delta_s f^j\right|^p \right)^{1/p}, \quad p \in (1,\infty).$$

Для функцій однієї змінної відповідну теорему наведено в [15, c. 46] (т. 2).

Теорема В (Літтлвуда – Пелі, див., наприклад, [16, c. 65]). *Нехай $p \in (1, \infty)$. Тоді існують додатні числа C_9, C_{10} такі, що для кожної функції $f(x) \in$ $\in L_p(\pi_d)$ виконується співвідношення*

$$C_9 \|f\|_p \leq \left\| \left(\sum_s |\delta_s(f,\cdot)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C_{10} \|f\|_p.$$

Теорема В є узагальненням на багатовимірний випадок відомої теореми Літтлвуда – Пелі (див. [15], т. 2, гл. 15).

Лема 1 [8]. *Нехай $s \in \mathbb{N}^d$ і $f(\cdot) \in \mathcal{T}(\rho(s))$, $M_s \in \mathbb{Z}_+$, $M_s \leq 2^{(s,1)}$. Якщо $1 <$ $< p,\ q < \infty$, то існує лінійний оператор $\Lambda_{M_s} : \mathcal{T}(\rho(s)) \to \mathcal{T}(\rho(s))$, розмірність області значень якого не перевищує M_s, такий, що*

$$\left\| f(\cdot) - \Lambda_{M_s} f(\cdot) \right\|_q \asymp \lambda_{M_s}(B_p^{2^{(s,1)}}, l_q^{2^{(s,1)}}) 2^{(s,1)(1/p - 1/q)} \|f(\cdot)\|_p. \tag{6}$$

Лема 2 [17, c. 25]. *Нехай $1 \leq p < q < \infty$ і $f \in L_p(\pi_d)$. Тоді має місце співвідношення*

$$\|f\|_q^q << \sum_s \left(\|\delta_s(f,\cdot)\|_p 2^{(s,1)(1/p - 1/q)} \right)^q. \tag{7}$$

Лема 3 [6]. *Нехай $M < n$. Тоді при $1 \leq p < 2 \leq q < \infty$ виконується*

$$d_M(B_p^n, l_q^n) \asymp \max\left\{ n^{1/q - 1/p}, \min\left\{1, n^{1/q} M^{-1/2}\right\} \sqrt{1 - \frac{M}{n}} \right\}. \tag{8}$$

Лема 4 (див., наприклад, [17, c. 16]). *Нехай $T_{n_1,\ldots,n_d}$ — тригонометричний поліном степеня n_j за змінною x_j, $j = \overline{1,d}$. Тоді при $1 \leq q < p \leq \infty$ має місце нерівність*

$$\left\| T_{n_1,\ldots,n_d} \right\|_p \leq 2^d \left(\prod_{j=1}^d n_j \right)^{1/q - 1/p} \left\| T_{n_1,\ldots,n_d} \right\|_q. \tag{9}$$

Співвідношення (9) відоме під назвою „нерівність Нікольського різних метрик".

2. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай* $1 < p \le 2$, $p' < q < \infty$, $2 \le \theta \le q$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \dots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 1 - 1/q$ *та умову* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *та* n *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1/2-1/q)}, \tag{10}$$

де $1/p + 1/p' = 1$.

Доведення. Встановимо спочатку в (10) оцінку зверху. Нехай $f(x)$ — довільна функція з класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ і задано достатньо велике число M. Підберемо n із співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність числа

$$M_s = \begin{cases} 2^{(s,1)}, & (s,1) \le n, \\ [2^{n+\nu(n-(s,1))}], & (s,1) > n, \end{cases} \tag{11}$$

де $\nu > 0$ — деяке число, яке ми підберемо пізніше, $[a]$ — ціла частина числа a. Оцінимо $\sum_s M_s$. Для цього скористаємось тим, що

$$\sum_{(s,1)\le n} 2^{(s,1)} = \sum_{j=d}^{n} \sum_{(s,1)=j} 2^{(s,1)} = \sum_{j=d}^{n} 2^j \sum_{(s,1)=j} 1 \asymp \sum_{j=d}^{n} 2^j j^{d-1} \ll 2^n n^{d-1} \tag{12}$$

і

$$\sum_{(s,1)>n} 2^{-\nu(s,1)} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{(s,1)=j} 2^{-\nu(s,1)} = \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-\nu j} \sum_{(s,1)=j} 1 \asymp$$

$$\asymp \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-\nu j} j^{d-1} \ll 2^{-\nu n} n^{d-1} \tag{13}$$

при $\nu > 0$. Враховуючи (12) і (13), маємо

$$\sum_s M_s \le \sum_{(s,1)\le n} 2^{(s,1)} + \sum_{(s,1)>n} 2^{n+\nu(n-(s,1))} \ll 2^n n^{d-1} \asymp M.$$

Розглянемо лінійний оператор, який діє на функцію $f(x)$ за формулою

$$\Lambda_M f(x) = \sum_s \Lambda_{M_s} \delta_s(f, x),$$

де оператори Λ_{M_s} побудовано згідно з лемою 1, тобто вони задовольняють співвідношення (6). Оцінимо $\| f(x) - \Lambda_M f(x) \|_q$. Використаємо для цього лему 2.

Оскільки за умовою теореми $2 \le p' < q < \infty$, то, виконуючи у формулі (7) заміну індексу p на p', знаходимо

$$\| f \|_q^q \ll \sum_s \left(\| \delta_s(f, \cdot) \|_{p'} 2^{(s,1)(1/p' - 1/q)} \right)^q.$$

Беручи до уваги викладене вище, записуємо

$$\|f(x) - \Lambda_M f(x)\|_q \ll \left\| \sum_{(s,1)>n} \left(\delta_s(f,x) - \Lambda_{M_s}\delta_s(f,x)\right)\right\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,1)>n} \left(2^{(s,1)(1/p'-1/q)}\left\|\delta_s(f,x) - \Lambda_{M_s}\delta_s(f,x)\right\|_{p'}\right)^q\right)^{1/q}. \tag{14}$$

Далі, використовуючи співвідношення (6), із (14) отримуємо

$$\|f(x) - \Lambda_M f(x)\|_q \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(s,1)>n} \left(2^{(s,1)(1/p'-1/q)}\lambda_{M_s}\left(B_p^{2^{(s,1)}}, l_{p'}^{2^{(s,1)}}\right)2^{(s,1)(1/p-1/p')}\|\delta_s(f,x)\|_p\right)^q\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{(s,1)>n} \left(2^{(s,1)(1/p-1/q)}\lambda_{M_s}\left(B_p^{2^{(s,1)}}, l_{p'}^{2^{(s,1)}}\right)\|\delta_s(f,x)\|_p\right)^q\right)^{1/q}, \tag{15}$$

а враховуючи те, що згідно з теоремою A

$$\lambda_{M_s}\left(B_p^{2^{(s,1)}}, l_{p'}^{2^{(s,1)}}\right) \ll 2^{(s,1)(1/p')}M_s^{-1/2},$$

із (15) маємо

$$\|f(x) - \Lambda_M f(x)\|_q \ll \left(\sum_{(s,1)>n} \left(2^{(s,1)(1/p-1/q)}2^{(s,1)(1/p')}M_s^{-1/2}\|\delta_s(f,x)\|_p\right)^q\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{(s,1)>n} \left(2^{(s,1)(1-1/q)}M_s^{-1/2}\|\delta_s(f,x)\|_p\right)^q\right)^{1/q}. \tag{16}$$

Підставивши тепер в (16) замість M_s відповідні значення з (11), продовжимо оцінку

$$\|f(x) - \Lambda_M f(x)\|_q \ll \left(\sum_{(s,1)>n} \left(2^{(s,1)(1-1/q)}2^{-n/2-(n-(s,1))\nu/2}\|\delta_s(f,x)\|_p\right)^q\right)^{1/q} =$$

$$= 2^{-n/2-\nu n/2}\left(\sum_{(s,1)>n} \left(2^{(s,1)(1-1/q+\nu/2)}\|\delta_s(f,x)\|_p\right)^q\right)^{1/q} =$$

$$= 2^{-n/2-\nu n/2}\left(\sum_{(s,1)>n} \left(2^{(s,1)(1-1/q+\nu/2)}\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}}2^{-\alpha(s,1)}\omega^{-1}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p\right)^q\right)^{1/q} = I.$$

Оскільки $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$ задовольняє умову (S) із $\alpha > 1 - 1/q$, то

$$\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \tag{17}$$

при $(s, 1) \geq n$.

Підберемо ν з умови

$$1 - \frac{1}{q} + \frac{\nu}{2} - \alpha < 0. \tag{18}$$

Тоді внаслідок (17) і (18) одержимо

$$I \ll 2^{-n/2-\nu n/2}\left(\sum_{(s,1)>n}\left(2^{(s,1)(1-1/q+\nu/2-\alpha)}\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\omega^{-1}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p\right)^q\right)^{1/q} =$$

$$= 2^{-n/2-\nu n/2+\alpha n}\omega(2^{-n})\left(\sum_{(s,1)>n}\left(2^{(s,1)(1-1/q+\nu/2-\alpha)}\omega^{-1}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p\right)^q\right)^{1/q} \ll$$

$$\ll 2^{-n/2-\nu n/2+\alpha n}\omega(2^{-n})2^{n(1-1/q+\nu/2-\alpha)}\left(\sum_{(s,1)>n}\omega^{-q}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p^q\right)^{1/q} =$$

$$= 2^{n(1/2-1/q)}\omega(2^{-n})\left(\sum_{(s,1)>n}\omega^{-q}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p^q\right)^{1/q}.$$

Оскільки $2 \le \theta \le q$, то, використавши нерівність (див., наприклад, [18])

$$\left(\sum_k a_k^{m_1}\right)^{1/m_1} \le \left(\sum_k a_k^{m_2}\right)^{1/m_2}, \quad a_k \ge 0, \quad 1 \le m_2 \le m_1 < \infty, \tag{19}$$

будемо мати

$$I \ll 2^{n(1/2-1/q)}\omega(2^{-n})\left(\sum_{(s,1)>n}\omega^{-\theta}(2^{-(s,1)})\|\delta_s(f,x)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll 2^{n(1/2-1/q)}\omega(2^{-n})\|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \le \omega(2^{-n})2^{n(1/2-1/q)}.$$

Таким чином, згідно з означенням лінійного поперечника, ми отримали в (10) оцінку зверху.

Перейдемо до встановлення відповідної оцінки знизу.

Оскільки $1 < p \le 2$, то $B^\Omega_{p,\theta} \supset B^\Omega_{2,\theta}$ і при $\theta \ge 2$ виконується $B^\Omega_{2,\theta} \supset B^\Omega_{2,2}$. Тому для того щоб отримати оцінку знизу поперечника $\lambda_M(B^\Omega_{p,\theta}, L_q)$, достатньо оцінити знизу поперечник $\lambda_M(B^\Omega_{2,2}, L_q)$.

Задамо M і виберемо число l із умови $M \asymp 2^l l^{d-1}$, $2^l l^{d-1} \ge 2M$. Покладемо $S = \{s : (s,1) = l\}$, $|S|$ — кількість елементів множини S, і позначимо через T_l множину тригонометричних поліномів з номерами гармонік із $\bigcup_{s\in S}\rho(s)$.

Тоді за означенням лінійного поперечника

$$\lambda_M(B^\Omega_{2,2}, L_q) \ge \lambda_M(B^\Omega_{2,2} \cap T_l, L_q). \tag{20}$$

Якщо P_l — оператор ортогонального проектування на T_l, то для $f \in L_q$ і $t \in T_l$ виконується співвідношення

$$\|f - t\|_q \gg \|P_l f - t\|_q. \tag{21}$$

Тому з (20) і (21) отримуємо

$$\lambda_M(B^\Omega_{2,2}, L_q) \ge \lambda_M(B^\Omega_{2,2} \cap T_l, L_q \cap T_l). \tag{22}$$

Нехай тепер $f \in L_2 \cap T_l$. Згідно з теоремою Б маємо

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{2,\theta}} \asymp \left(\sum_{(s,1)=l} \|\delta_s(f,x)\|_2^2\, \omega^{-2}(2^{-(s,1)})\right)^{1/2} = \omega^{-1}(2^{-l})\left(\sum_{(s,1)=l} \|\delta_s(f,x)\|_2^2\right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \omega^{-1}(2^{-l})\left(\sum_{(s,1)=l} 2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left|\delta_s f^j\right|^2\right)^{1/2} \asymp \omega^{-1}(2^{-l})2^{-l/2}\left(\sum_{(s,1)=l} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left|\delta_s f^j\right|^2\right)^{1/2}. \tag{23}$$

Із (23) робимо висновок, що якщо $f \in L_2 \bigcap T_l$ і

$$\left(\sum_{(s,1)=l} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left|\delta_s f^j\right|^2\right)^{1/2} \le \omega(2^{-l})2^{l/2}, \tag{24}$$

то $C_{11} f \in B^{\Omega}_{2,2} \bigcap T_l$, $C_{11} > 0$.

Іншими словами, довільній кулі $C_{11}\omega(2^{-l})2^{l/2} B_2^{2^l|S|}$ радіуса $C_{11}\omega(2^{-l})2^{l/2}$ з простору $l_2^{2^l|S|}$ ставиться у відповідність одинична куля із $B^{\Omega}_{2,2} \bigcap T_l$. Крім того, якщо $g \in L_q \bigcap T_l$, $q \ge 2$, то на підставі теореми Літтлвуда – Пелі, нерівності (19) і теореми Б одержуємо

$$\|g\|_q >> \left\|\left(\sum_{s\in S} |\delta_s(g,x)|^2\right)^{1/2}\right\|_q = \left\|\left(\sum_{(s,1)=l} |\delta_s(g,x)|^2\right)^{q/2}\right\|_1^{1/q} \ge$$

$$\ge \left\|\sum_{(s,1)=l} |\delta_s(g,x)|^q\right\|_1^{1/q} = \left(\sum_{(s,1)=l} \|\delta_s(g,x)\|_q^q\right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{(s,1)=l} 2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left|\delta_s f^j\right|^q\right)^{1/q} \asymp 2^{-l/q}\left(\sum_{(s,1)=l} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} \left|\delta_s f^j\right|^q\right)^{1/q}. \tag{25}$$

Таким чином, із (22) – (25) отримуємо оцінку

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{2,2}, L_q) >> \omega(2^{-l})2^{l(1/2-1/q)}\lambda_M\left(B_2^{2^l|S|}, l_q^{2^l|S|}\right).$$

Далі, беручи до уваги відоме співвідношення (див., наприклад, [13])

$$\lambda_M\left(B_2^{2^l|S|}, l_q^{2^l|S|}\right) = \lambda_M\left(B_{q'}^{2^l|S|}, l_2^{2^l|S|}\right), \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,$$

а потім нерівність (5), маємо

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{2,2}, L_q) >> \omega(2^{-l})2^{l(1/2-1/q)} d_M\left(B_{q'}^{2^l|S|}, l_2^{2^l|S|}\right). \tag{26}$$

Використовуючи тепер співвідношення (8), одержуємо

$$d_M\left(B_{q'}^{2^l|S|}, l_2^{2^l|S|}\right) >> \min\left\{1, (2^l l^{d-1})^{1/2}(C_{12}2^l l^{d-1})^{-1/2}\right\}\sqrt{1-\frac{M}{2^l l^{d-1}}} \ge C_{13} > 0. \tag{27}$$

Із (26) і (27) отримуємо шукану оцінку знизу

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) >> \omega(2^{-l})2^{l(1/2-1/q)}.$$

Таким чином, оцінку знизу, а разом з нею і теорему, доведено.

***Зауваження* 1.** Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$, $1 < p \le 2$, $p' < q < \infty$, $2 \le \theta \le q$ і $\alpha = r_1 > 1 - 1/q$, то виконується співвідношення

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{d-1} M)^{r_1 - 1/2 + 1/q},$$

встановлене А. С. Романюком [10].

***Зауваження* 2.** При порівнянні теореми 1 з відповідною оцінкою колмогоровського поперечника [2] робимо висновок, що для $1 < p \le 2$, $p' < q < \infty$, $2 \le \theta \le q$, $\alpha > 1 - 1/q$ має місце порядкова рівність

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp 2^{n(1/p' - 1/q)} n^{(d-1)(1/\theta - 1/2)} d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q),$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Теорема 2. *Нехай* $2 \le p < q < \infty$, $2 \le \theta \le q$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умови* (S) *з деяким* $\alpha > 1/p - 1/q$ *та* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *та* n *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p - 1/q)}. \tag{28}$$

Доведення. Оцінка зверху в (28) випливає з відповідної оцінки наближення класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f, x)$ [2].

Встановимо оцінку знизу. Нехай $f(x)$ — довільна функція з класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$. Використовуючи для „блоків" $\delta_s(f, x)$ лему 4 і покладаючи в нерівності (9) $q = 2$, одержуємо

$$\|\delta_s(f, x)\|_p \ll 2^{(s,1)(1/2 - 1/p)} \|\delta_s(f, x)\|_2.$$

З останнього співвідношення випливає

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f, x)\|_p^{\theta}\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \left(\sum_s \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) 2^{\theta(s,1)(1/2 - 1/p)} \|\delta_s(f, x)\|_2^{\theta}\right)^{1/\theta} =$$

$$= \left(\sum_s \omega_1^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f, x)\|_2^{\theta}\right)^{1/\theta} \asymp \|f\|_{B^{\Omega_1}_{2,\theta}},$$

де $\Omega_1(t) = \omega_1(t_1 \ldots t_d)$, $\omega_1(\tau) = \omega(\tau)\tau^{1/2 - 1/p}$.

Очевидно, що функція $\omega_1(\tau)$ є функцією типу модуля неперервності порядку $l + 1$, яка задовольняє умови (S) з деяким $\alpha_1 = \alpha + 1/2 - 1/p > 1/2 - 1/q$ та (S_{l+1}).

Із наведених вище міркувань робимо висновок, що виконується включення $B^{\Omega_1}_{2,\theta} \subset B^{\Omega}_{p,\theta}$, тому $\lambda_M(B^{\Omega_1}_{2,\theta}, L_q) \le \lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$. Щоб отримати оцінку $\lambda_M(B^{\Omega_1}_{2,\theta}, L_q)$ знизу, скористаємось теоремою 1:

$$\lambda_M(B^{\Omega_1}_{2,\theta}, L_q) \gg \omega_1(2^{-n}) 2^{n(1/2 - 1/q)} =$$

$$= \omega(2^{-n}) 2^{-n(1/2 - 1/p)} 2^{n(1/2 - 1/q)} = \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p - 1/q)}.$$

Таким чином, оцінку знизу в (28) доведено.

***Зауваження* 3.** Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$, $2 \le p < q < \infty$, $2 \le \theta \le q$ і $\alpha = r_1 > 1/p - 1/q$, то виконується порядкова рівність [10]

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp (M^{-1}\log^{d-1} M)^{r_1 - 1/p + 1/q}.$$

***Зауваження* 4.** Із теореми 2 і оцінок $d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$ [2] при $2 \le p < q < \infty$, $2 \le \theta \le q$, $\alpha > 1/2$ випливає співвідношення

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp 2^{n(1/p-1/q)} n^{(d-1)(1/\theta-1/2)} d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q),$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Наведемо ще оцінки лінійних поперечників, які є наслідками відомих оцінок інших апроксимативних характеристик.

Теорема 3. *Нехай* $\Omega(t) = \omega(t_1 \ldots t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умови* (S) *з деяким* $\alpha > 0$ *та* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *та* n *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *виконується*:

а) *якщо* $1 < q \le 2 \le p < \infty$, $2 \le \theta \le \infty$, *то*

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/2-1/\theta)};$$

б) *якщо* $2 < q \le p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, *то*

$$\lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

У теоремі 3 оцінки зверху в обох випадках випливають із відповідних оцінок наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ східчасто-гіперболічними сумами Фур'є, а знизу — із оцінок колмогоровських поперечників [19].

Таким чином, при виконанні умов теореми 3 має місце співвідношення

$$d_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \lambda_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q).$$

Наслідок. *При* $\theta = \infty$ *із теореми* 3 *у випадку* $1 < q \le p < \infty$, $p \ge 2$, *отримуємо оцінку*

$$\lambda_M(H^{\Omega}_{p}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)/2}.$$

1. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
2. *Sun Youngsheng, Wang Heping.* Representation and approximation multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
3. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **187**. – С. 143 – 161.
4. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. Math. – 1994. – **20**. – P. 35 – 48.
5. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональном пространстве и теория наилучших приближений // Успехи мат. журн. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
6. *Глускин Е. Д.* Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств // Мат. сб. – 1983. – **120**, № 2. – С. 180 – 189.
7. *Кашин Б. С.* О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства l_2^n в l_2^m // Изв. АрмССР. Математика. – 1980. – **15**, № 5. – С. 379 – 394.

8. *Галеев Э. М.* Линейные поперечники классов Гельдера – Никольского периодических функций многих переменных // Мат. заметки. – 1996. – **59**, № 2. – С. 189 – 199.
9. *Романюк А. С.* Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 5. – С. 647 – 661.
10. *Романюк А. С.* Линейные поперечники классов Бесова периодических функций многих переменных. II // Там же. – № 6. – С. 820 – 829.
11. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
12. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 307 с.
13. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1987. – **14**. – С. 103 – 260.
14. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\tilde{W}_p^r$ и $\tilde{H}_p^r$ в пространстве $\tilde{L}_p$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1985. – **49**, № 5. – С. 916 – 934.
15. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1, 2.
16. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1969. – 480 с.
17. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **178**. – 112 с.
18. *Харди Г., Литтльвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
19. *Стасюк С. А.* Найкращі наближення, колмогоровські та тригонометричні поперечники класів $B_{p,\theta}^{\Omega}$ періодичних функцій багатьох змінних // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 11. – С. 1557 – 1568.

Одержано 24.12.2004