УДК 517.944

В. А. Михайлец (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
А. А. Мурач (Черниговский технол. ун-т)

УТОЧНЕННЫЕ ШКАЛЫ ПРОСТРАНСТВ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ. I

The refined scales of functional Hilbert spaces over $\mathbb{R}^n$ and smooth manifolds with a boundary are studied. Elements of these scales are the isotropic spaces of Hörmander – Volevich – Paneyakh. Theory of elliptic boundary-value problems in such spaces is developed.

Вивчаються уточнені шкали функціональних гільбертових просторів на $\mathbb{R}^n$ та гладких многовидах з краєм. Елементами цієї шкали є ізотропні простори Хермандера – Волевіча – Панеяха. Розроблено теорію еліптичних крайових задач у цих просторах.

Введение. В настоящей статье изучается уточненная шкала гильбертовых функциональных пространств, введенная авторами в [1]. Гладкостные свойства функций из пространств этой шкалы определяются не числовым набором, а функциональным параметром, который является правильно меняющейся функцией одной вещественной переменной. Этот функциональный параметр позволяет более тонко характеризовать гладкость функции по свойствам ее преобразования Фурье вблизи бесконечности.

Цель статьи — показать, что свойства уточненной шкалы и классической шкалы пространств бесселевых потенциалов во многом аналогичны, что позволяет распространить теорию эллиптических краевых задач на уточненные шкалы. Эта аналогия свойств является следствием того, что каждое пространство уточненной шкалы может быть получено посредством интерполяции с подходящим функциональным параметром пары пространств бесселевых потенциалов. В качестве параметра здесь следует взять некоторую правильно меняющуюся на $+\infty$ функцию.

Статья состоит из двух частей, каждая из которых содержит два пункта. В п. 1 рассмотрены некоторые необходимые далее свойства медленно меняющихся функций. В п. 2 показано, что правильно меняющаяся на $+\infty$ функция порядка θ, где $0 < \theta < 1$, является интерполяционным параметром, т. е. порождает интерполяционный функтор в категории пар гильбертовых пространств. На основании этого результата в п. 3 изучены методом интерполяции уточненные шкалы на пространстве $\mathbb{R}^n$, полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ и компактном дифференцируемом многообразии класса C^∞. В п. 4 также с помощью интерполяции установлена теорема о нетеровости оператора эллиптической краевой задачи в уточненной шкале пространств дифференцируемых функций на многообразии.

Необходимо отметить, что пространства, гладкость в которых определяется посредством функциональных параметров, были впервые введены и изучены в работах [2, 3]. В настоящее время эти пространства являются предметом многих исследований (см., например, [4, с. 381 – 415; 5] и приведенную в них библиографию). В частности, эллиптические граничные задачи в некоторых таких пространствах изучались методом интерполяции в [6].

© В. А. МИХАЙЛЕЦ, А. А. МУРАЧ, 2006

1. Правильно меняющиеся функции. Напомним, что положительная функция φ, заданная на полуоси $[b,+\infty)$, называется *правильно меняющейся* на $+\infty$ функцией порядка $\theta \in \mathbb{R}$, если φ измерима по Борелю на $[b,+\infty)$ и для любого $\lambda > 0$ справедливо $\varphi(\lambda t)/\varphi(t) \to \lambda^\theta$ при $t \to +\infty$. Правильно меняющаяся на $+\infty$ функция порядка $\theta = 0$ называется *медленно меняющейся* на $+\infty$. Обозначим через SV совокупность всех медленно меняющихся на $+\infty$ функций. Очевидно, φ — правильно меняющаяся на $+\infty$ функция порядка θ тогда и только тогда, когда $\varphi(t) = t^\theta \varphi_0(t)$, $t \geq b$, для некоторого $\varphi_0 \in \mathrm{SV}$. Поэтому при изучении правильно меняющихся функций достаточно ограничиться медленно меняющимися функциями.

Теория правильно меняющихся функций была основана И. Караматой в 30-х годах прошлого столетия. Эти функции близки по свойствам к степенным и достаточно полно изучены [7 – 12]. Они имеют многочисленные приложения, в основном, благодаря их особой роли в теоремах тауберова типа.

Приведем характерный пример [8, с. 48 – 50] медленно меняющейся функции.

***Пример* 1.1.** Пусть заданы $k \in \mathbb{N}$ вещественных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Положим $\varphi(t) = (\ln t)^{r_1}(\ln\ln t)^{r_2}\ldots(\ln\ldots\ln t)^{r_k}$ при $t \gg 1$. Тогда $\varphi \in \mathrm{SV}$.

Функции, рассмотренные в этом примере, образуют *логарифмическую мультишкалу*, имеющую ряд приложений в теории функциональных пространств. Другие примеры функций класса SV будут приведены ниже.

Широкое применение медленно меняющихся функций базируется на таком их интегральном представлении (см., например, [8, с. 10]).

Предложение 1.1. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{SV}$, *тогда*

$$\varphi(t) = \exp\left(\beta(t) + \int\limits_b^t \frac{\alpha(\tau)}{\tau}\, d\tau\right) \quad \textit{при} \quad t \geq b \tag{1.1}$$

для некоторых числа $b > 0$, *непрерывной функции* $\alpha : [b;+\infty) \to \mathbb{R}$, *стремящейся к нулю в* $+\infty$, *и измеримой по Борелю ограниченной функции* $\beta : [b;+\infty) \to \mathbb{R}$, *имеющей конечный предел в* $+\infty$. *Обратное также верно*: *любая функция вида* (1.1) *принадлежит классу* SV.

Отсюда непосредственно вытекает следующее достаточное условие правильного изменения.

Предложение 1.2. *Пусть для дифференцируемой функции* $\varphi : (b;+\infty) \to (0;+\infty)$ *справедливо* $t\varphi'(t)/\varphi(t) \to \theta \in \mathbb{R}$ *при* $t \to +\infty$. *Тогда* φ — *правильно меняющаяся на* $+\infty$ *функция порядка* θ.

Предложение 1.2 приводит к следующим трем полезным примерам медленно меняющихся на $+\infty$ функций.

***Пример* 1.2.** Рассмотрим функцию $\psi(t) = \exp\varphi(t)$, $t \gg 1$, где φ взято из примера 1.1, в котором $r_1 < 1$. Тогда функция $\varphi \in \mathrm{SV}$.

***Пример* 1.3.** Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, причем $\beta \neq 0$ и $0 < \gamma < 1$. Положим $\omega(t) = \alpha + \beta \sin \ln^\gamma t$, $\varphi(t) = (\ln\, t)^{\omega(t)}$ при $t > 1$. Тогда $\varphi \in \mathrm{SV}$.

***Пример* 1.4.** Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, причем $\alpha \neq 0$ и $0 < \gamma < \beta < 1$. Положим $r(t) = \alpha(\ln t)^{-\beta} \sin\, \ln^\gamma t$ и $\varphi(t) = t^{r(t)}$ при $t > 1$. Тогда $\varphi \in \mathrm{SV}$.

Этот пример интересен тем, что, поскольку $\ln\varphi(t) = \alpha(\ln t)^{1-\beta}\sin\ln^{\gamma} t$, для функции $\varphi(t)$ множество предельных при $t \to +\infty$ точек заполняет всю полуось $(0, +\infty)$.

Сформулируем следующие необходимые далее свойства медленно меняющихся функций.

Предложение 1.3. *Пусть* $\varphi, \psi \in \mathrm{SV}$, *а* χ *— правильно меняющаяся на* $+\infty$ *функция* (*порядка* θ). *Тогда*:

а) *существует такая положительная функция* $\varphi_1 \in \mathrm{SV} \cap C^{\infty}((0; +\infty))$, *что* $\varphi(t) \sim \varphi_1(t)$ *при* $t \to +\infty$;

б) *для произвольного* $\varepsilon > 0$ *справедливо* $t^{-\varepsilon}\varphi(t) \to 0$ *и* $t^{\varepsilon}\varphi(t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$;

в) *функции* $\varphi + \psi$, $\varphi\,\psi$ *и* $\dfrac{\varphi}{\psi}$ *принадлежат классу* SV;

г) *сложные функции* $\chi(\varphi(t))$ *и* $\varphi(\chi(t))$ *аргумента* t *принадлежат классу* SV *при условии, что внутренняя функция бесконечно большая в* $+\infty$.

Пункты а) – в) этого предложения доказаны, например, в [8, с. 23 – 25]. Там же установлен п. г) для случая $\theta = 0$, его доказательство легко обобщается на случай произвольного θ.

Предложение 1.4 [8, с. 63 – 66]. *Пусть дано*:

а) *измеримую по Борелю функцию* $\chi : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$, *которая медленно меняется на* $+\infty$ *и ограничена на каждом отрезке* $[0; b]$, *где* $0 < b < +\infty$;

б) *измеримую по Лебегу функцию* $\omega : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ *такую, что при некотором* $\varepsilon > 0$ *конечны интегралы*

$$\int\limits_0^1 \lambda^{-\varepsilon}\omega(\lambda)\,d\lambda \quad \textit{и} \quad \int\limits_1^{+\infty} \lambda^{\varepsilon}\omega(\lambda)\,d\lambda. \tag{1.2}$$

Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} \chi(t\lambda)\,\omega(\lambda)\,d\lambda \sim \chi(t)\int\limits_0^{+\infty} \omega(\lambda)\,d\lambda \quad \textit{при} \quad t \to +\infty.$$

В пп. 3, 4 нам понадобятся следующие три леммы.

Лемма 1.1. *Пусть функция* $\varphi \in \mathrm{SV}$ *положительна на* $[1, +\infty)$ *и ограничена вместе с функцией* $1/\varphi$ *на каждом отрезке* $[1; b]$, *где* $1 < b < +\infty$. *Тогда для произвольного числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такая конечная постоянная* $c(\varepsilon) > 0$, *что для любых* $t \geq 1$, $s \geq 1$ *выполняется неравенство*

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)} \leq c(\varepsilon)\,(1 + |t - s|^{\varepsilon}). \tag{1.3}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу предложения 1.1 представим φ в виде (1.1). Поскольку там $\alpha(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$, найдется такое число $b_{\varepsilon} \geq 1$, что $|\alpha(\tau)| \leq \varepsilon$ при $\tau \geq b_{\varepsilon}$. Возьмем произвольные числа $t \geq 1$, $s \geq 1$. Далее в доказательстве будем обозначать через $c_1, c_2, \ldots, c_6$ конечные положительные постоянные, не зависящие от t и s. Докажем (1.3) отдельно для четырех возможных случаев расположения чисел t и s относительно b_{ε}. Первый случай $t \geq b_{\varepsilon}$, $s \geq b_{\varepsilon}$. В силу (1.1) имеем

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)} = \exp \int\limits_s^t \frac{\alpha(\tau)}{\tau}\, d\tau \le \exp \left| \int\limits_s^t \frac{\varepsilon}{\tau}\, d\tau \right| = \max \left\{ \left(\frac{t}{s}\right)^{\varepsilon},\ \left(\frac{s}{t}\right)^{\varepsilon} \right\} =$$

$$= \max \left\{ \left(1 + \frac{t-s}{s}\right)^{\varepsilon},\ \left(1 + \frac{s-t}{t}\right)^{\varepsilon} \right\} \le$$

$$\le (1 + |t-s|)^{\varepsilon} \le c_1 (1 + |t-s|^{\varepsilon}). \tag{1.4}$$

Второй случай $t \ge b_\varepsilon$, $1 \le s \le b_\varepsilon$. В силу предложения 1.3 б) и условия $\varphi(t) \le c_2\, t^{\varepsilon}$ $1/\varphi(s) \le c_2$. Отсюда

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)} \le c_2^2\, t^{\varepsilon} = c_2^2\, (s + (t-s))^{\varepsilon} \le c_2^2\, (b_\varepsilon + |t-s|)^{\varepsilon} \le$$

$$\le c_2^2\, b_\varepsilon (1 + |t-s|)^{\varepsilon} \le c_3\, (1 + |t-s|^{\varepsilon}).$$

Третий случай $1 \le t \le b_\varepsilon$, $s \ge b_\varepsilon$. Аналогично предыдущему случаю имеем $1/\varphi(s) \le c_4\, s^{\varepsilon}$, $\varphi(t) \le c_4$ и, следовательно,

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(s)} \le c_4^2\, s^{\varepsilon} = c_4^2\, (t + (s-t))^{\varepsilon} \le c_4^2\, (b_\varepsilon + |s-t|)^{\varepsilon} \le$$

$$\le c_4^2\, b_\varepsilon (1 + |s-t|)^{\varepsilon} \le c_5\, (1 + |t-s|^{\varepsilon}).$$

Четвертый случай $1 \le t \le b_\varepsilon$, $1 \le s \le b_\varepsilon$ тривиален: $\varphi(t)/\varphi(s) \le c_6 \le c_6(1 + |t-s|^{\varepsilon})$. Таким образом, (1.3) справедливо для произвольных $t \ge 1$, $s \ge 1$, что и требовалось доказать.

Лемма 1.2. *Пусть функция* $\psi_1 \in \mathrm{SV}$ *положительна, непрерывна на* $[1; +\infty)$ *и удовлетворяет условию*

$$J = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t\, \psi_1(t)} < +\infty.$$

Тогда существует такая функция $\psi_0 \in \mathrm{SV}$, *положительная и непрерывная на* $[1; +\infty)$, *что* $\psi_0(t)/\psi_1(t) \to 0$ *при* $t \to +\infty$ *и*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t\, \psi_0(t)} < +\infty.$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(t) = \int\limits_t^{+\infty} \frac{dt}{t\, \psi_1(t)}, \qquad \psi_0(t) = \psi_1(t)\, \sqrt{\varphi(t)}, \quad t \ge 1.$$

Согласно условию функция φ конечная и положительная на $[1; +\infty)$, причем $\varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Кроме того, φ имеет непрерывную производную $\varphi'(t) = -(t\, \psi_1(t))^{-1}$, $t \ge 1$. Отсюда и из условия $\psi_1 \in \mathrm{SV}$ по правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\lambda\, (\lambda\, t\, \psi_1(\lambda\, t))^{-1}}{(t\, \psi_1(t))^{-1}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\psi_1(t)}{\psi_1(\lambda\, t)} = 1, \quad \lambda > 0,$$

т. е. $\varphi \in \mathrm{SV}$. Обратимся теперь к функции ψ_0. Она положительна и непрерывна на $[1; +\infty)$. Поскольку $\psi_1, \varphi \in \mathrm{SV}$, то $\psi_0 \in \mathrm{SV}$ в силу предложения 1.3 в), г). Кроме того, $\psi_0(t)/\psi_1(t) = \sqrt{\varphi(t)} \to 0$ при $t \to +\infty$ и

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t\,\psi_0(t)} = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t\,\psi_1(t)\,\sqrt{\varphi(t)}} = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{d\,\varphi(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} = -\int\limits_J^{0} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} < +\infty.$$

Таким образом, ψ_0 удовлетворяет условиям леммы.

Лемма 1.3. *Пусть функция ψ_1 удовлетворяет условию леммы* 1.2. *Тогда*

$$\int\limits_\tau^{+\infty} \frac{dt}{t\,\psi_1(t)} \le \int\limits_\tau^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2-\tau^2}\,\psi_1(t)} \le c \int\limits_\tau^{+\infty} \frac{dt}{t\,\psi_1(t)}, \quad \tau \ge 1,$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от τ.

Доказательство. Левое неравенство тривиально. Докажем правое неравенство. В силу формулы среднего значения для произвольного $\tau \ge 1$ запишем

$$\int\limits_\tau^{2\tau} \frac{dt}{\sqrt{t^2-\tau^2}\,\psi_1(t)} = \frac{1}{\psi_1(s_1)} \int\limits_\tau^{2\tau} \frac{dt}{\sqrt{t^2-\tau^2}} = \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{\psi_1(s_1)},$$

$$\int\limits_\tau^{2\tau} \frac{dt}{t\,\psi_1(t)} = \frac{1}{\psi_1(s_2)} \int\limits_\tau^{2\tau} \frac{dt}{t} = \frac{\ln 2}{\psi_1(s_2)};$$

здесь $s_1,\ s_2 \in [\tau; 2\tau]$. Затем, применив предложение 1.1 к функции $\varphi = \psi_1 \in \mathrm{SV}$, получим, как и при доказательстве леммы 1.1 (формула (1.4)), оценку $\dfrac{\psi_1(s_2)}{\psi_1(s_1)} \le$ $\le \max\left\{\dfrac{s_2}{s_1}, \dfrac{s_1}{s_2}\right\} \le 2$ при $\tau \ge b_1$ для некоторого $b_1 \ge 1$. Кроме того, поскольку ψ_1 непрерывна и положительна, то $\dfrac{\psi_1(s_2)}{\psi_1(s_1)} \le c_1 < +\infty$ при $1 \le \tau \le b_1$. Следовательно,

$$\int\limits_\tau^{2\tau} \frac{dt}{\sqrt{t^2-\tau^2}\,\psi_1(t)} = \frac{\psi_1(s_2)\,\ln(2+\sqrt{3})}{\psi_1(s_1)\,\ln 2} \int\limits_\tau^{2\tau} \frac{dt}{t\,\psi_1(t)} \le c_2 \int\limits_\tau^{2\tau} \frac{dt}{t\,\psi_1(t)}, \quad \tau \ge 1,$$

с постоянной c_2, не зависящей от τ. Сложив это неравенство с очевидным неравенством

$$\int\limits_{2\tau}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2-\tau^2}\,\psi_1(t)} \le \frac{2}{\sqrt{3}} \int\limits_{2\tau}^{+\infty} \frac{dt}{t\,\psi_1(t)}, \quad \tau \ge 1,$$

получим правое неравенство в (1.5).

Лемма 1.3 доказана.

2. Интерполяция с функциональным параметром. Хорошо известно [13, с. 250 – 255], [14] (гл. I), сколь важную роль играют степенные функции в теории интерполяции гильбертовых пространств. Оказывается, что в ней вместо степенных функций можно использовать более общие правильно меняющиеся функции.

Приведем сначала определение пространства, которое строится по паре гильбертовых пространств с помощью функционального параметра (см., например, [6, с. 48, 49]).

Пусть даны комплексные сепарабельные гильбертовы пространства X_0 и X_1 такие, что справедливо непрерывное плотное вложение $X_1 \hookrightarrow X_0$. В этом случае пару $X = [X_0, X_1]$ будем называть *допустимой*. Как известно (см., например, [14, с. 22]), для X существует такой изометрический изоморфизм $A : X_1 \leftrightarrow X_0$, что оператор A является самосопряженным положительно определенным оператором в X_0 с областью определения X_1. Оператор A называется *порождающим* для пары X, этот оператор единственный. В самом деле, пусть оператор B также порождающий для пары X. Тогда операторы A и B метрически равны: $\|Au\|_{X_0} = \|u\|_{X_1} = \|Bu\|_{X_0}$ для любого $u \in X_1$. Кроме того, эти операторы положительно определены. Следовательно, они равны: $A = B$.

Рассмотрим далее функцию ψ, положительную и измеримую по Борелю на $(0; +\infty)$. Поскольку спектр оператора A является подмножеством полуоси $(0; +\infty)$, в X_0 определен оператор $\psi(A)$ как функция от A. Область определения оператора $\psi(A)$ есть линейное множество, плотное в X_0. Обозначим через $[X_0, X_1]_\psi$ или, короче, через X_ψ область определения оператора $\psi(A)$, наделенную таким скалярным произведением:

$$(u, v)_{X_\psi} = (u, v)_{X_0} + (\psi(A)u, \psi(A)v)_{X_0}.$$

Это скалярное произведение порождает норму графика в X_ψ : $\|u\|_{X_\psi} = \left(\|u\|^2_{X_0} + \|\psi(A)u\|^2_{X_0}\right)^{1/2}$. Поскольку оператор $\psi(A)$ замкнут в X_0, то пространство X_ψ полное, т. е. гильбертово. Справедливо непрерывное плотное вложение $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Далее центральную роль будет играть следующее определение. Функция ψ называется *интерполяционным параметром*, если для произвольных допустимых пар $[X_0, X_1]$, $[Y_0, Y_1]$ гильбертовых пространств и для произвольного линейного отображения T, заданного на X_0, выполняется следующее: если при каждом $j = 0; 1$ сужение отображения T на пространство X_j является ограниченным оператором $T : X_j \to Y_j$, то и сужение отображения T на пространство $[X_0, X_1]_\psi$ является ограниченным оператором $T \colon [X_0, X_1]_\psi \to [Y_0, Y_1]_\psi$.

Хорошо известно [13, с. 250 – 255; 14, с. 41], что степенная функция $\psi(t) = t^\theta$ с показателем $\theta \in (0; 1)$ является интерполяционным параметром. Мы покажем, что для правильно меняющейся функции имеет место аналогичный результат. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть положительная на* $(0; +\infty)$ *функция* ψ *удовлетворяет следующим условиям*:

а) ψ *измерима по Борелю на* $(0; +\infty)$;

б) ψ *ограничена на каждом отрезке* $[a; b]$, *где* $0 < a < b < +\infty$;

в) ψ — *правильно меняющаяся на* $+\infty$ *функция порядка* θ, *причем* $0 < \theta < 1$. *Тогда* ψ *является интерполяционным параметром.*

Доказательству теоремы 2.1 предпошлем шесть лемм.

Лемма 2.1. *Пусть пара* $X = [X_0, X_1]$ *гильбертовых пространств допустимая, а функция* ψ *удовлетворяет всем условиям теоремы* 2.1. *Тогда справедливы непрерывные плотные вложения* $X_1 \hookrightarrow X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Доказательство. Согласно изложенному выше, необходимо установить лишь левое вложение. Пусть оператор A является порождающим для пары X. Поскольку этот оператор положительно определенный в X_0, существует такое число $\kappa > 0$, что спектр оператора A является подмножеством $[\kappa; +\infty)$. Пусть E_t $t \geq \kappa$, — разложение единицы для A в X_0. Отметим далее следующий факт (он используется и при доказательстве других лемм). Поскольку ψ является правильно меняющейся на $+\infty$ функцией порядка $\theta \in (0;1)$, $\psi(t) = t^\theta \varphi(t)$ для некоторого $\varphi \in \mathrm{SV}$. В силу п. б) предложения 1.3 для $\varepsilon = \min\{\theta;\, 1-\theta\}/2 > 0$ справедливо $t^{-\varepsilon}\varphi(t) \to 0$ и $t^{\varepsilon}\varphi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Следовательно, найдется такое число $b > \kappa$, что $t^{-\varepsilon}\varphi(t) \leq 1$ и $t^{\varepsilon}\varphi(t) \geq 1$ при $t \geq b$. Значит,

$$t^{\theta-\varepsilon} \leq \psi(t) \leq t^{\theta+\varepsilon} \quad \text{при} \quad t \geq b, \tag{2.1}$$

причем здесь $0 < \theta - \varepsilon < \theta + \varepsilon < 1$. В частности, из правого неравенства (2.1), в силу ограниченности функции ψ на $[\,\kappa; b\,]$, следует, что для некоторого числа $c > 0$ выполняется $\psi(t) \leq ct$ при $t \geq \kappa$. Поэтому для произвольного $u \in X_1$ имеем

$$\|\psi(A)\,u\|^2_{X_0} = \int\limits_{\kappa}^{+\infty} \psi^2(t)\, d(E_t\, u,\, u)_{X_0} \leq c^2 \int\limits_{\kappa}^{+\infty} t^2\, d(E_t\, u,\, u)_{X_0} =$$

$$= c^2\|A\,u\|^2_{X_0} = c^2\|\,u\,\|^2_{X_1} < +\infty.$$

Следовательно, $u \in X_\psi$, причем

$$\|u\|^2_{X_\psi} = \|u\|^2_{X_0} + \|\psi(A)\,u\|^2_{X_0} \leq \|u\|^2_{X_0} + c^2\|u\|^2_{X_1} \leq c_0\|u\|^2_{X_1},$$

здесь число $c_0 > 0$ не зависит от u. Таким образом, имеет место непрерывное вложение $X_1 \hookrightarrow X_\psi$.

Докажем его плотность. Для этого заметим следующее. Поскольку оператор $1 + \psi(A)$ самосопряженный положительно определенный в X_0, он имеет ограниченный обратный оператор $(1+\psi(A))^{-1} : X_0 \to X_0$. Теперь ясно, что справедливы топологические изоморфизмы $1 + \psi(A) : X_\psi \leftrightarrow X_0$ и $(1 + \psi(A))^{-1} : X_0 \leftrightarrow X_\psi$. Возьмем произвольное $u \in X_\psi$. Тогда $u + \psi(A)u \in X_0$ и, поскольку X_1 плотно в X_0, найдется такая последовательность $(v_j) \subset X_1$, что $v_j \to u + \psi(A)u$ в X_0 при $j \to \infty$. Значит, $u_j = (1+\psi(A))^{-1}v_j \to u$ в X_ψ при $j \to \infty$. Кроме того, поскольку $v_j \in X_1$, то

$$u_j = (1 + \psi(A))^{-1}A^{-1}Av_j = A^{-1}(1 + \psi(A))^{-1}Av_j \in X_1.$$

Таким образом, последовательность $(u_j) \subset X_1$ аппроксимирует элемент u в X_ψ. Поэтому вложение $X_1 \hookrightarrow X_\psi$ плотное.

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Пусть функция ψ удовлетворяет условию теоремы* 2.1. *Тогда существует такая непрерывная функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что*:

а) *для некоторых положительных постоянных c_0, m справедлива оценка*

$$|h(\tau)| \leq c_0(1 + |\tau|)^m \quad \textit{при} \quad \tau \in \mathbb{R}; \tag{2.2}$$

б) *для любого числа $\kappa > 0$ найдутся такие положительные постоянные $c_1(\kappa)$, $c_2(\kappa)$, что*

$$\frac{c_1(\kappa)}{1+\psi^2(t)} \leq \int \frac{d\,\tau}{t^2+h^2(\tau)} \leq \frac{c_2(\kappa)}{1+\psi^2(t)} \quad \textit{при} \quad t \geq \kappa. \tag{2.3}$$

Здесь и далее в этом пункте интеграл, в котором не указаны пределы интегрирования, берется по всей оси.

Доказательство. Имеем $\psi(t) = t^\theta \varphi(t)$ при $t > 0$, где $\varphi \in \mathrm{SV}$. Возьмем такую непрерывную функцию $\varphi_1 : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$, что $\varphi_1(1) = 1$, $\varphi_1 \in \mathrm{SV}$ и $\varphi_1(t) \sim \varphi(t)$ при $t \to +\infty$. (Это можно сделать в силу п. а) предложения 1.3.) Имеем $t^{2\theta}\varphi_1^2(t) \sim t^{2\theta}\varphi^2(t) = \psi^2(t)$ при $t \to +\infty$. Но поскольку $\theta > 0$, согласно п. б) предложения 1.3, $\psi(t) = t^\theta\varphi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Значит, $\psi^2(t) \sim 1+\psi^2(t)$ при $t \to +\infty$. Теперь последние две эквивалентности влекут

$$t^{2\theta}\,\varphi_1^2(t) \sim 1+\psi^2(t) \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{2.4}$$

Положим $\varphi_2(t) = t^{1-2\theta}\varphi_1^{-2}(t)$ при $t \geq 1$ и $\varphi_2(t) = t^{1-2\theta}$ при $0 < t < 1$. Функция φ_1 непрерывна на $(0;+\infty)$, причем $\varphi_1(1) = 1$, значит, функция $\varphi_2 : (0;+\infty) \to$ $\to (0;+\infty)$ также непрерывна. Далее, поскольку в силу п. в) предложения 1.3, справедливо $\varphi_1^{-2} \in \mathrm{SV}$, то φ_2 — правильно меняющаяся на $+\infty$ функция порядка $1-2\theta \in (-1;1)$. Следовательно, взяв в (2.1) φ_2 вместо ψ и $1-2\theta$ вместо θ, запишем

$$t^{1-2\theta-\varepsilon} \leq \varphi_2(t) \leq t^{1-2\theta+\varepsilon} \quad \text{при} \quad t \geq b, \tag{2.5}$$

где $-1 < 1-2\theta-\varepsilon < 1-2\theta+\varepsilon < 1$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi^2(\eta)\,d\,\eta}{t^2+\eta^2} < +\infty \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Преобразуем этот интеграл так. В силу свойств функции φ_2 можем записать $\varphi_2(t) = t^{1-2\theta}\varphi_3(t)$ при $t > 0$, где функция $\varphi_3 : [0;+\infty) \to (0;+\infty)$ непрерывная и медленно меняющаяся на $+\infty$. Для каждого параметра $t > 0$ выполним в интеграле замену $\eta = t\,\lambda$. В результате получим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi_2(\eta)\,d\,\eta}{t^2+\eta^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi_2(t\,\lambda)\,t\,d\,\lambda}{t^2+(t\,\lambda)^2} = \frac{1}{t}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi_2(t\,\lambda)\,d\,\lambda}{1+\lambda^2} =$$

$$= \frac{1}{t}\int\limits_0^{+\infty} \frac{(t\,\lambda)^{1-2\theta}\varphi_3(t\,\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\,\lambda = t^{-2\theta}\int\limits_0^{+\infty} \varphi_3(t\,\lambda)\,\frac{\lambda^{1-2\theta}}{1+\lambda^2}\,d\,\lambda \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Теперь воспользуемся предложением 1.4, в котором положим $\chi = \varphi_3$, $\omega(\lambda) =$ $= \lambda^{1-2\theta}/(1+\lambda^2)$. Поскольку $-1 < 1-2\theta < 1$, интегралы (1.2) конечны для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Следовательно, согласно предложению 1.4

$$\int\limits_0^{+\infty} \varphi_3(t\,\lambda)\,\frac{\lambda^{1-2\theta}}{1+\lambda^2}\,d\,\lambda \sim \varphi_3(t)\int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda^{1-2\theta}}{1+\lambda^2}\,d\,\lambda = c\,\varphi_3(t) \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

где c — положительное число. Отсюда в силу предыдущего цепного равенства и формулы (2.4) имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi_2(\eta)\,d\eta}{t^2+\eta^2} \sim c\,t^{-2\theta}\varphi_3(t) = \frac{c}{t}\,t^{1-2\theta}\varphi_3(t) = \frac{c}{t}\,\varphi_2(t) \sim$$

$$\sim \frac{c}{t}\,t^{1-2\theta}\varphi_1^{-2}(t) = c\,t^{-2\theta}\varphi_1^{-2}(t) \sim c\,(1+\psi^2(t))^{-1} \quad \text{при} \quad t\to+\infty.$$

Следовательно, для некоторого достаточно большого числа b выполняется

$$\frac{c/2}{1+\psi^2(t)} \le \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi_2(\eta)\,d\eta}{t^2+\eta^2} \le \frac{2c}{1+\psi^2(t)} \quad \text{при} \quad t\ge b. \tag{2.6}$$

Зафиксируем далее произвольное число $\kappa>0$ и будем считать, что $b>\kappa$. Согласно условию, функция $(1+\psi^2(t))^{-1}$ отделена от нуля на $[\,\kappa\,;\,b\,]$, и поэтому существует число $c_0(\kappa)\ge 1$, что

$$\frac{c_0^{-1}(\kappa)}{1+\psi^2(t)} \le \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi_2(\eta)\,d\eta}{b^2+\eta^2} \le \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi_2(\eta)\,d\eta}{t^2+\eta^2} \le$$

$$\le \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi_2(\eta)\,d\eta}{\kappa^2+\eta^2} \le \frac{c_0(\kappa)}{1+\psi^2(t)} \quad \text{при} \quad \kappa\le t\le b.$$

Отсюда в силу (2.6) следует существование таких положительных чисел $c_1(\kappa)$ и $c_2(\kappa)$, что

$$\frac{c_1(\kappa)/2}{1+\psi^2(t)} \le \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi_2(\eta)\,d\eta}{t^2+\eta^2} \le \frac{c_2(\kappa)/2}{1+\psi^2(t)} \quad \text{при} \quad t\ge\kappa. \tag{2.7}$$

Приведем теперь последний интеграл к виду интеграла из (2.3). Положим

$$\omega(\eta) = \int\limits_0^{\eta} \varphi_2(t)\,dt, \quad \eta\ge 0.$$

Поскольку функция $\varphi_2:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ непрерывна и $\varphi_2(t)=t^{1-2\theta}$ при $0<t<1$, причем $1-2\theta\in(-1;1)$, функция $\omega:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ строго возрастает, непрерывна и существует $\omega'(\eta)=\varphi_2(\eta)>0$ при $\eta>0$. Кроме того, $\omega(0)=0$ и $\omega(\eta)\to+\infty$ при $\eta\to+\infty$. Последнее соотношение вытекает из левого неравенства (2.5), в котором $1-2\theta-\varepsilon>-1$. Действительно,

$$\omega(\eta) \ge \int\limits_b^{\eta} \varphi_2(t)\,d\,t \ge \int\limits_b^{\eta} t^{1-2\theta-\varepsilon}\,d\,t = \frac{\eta^\delta-b^\delta}{\delta}$$

$$\text{при} \quad \eta\ge b, \quad \text{где} \quad \delta=2-2\theta-\varepsilon>0.$$

Итак,

$$\omega(\eta) \ge \frac{\eta^\delta-b^\delta}{\delta} \quad \text{при} \quad \eta\ge b, \tag{2.8}$$

что и влечет нужное соотношение. Пусть теперь функция $h:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ является обратной к ω. Функция h строго возрастает и непрерывна на $[0;+\infty)$, причем $h(0) = 0$, $h(\tau) \to +\infty$ при $\tau \to +\infty$ и существует $h'(\tau) > 0$ при $\tau > 0$. Поэтому, выполнив замену $\eta = h(\tau)$ $(\Leftrightarrow \tau = \omega(\eta))$, получим в силу $\varphi_2(\eta)\,d\eta = \omega'(\eta)\,d\eta = d\tau$ равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\varphi_2(\eta)\,d\eta}{t^2+\eta^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\tau}{t^2+h^2(\tau)} \quad \text{при} \quad t>0. \tag{2.9}$$

Продолжим функцию h четным образом на $(-\infty; 0)$. Имеем непрерывную функцию $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой в силу (2.7), (2.9) выполняется (2.3). Отметим, что построение функции h не зависит от κ. Осталось показать, что h удовлетворяет оценке (2.2). Для этого в неравенстве (2.8) возьмем $\theta = h(\tau) \geq b$. Тогда $\omega(\theta) = \tau \geq \omega(b)$ и $\tau \geq \dfrac{h^\delta(\tau) - b^\delta}{\delta}$. Отсюда получаем $h(\tau) \leq (\delta\,\tau + b^\delta)^{1/\delta} \leq c_3(\tau+1)^m$ при $\tau \geq \omega(b)$, где $c_3 = (\delta + b^\delta)^{1/\delta}$, $m = \dfrac{1}{\delta}$. Кроме того, $h(\tau) \leq h(\omega(b)) = b$ при $0 \leq \tau \leq \omega(b)$. Поэтому с учетом четности функции h запишем $|h(\tau)| = h(\tau) \leq c_0(1+|\tau|)^m$ для всех $\tau \in \mathbb{R}$, где $c_0 = c_3 + b$. Оценка (2.2), а с ней и лемма 2.2 доказаны.

В следующих четырех леммах будет показано, что X_ψ является пространством следов в точке нуль абстрактных функций из некоторого пространства $W(h, X)$. Здесь пара X допустимая, функция ψ удовлетворяет условию теоремы 2.1, а функция h взята из леммы 2.2. Это позволит достаточно легко доказать теорему 2.1. Указанный прием называется в теории интерполяции методом следов. Он был разработан Ж.-Л. Лионсом [14, с. 21 – 43] для степенной функции и развит Г. Шлензак [6] (без детализации в доказательствах) для некоторого класса квазиоднородных на $+\infty$ и в нуле функций.

Для гильбертова пространства H обозначим через $L_2(\mathbb{R}, H)$ пространство всех вектор-функций $u : \mathbb{R} \to H$, измеримых (в сильном смысле) на $\mathbb{R}$ и таких, что

$$\|u\|_{L_2(\mathbb{R},H)} = \left(\int \|u(t)\|_H^2\, dt \right)^{1/2} < \infty. \tag{2.10}$$

Рассматривая элементы пространства $L_2(\mathbb{R}, H)$, будем, как обычно, отождествлять вектор-функции, эквивалентные на $\mathbb{R}$ относительно меры Лебега. Известно [15, с. 162], что пространство $L_2(\mathbb{R}, H)$ полно относительно нормы (2.10). Обозначим далее через $C_0^\infty(\mathbb{R}, H)$ множество всех бесконечно дифференцируемых функций $u : \mathbb{R} \to H$, имеющих компактный носитель. Множество $C_0^\infty(\mathbb{R}, H)$ плотно в $L_2(\mathbb{R}, H)$. Для функции $u \in L_2(\mathbb{R}, H)$ рассмотрим ее преобразование Фурье

$$\widehat{u}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\,\tau\,t}\, u(t)\, dt,$$

определенное при каждом $\tau \in \mathbb{R}$ как интеграл Бохнера от H-значной вектор-функции. Известно [14, с. 29], что отображение $u \mapsto \widehat{u}$ $\;(u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, H))$ продолжается по непрерывности до изометрического изоморфизма $L_2(\mathbb{R}, H) \leftrightarrow L_2(\mathbb{R}, H)$. Тем самым прямое преобразование Фурье $\mathcal{F}u = \widehat{u}$ и обратное ему преобразование Фурье $\mathcal{F}^{-1}u$ определены для любой вектор-функции $u \in L_2(\mathbb{R}, H)$.

Пусть теперь пара $X = [X_0, X_1]$ гильбертовых пространств допустимая, а функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу. Обозначим через $W(h, X)$ множество всех таких $u \in L_2(\mathbb{R}, X_1)$, что $h\,\widehat{u} \in L_2(\mathbb{R}, X_0)$. В пространстве $W(h, X)$ введем норму

$$\|u\|_{W(h,X)} = \left(\int \|\widehat{u}(\tau)\|^2_{X_1}\, d\,\tau + \int \|h(\tau)\,\widehat{u}(\tau)\|^2_{X_0}\, d\,\tau\right)^{1/2}.$$

Лемма 2.3. *Пусть пара $X = [X_0, X_1]$ гильбертовых пространств допустимая и измеримая по Лебегу функция $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию а) леммы 2.2. Тогда множество $C_0^\infty(\mathbb{R}, X_1)$ плотно в $W(h, X)$.*

Доказательство проведем методом регуляризации вектор-функции $u \in W(h, X)$. Возьмем такую последовательность (ρ_k) бесконечно дифференцируемых функций $\rho_k : \mathbb{R} \to [0; +\infty)$, что $\displaystyle\int \rho_k(\sigma)\, d\,\sigma = 1$ и $\operatorname{supp} \rho_k \subseteq [0; 1/k]$. Рассмотрим свертку функции ρ_k и вектор-функции $w \in L_2(\mathbb{R}, H)$: $(\rho_k * w)(t) = \displaystyle\int \rho_k(\sigma)\, w(t - \sigma)\, d\,\sigma$, определенную при каждом $t \in \mathbb{R}$ как интеграл Бохнера. Нам понадобятся такие свойства свертки [14, с. 24]: вектор-функция $\rho_k * w : \mathbb{R} \to H$ бесконечно дифференцируемая, причем ее производная $(\rho_k * w)^{(l)} = \rho_k^{(l)} * w \in L_2(\mathbb{R}, H)$ для любого целого $l \geq 0$ и, наконец, $\rho_k * w \to w$ в $L_2(\mathbb{R}, H)$ при $k \to \infty$. Возьмем теперь произвольное $u \in W(h, X)$. Покажем сначала, что $\rho_k * u \to u$ в $W(h, X)$ при $k \to \infty$. Поскольку $u \in L_2(\mathbb{R}, X_1)$, то

$$\rho_k * u \to u \quad \text{в} \quad L_2(\mathbb{R}, X_1) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{2.11}$$

Далее, поскольку $h\,\widehat{u} \in L_2(\mathbb{R}, X_0)$, то $\mathcal{F}^{-1}(h\,\widehat{u}) \in L_2(\mathbb{R}, X_0)$ и $\rho_k * \mathcal{F}^{-1}(h\,\widehat{u}) \to \mathcal{F}^{-1}(h\,\widehat{u})$ в $L_2(\mathbb{R}, X_0)$ при $k \to \infty$. Следовательно, $\mathcal{F}(\rho_k * \mathcal{F}^{-1}(h\,\widehat{u})) \to h\,\widehat{u}$ в $L_2(\mathbb{R}, X_0)$ при $k \to \infty$. Но

$$\mathcal{F}(\rho_k * \mathcal{F}^{-1}(h\,\widehat{u})) = \sqrt{2\pi}\,\widehat{\rho_k} \cdot (h\,\widehat{u}) = h \cdot (\sqrt{2\pi}\,\widehat{\rho_k}\,\widehat{u}) = h \cdot (\widehat{\rho_k * u});$$

значит, $h \cdot (\widehat{\rho_k * u}) \in L_2(\mathbb{R}, X_0)$ и $h \cdot (\widehat{\rho_k * u}) \to h\,\widehat{u}$ в $L_2(\mathbb{R}, X_0)$ при $k \to \infty$. Это вместе с (2.11) влечет предел $\rho_k * u \to u$ в $W(h, X)$ при $k \to \infty$. Возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно доказанному, найдется такой номер $k > \dfrac{1}{\varepsilon}$, что для $v = \rho_k * u$ выполняется

$$\|v - u\|_{W(h,X)} < \varepsilon/2 \tag{2.12}$$

(условие $k > 1/\varepsilon$ нам понадобится при доказательстве леммы 2.5). В неравенстве (2.2) можно считать, что m — целое положительное число. Поскольку, как отмечалось выше в доказательстве, $v^{(2m)} = \rho_k^{(2m)} * u \in L_2(\mathbb{R}, X_1)$, вектор-функция $(1 + \tau^{2m})\,\widehat{v}(\tau) = \mathcal{F}(v + (-1)^m\, v^{(2m)})(\tau)$ аргумента τ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}, X_1)$. Пусть бесконечно дифференцируемая функция $\chi : \mathbb{R} \to [0; +\infty)$ такая, что $\chi(t) = 1$ при $|t| \leq 1$ и $\chi(t) = 0$ при $|t| \geq 2$. Для каждого номера n положим $\chi_n(t) = \chi(t/n)$ при $t \in \mathbb{R}$. Тогда [14, с. 25]

$$\chi_n\, v \to v \quad \text{и} \quad (\chi_n\, v)^{(2m)} \to v^{(2m)} \quad \text{в} \quad L_2(\mathbb{R}, X_1) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2.13}$$

Следовательно, для функций аргумента τ справедливо

$$(1 + \tau^{2m})\widehat{\chi_n\, v}(\tau) =$$

$$= \mathcal{F}(\chi_n\, v + (-1)^m (\chi_n\, v)^{(2m)})(\tau) \to \mathcal{F}(v + (-1)^m v^{(2m)})(\tau) = (1 + \tau^{2m})\widehat{v}(\tau)$$

в $L_2(\mathbb{R}, X_1) \hookrightarrow L_2(\mathbb{R}, X_0)$ при $n \to \infty$. Поэтому в силу (2.2)

$$\left\| h(\widehat{\chi_n v}) - h\widehat{v} \right\|^2_{L_2(\mathbb{R}, X_0)} = \int |h(\tau)|^2 \left\| \widehat{\chi_n v}(\tau) - \widehat{v}(\tau) \right\|^2_{X_0} d\tau \leq$$

$$\leq c \int (1 + \tau^{2m}) \left\| \widehat{\chi_n v}(\tau) - \widehat{v}(\tau) \right\|^2_{X_0} d\tau \to 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда в силу первого предела в (2.13) вытекает существование такого номера n, что для $w = \chi_n v = \chi_n(\rho_k * u) \in C_0^\infty(\mathbb{R}, X_1)$ выполняется неравенство $\|w - v\|_{W(h,X)} < \varepsilon/2$. Следовательно, в силу (2.12) $\|w - u\|_{W(h,X)} < \varepsilon$. Это вследствие произвольности $u \in W(h, X)$ означает, что множество $C_0^\infty(\mathbb{R}, X_1)$ плотно в $W(h, X)$.

Лемма 2.3 доказана.

***Замечание* 2.1.** Можно показать, что при условии леммы 2.3 пространство $W(h, X)$ является полным. Впрочем, этот факт нам не понадобится.

Лемма 2.4. *Пусть пара $X = [X_0, X_1]$ гильбертовых пространств допустимая, а функция ψ удовлетворяет условию теоремы* 2.1. *Тогда для функции h из формулировки леммы* 2.2 *отображение $R : u \mapsto u(0)$ $(u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, X_1))$ продолжается по непрерывности до линейного ограниченного оператора следа $R : W(h, X) \to X_\psi$.*

Доказательство. В силу леммы 2.3 достаточно показать, что $\|u(0)\|_{X_\psi} \leq$ $\leq c \leq \|u\|_{W(h,X)}$ для всех $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, X_1)$ с некоторой постоянной c. Возьмем произвольное $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, X_1)$. Пусть оператор A является порождающим для пары X. Тогда для некоторого числа $\kappa > 0$ спектр самосопряженного в X_0 оператора A расположен на полуоси $[\kappa; +\infty)$. Используя спектральную теорему для самосопряженного оператора [15], с помощью некоторого изометрического изоморфизма $J : X_0 \leftrightarrow L_2(G, d\mu)$ приведем оператор A к виду умножения на функцию $\alpha : G \to [\kappa; +\infty)$. Здесь G — некоторое пространство с конечной мерой μ, функция α μ-измерима и конечна на G относительно μ. Обозначим через $J\widehat{u}$ функцию, которая каждому $\tau \in \mathbb{R}$ ставит в соответствие элемент $J(\widehat{u}(\tau)) \in L_2(G, d\mu)$. Этот элемент для краткости будем далее записывать в виде $J\widehat{u}(\tau)$. Поскольку $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, X_1) \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}, X_0)$, вектор-функция $\widehat{u} : \mathbb{R} \to X_0$, а значит, и вектор-функция $J\widehat{u} : \mathbb{R} \to L_2(G, d\mu)$ суммируемы на $\mathbb{R}$. В силу последнего свойства существует [15, с. 218] такая измеримая на $\mathbb{R} \times G$ комплекснозначная функция $w(\tau, \lambda)$, что $J\widehat{u}(\tau) = w(\tau, \cdot)$ для почти всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $\left(\int J\widehat{u}(\tau)\, d\tau \right)(\lambda) = \int w(\tau, \lambda)\, d\tau$ для почти всех $\lambda \in G$. Функция w называется представителем для $J\widehat{u}$. Отсюда, поскольку

$$u(0) = (\mathcal{F}^{-1}\widehat{u})(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widehat{u}(\tau)\, d\tau \quad \text{в} \quad X_1 \hookrightarrow X_0,$$

имеем

$$(J\, u(0))\,(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int J\, \widehat{u}(\tau)\, d\tau \right)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int w(\tau, \lambda)\, d\tau$$

для почти всех $\lambda \in G$. Теперь

$$\left\| u(0) \right\|^2_{X_\psi} = \left\| u(0) \right\|^2_{X_0} + \left\| \psi(A)\, u(0) \right\|^2_{X_0} =$$

$$= \left\| J\, u(0) \right\|^2_{L_2(G, d\mu)} + \left\| J\, \psi(A)\, u(0) \right\|^2_{L_2(G, d\mu)} =$$

$$= \left\| J\,u(0) \right\|^2_{L_2(G,d\,\mu)} + \left\| \psi(\alpha(\cdot))\,J\,u(0) \right\|^2_{L_2(G,d\,\mu)} =$$

$$= \int\limits_G |(J\,u(0))\,(\lambda)|^2\,d\,\mu(\lambda) + + \int\limits_G |\psi(\alpha(\lambda))\,(J\,u(0))\,(\lambda)|^2\,d\,\mu(\lambda) =$$

$$= \int\limits_G \left(1 + \psi^2(\alpha(\lambda))\right)\,|(J\,u(0))\,(\lambda)|^2\,d\,\mu(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_G \left(1 + \psi^2(\alpha(\lambda))\right)\,\left| \int w(\tau,\lambda)\,d\,\tau \right|^2\,d\,\mu(\lambda).$$

Далее, в силу неравенства Коши и оценки (2.3), справедливой для h по условию, получаем

$$\left| \int w(\tau,\lambda)\,d\,\tau \right|^2 \le \left(\int \frac{\sqrt{\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau)}}{\sqrt{\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau)}}\,|w(\tau,\lambda)|\,d\,\tau \right)^2 \le$$

$$\le \left(\int \frac{d\tau}{\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau)} \right) \int (\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau))|w(\tau,\lambda)|^2 d\tau \le$$

$$\le \frac{c_2(\kappa)}{1 + \psi^2(\alpha(\lambda))} \int (\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau))|w(\tau,\lambda)|^2 d\tau$$

при каждом $\lambda \in G$ (мы здесь также воспользовались тем, что $t = \alpha(\lambda) \ge \kappa$). Таким образом,

$$\left\| u(0) \right\|^2_{X_\psi} \le \frac{c_2(\kappa)}{2\pi} \int \int\limits_G (\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau))\,|w(\tau,\lambda)|^2\,d\,\tau\,d\,\mu(\lambda).$$

С другой стороны,

$$\left\| u \right\|^2_{W(h,X)} = \int \left\| \widehat{u}(\tau) \right\|^2_{X_1} d\,\tau + \int \left\| h(\tau)\,\widehat{u}(\tau) \right\|^2_{X_0} d\,\tau =$$

$$= \int \left\| A\,\widehat{u}(\tau) \right\|^2_{X_0} d\,\tau + \int h^2(\tau)\,\left\| \widehat{u}(\tau) \right\|^2_{X_0} d\,\tau =$$

$$= \int \left\| \alpha \cdot J\,\widehat{u}(\tau) \right\|^2_{L_2(G,d\mu)} d\,\tau + \int h^2(\tau)\,\left\| J\,\widehat{u}(\tau) \right\|^2_{L_2(G,d\mu)} d\,\tau =$$

$$= \int d\tau \int\limits_G \alpha^2(\lambda)\,|w(\tau,\lambda)|^2\,d\mu(\lambda) + \int h^2(\tau)\,d\tau \int\limits_G |w(\tau,\lambda)|^2\,d\,\mu(\lambda) =$$

$$= \int \int\limits_G (\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau))\,|w(\tau,\lambda)|^2\,d\,\tau\,d\,\mu(\lambda).$$

Следовательно, $\left\| u(0) \right\|^2_{X_\psi} \le c_2(\kappa)\,(2\pi)^{-1}\,\left\| u \right\|^2_{W(h,X)}$ для произвольного $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, X_1)$, что и доказывает лемму 2.4.

Лемма 2.5. *Пусть пара* $X = [X_0, X_1]$, *функции* ψ, h *и оператор* R *такие, как в формулировке леммы* 2.4. *Предположим, что вектор-функция* $u \in W(h, X)$ (*после надлежащего исправления ее значений на множестве меры нуль с помощью элементов из* X_0) *является непрерывной в окрестности нуля* X_0*-значной вектор-функцией. Тогда* $Ru = u(0)$.

Доказательство. Возьмем произвольный номер j и обратимся к доказательству леммы 2.3. Там было показано, что для $\varepsilon = \dfrac{1}{j}$ существуют такие номера $k(j) > \dfrac{1}{\varepsilon} = j$ и $n(j)$, что функция $w_j = \chi_{n(j)}\,(\rho_{k(j)} * u) \in C_0^\infty(\mathbb{R}, X_1)$ удовлетворяет неравенству $\|w_j - u\|_{W(h,X)} < \varepsilon = \dfrac{1}{j}$. Здесь неотрицательные и бесконечно дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции $\rho_{k(j)}$ и $\chi_{n(j)}$ обладают следующими свойствами: $\displaystyle\int \rho_{k(j)}(\sigma)\,d\sigma = 1$, $\operatorname{supp}\rho_{k(j)} \subseteq \left[0; \dfrac{1}{k(j)}\right]$, $\chi_{n(j)}(t) = 1$ при $|t| \le n(j)$ и $\chi_{n(j)}(t) = 0$ при $|t| \ge 2\,n(j)$. Таким образом, мы имеем последовательность $(W_j) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}, X_1)$, сходящуюся к u в $W(h, X)$. Поэтому в силу леммы 2.4

$$R\,w_j \to R\,u \quad \text{в} \quad X_\psi \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{2.14}$$

Покажем теперь, что $R\,w_j \to u(0)$ в X_0 при $j \to \infty$. Для каждого номера j на основании определения функции w напишем

$$R\,w_j = w_j(0) = \chi_{n(j)}(0)\,(\rho_{k(j)} * u)(0) = (\rho_{k(j)} * u)(0) =$$

$$= \int \rho_{k(j)}(\sigma)\,u(0 - \sigma)\,d\sigma \quad \text{в} \quad X_1 \hookrightarrow X_0.$$

Отсюда

$$\big\|R\,w_j - u(0)\big\|_{X_0} = \left\|\int \rho_{k(j)}(\sigma)\,u(-\sigma)\,d\sigma - \int \rho_{k(j)}(\sigma)\,u(0)\,d\sigma\right\|_{X_0} \le$$

$$\le \int\limits_0^{1/k(j)} \rho_{k(j)}(\sigma)\,\|u(-\sigma) - u(0)\|_{X_0}\,d\sigma. \tag{2.15}$$

Согласно условию, найдется такой номер j_0, что функция $u : \mathbb{R} \to X_0$ непрерывна на $\left[-\dfrac{1}{j_0}; 0\right]$. Значит, для любого номера $j \ge j_0$ функция $\|u(-\sigma) - u(0)\|_{X_0}$ аргумента $\sigma \in \mathbb{R}$ непрерывна на $\left[0; \dfrac{1}{k(j)}\right] \subseteq \left[0; \dfrac{1}{j_0}\right]$. Поэтому при каждом $j \ge j_0$ в силу формулы среднего значения имеем

$$\int\limits_0^{1/k(j)} \rho_{k(j)}(\sigma)\,\|u(-\sigma) - u(0)\|_{X_0}\,d\sigma =$$

$$= \|u(-\sigma_j) - u(0)\|_{X_0} \int\limits_0^{1/k(j)} \rho_{k(j)}(\sigma)\,d\sigma = \|u(-\sigma_j) - u(0)\|_{X_0} \tag{2.16}$$

для некоторого $\sigma_j \in [\,0; 1/k(j)\,]$. Поскольку $\sigma_j \to 0$ при $j \to \infty$, формулы (2.15), (2.16) вместе с непрерывностью функции $u : \mathbb{R} \to X_0$ в точке нуль влекут $\|R\,w_j -$

$-u(0)\|_{X_0} \leq \|u(-\sigma_j) - u(0)\|_{X_0} \to 0$ при $j \to \infty$. Итак, $R\,w_j \to u(0)$ в X_0 при $j \to \infty$. Отсюда в силу (2.14) и непрерывности вложения $X_\psi \hookrightarrow X_0$ имеем $R\,u = u(0)$.

Лемма 2.5 доказана.

Лемма 2.6. *Пусть пара* $X = [X_0, X_1]$ *и функции* ψ, h *такие, как в формулировке леммы* 2.4. *Тогда оператор следа* R *из этой леммы имеет ограниченный правый обратный оператор* $K\colon X_\psi \to W(h, X)$.

Доказательство. Пусть, как и при доказательстве леммы 2.4, порождающий для пары X оператор A приведен с помощью изометрического изоморфизма J : $X_0 \leftrightarrow L_2(G, d\mu)$ к виду умножения на функцию $\alpha\colon G \to [\kappa; +\infty)$, где число $\kappa > 0$. Положим

$$\theta(t) = \left(\int \frac{d\,\tau}{t^2 + h^2(\tau)} \right)^{-1/2} \quad \text{при} \quad t > 0. \tag{2.17}$$

В силу леммы 2.2 (правое неравенство (2.3)) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости функция θ : $(0; +\infty) \to (0; +\infty)$ непрерывна. Кроме того, в силу левого неравенства (2.3) и неравенства $\psi(t) \leq c\,t$ при $t \geq \kappa$ (см. доказательство леммы 2.1) имеем

$$0 < \theta(t) \leq c_1^{-1/2}(\kappa)\,(1 + \psi^2(t))^{1/2} \leq c_0\,t \quad \text{при} \quad t \geq \kappa \tag{2.18}$$

для некоторого числа $c_0 > 0$. Обозначим через X_2 область определения оператора A^2. Известно [13, с. 251], что X_2 является плотным подмножеством в X_1. Отсюда в силу леммы 2.1 следует, что X_2 — плотное подмножество в X_ψ. Возьмем произвольное $a \in X_2$ и положим

$$w(\tau, \lambda) = \sqrt{2\pi}\; \frac{\theta^2(\alpha(\lambda))\,(Ja)(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau)} \quad \text{при} \quad \tau \in \mathbb{R},\, \lambda \in G. \tag{2.19}$$

Ясно, что $w(\tau, \lambda)$ — измеримая функция по совокупности аргументов. Поскольку $a \in X_2 \subset X_1$, то $\alpha\,J\,a \in L_2(G, d\mu)$. Кроме того, при любых $\tau \in \mathbb{R}$, $\lambda \in G$ с учетом (2.18) для $t = \alpha(\lambda) \geq \kappa$ запишем

$$|\alpha(\lambda)\,w(\tau, \lambda)| = \sqrt{2\pi}\,\alpha(\lambda)\,\frac{\theta^2(\alpha(\lambda))}{\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau)}\,|(Ja)(\lambda)| \leq$$

$$\leq \sqrt{2\pi}\,c_0^2\,\frac{\alpha^2(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau)}\,|\alpha(\lambda)\,(Ja)(\lambda)| \leq \sqrt{2\pi}\,c_0^2\,|\alpha(\lambda)\,(Ja)(\lambda)|.$$

Значит, для каждого $\tau \in \mathbb{R}$ справедливо $\alpha\,w(\tau, \cdot) \in L_2(G, d\mu)$ и, поскольку $\alpha(\lambda) \geq \geq \kappa$, также $w(\tau, \cdot) \in L_2(G, d\mu)$. Это означает, что $J^{-1}w(\tau, \cdot) \in X_1$ для произвольного $\tau \in \mathbb{R}$. Покажем далее, что $J^{-1}w(\tau, \cdot)$, как X_1-значная вектор-функция аргумента $\tau \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}, X_1)$, а $h(\tau)\,J^{-1}w(\tau, \cdot)$, как X_0-значная вектор-функция аргумента $\tau \in \mathbb{R}$, — пространству $L_2(\mathbb{R}, X_0)$. Поскольку вектор-функция $\alpha(\lambda)\,w(\tau, \lambda)$ измеримая по совокупности аргументов и $\alpha\,w(\tau, \cdot) \in \in L_2(G, d\mu)$ для каждого $\tau \in \mathbb{R}$, то [15, с. 215] $\alpha\,w(\tau, \cdot)$ — измеримая $L_2(G, d\mu)$-значная вектор-функция аргумента $\tau \in \mathbb{R}$. Следовательно, $J^{-1}(\alpha\,w(\tau, \cdot))$ — измеримая на $\mathbb{R}$ X_0-значная вектор-функция и поэтому $J^{-1}w(\tau, \cdot) = A^{-1}\,J^{-1}(\alpha\,w(\tau, \cdot))$ — измеримая на $\mathbb{R}$ X_1-значная вектор-функция. Отсюда в силу $X_1 \hookrightarrow X_0$ вытекает, что $J^{-1}w(\tau, \cdot)$ и $h(\tau)\,J^{-1}w(\tau, \cdot)$— измеримые на $\mathbb{R}$ X_0-значные вектор-функции.

Теперь в силу (2.17) – (2.19) имеем

$$\int \big\| J^{-1}\, w(\tau,\cdot)\big\|^2_{X_1}\, d\,\tau + \int \big\| h(\tau)\, J^{-1}\, w(\tau,\cdot)\big\|^2_{X_0}\, d\,\tau =$$

$$= \int \big\| J^{-1}(\alpha\, w(\tau,\cdot))\big\|^2_{X_0}\, d\,\tau + + \int \big\| J^{-1}(h(\tau)\, w(\tau,\cdot))\big\|^2_{X_0}\, d\,\tau =$$

$$= \int \big\| \alpha\, w(\tau,\cdot)\big\|^2_{L_2(G,\,d\,\mu)}\, d\,\tau + \int \big\| h(\tau)\, w(\tau,\cdot)\big\|^2_{L_2(G,\,d\,\mu)}\, d\,\tau =$$

$$= \int d\tau \int\limits_G (\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau)) |w(\tau,\lambda)|^2 d\mu(\lambda) =$$

$$= 2\pi \int d\tau \int\limits_G (\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau)) \left| \frac{\theta^2(\alpha(\lambda))(Ja)(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau)} \right|^2 d\mu(\lambda) \le$$

$$\le \frac{2\,\pi}{c_1(\kappa)} \int d\tau \int\limits_G \frac{\big|\theta(\alpha(\lambda))\,(\,1 + \psi^2(\alpha(\lambda))\,)^{1/2}\,(Ja)(\lambda)\,\big|^2}{\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau)}\, d\mu\,(\lambda) =$$

$$= \frac{2\,\pi}{c_1(\kappa)} \int\limits_G \theta^2(\alpha(\lambda))\,(\,1 + \psi^2(\alpha(\lambda))\,)\, |(Ja)(\lambda)|^2\, d\mu(\lambda) \int \frac{d\,\tau}{\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau)} =$$

$$= \frac{2\,\pi}{c_1(\kappa)} \int\limits_G (\,1 + \psi^2(\alpha(\lambda))\,)\, |(Ja)(\lambda)|^2\, d\mu(\lambda) =$$

$$= \frac{2\,\pi}{c_1(\kappa)} \Big(\big\|\, Ja\, \big\|^2_{L_2(G,\,d\,\mu)} + \big\|\, J\,\psi(A)\,a\, \big\|^2_{L_2(G,\,d\,\mu)} \Big) =$$

$$= \frac{2\,\pi}{c_1(\kappa)} \Big(\big\|\, a\, \big\|^2_{X_0} + \big\|\, \psi(A)\,a\, \big\|^2_{X_0} \Big) = \frac{2\,\pi}{c_1(\kappa)}\, \|a\|^2_{X_\psi}.$$

Итак, поскольку $a \in X_2 \subset X_\psi$, то

$$\int \big\| J^{-1}\, w(\tau,\cdot)\big\|^2_{X_1}\, d\,\tau + \int \big\| h(\tau)\, J^{-1}\, w(\tau,\cdot)\big\|^2_{X_0}\, d\,\tau \le \frac{2\,\pi}{c_1(\kappa)}\, \big\|\, a\, \big\|^2_{X_\psi} < \infty. \quad (2.20)$$

Значит, в частности, вектор-функция $J^{-1}\, w(\tau,\cdot)$ аргумента $\tau \in \mathbb{R}$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}, X_1)$, и поэтому корректно определено $Ka = \mathcal{F}^{-1}(J^{-1}\, w(\tau,\cdot))$ как элемент пространства $L_2(\mathbb{R}, X_1)$. При этом в силу (2.20)

$$\big\|\, Ka\, \big\|^2_{W(h,X)} = \big\|\, \widehat{Ka}\, \big\|^2_{L_2(\mathbb{R},X_1)} + \big\|\, h\,\widehat{Ka}\, \big\|^2_{L_2(\mathbb{R},X_0)} \le \frac{2\,\pi}{c_1(\kappa)}\, \big\|\, a\, \big\|^2_{X_\psi} < \infty.$$

Таким образом, $Ka \in W(h, X)$, причем

$$\big\|\, Ka\, \big\|_{W(h,X)} \le c_3\, \big\|\, a\, \big\|_{X_\psi}, \quad (2.21)$$

где число $c_3 > 0$ не зависит от a.

Покажем теперь, что $TKa = a$. Для этого сначала установим непрерывность вектор-функции $Ka : \mathbb{R} \to X_0$. В силу (2.19), (2.18) запишем

$$\int \big\| J^{-1}\, w(\tau,\cdot) \big\|_{X_0} d\tau = \int \big\| w(\tau,\cdot) \big\|_{L_2(G,\,d\mu)} d\tau =$$

$$= \int d\tau \left(\int\limits_G |w(\tau,\lambda)|^2 \, d\mu(\lambda) \right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{2\pi} \int d\tau \left(\int\limits_G \left| \frac{\theta^2(\alpha(\lambda))(Ja)(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau)} \right|^2 d\mu(\lambda) \right)^{1/2} \le$$

$$\le \sqrt{2\pi} c_0^2 \int d\tau \left(\int\limits_G \frac{\alpha^4(\lambda) |(Ja)(\lambda)|^2}{(\kappa^2 + h^2(\tau))^2} d\mu(\lambda) \right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{2\pi}\, c_0^2 \int \frac{d\tau}{\kappa^2 + h^2(\tau)} \left(\int\limits_G |\alpha^2(\lambda)\,(Ja)(\lambda)|^2 \, d\mu(\lambda) \right)^{1/2} =$$

$$= c_4 \big\| \alpha^2 Ja \big\|_{L_2(G,\,d\mu)} = c_4 \big\| A^2 a \big\|_{X_0} < \infty,$$

поскольку $a \in X_2$ и $c_4 = \sqrt{2\pi}\, c_0^2 \displaystyle\int (\kappa^2 + h^2(\tau))^{-1} \, d\tau < \infty$ (последнее вытекает из правого неравенства (2.3)). Таким образом, $J^{-1}\, w(\tau,\cdot)$ является суммируемой на $\mathbb{R}$ X_0-значной вектор-функцией аргумента τ, и поэтому $Ka = \mathcal{F}^{-1}(J^{-1}\, w(\tau,\cdot))$ является непрерывной на $\mathbb{R}$ X_0-значной вектор-функцией. Следовательно, поскольку $(Ka)(t) = \big(\mathcal{F}^{-1}(J^{-1}\, w(\tau,\cdot))\big)(t) = (2\pi)^{-1/2} \displaystyle\int e^{i\,t\,\tau}\, J^{-1}\, w(\tau,\cdot)\, d\tau$ в X_0 для всех $t \in \mathbb{R}$, в силу леммы 2.5 имеем $RKa = (Ka)(0) = (2\pi)^{-1/2} \displaystyle\int J^{-1}\, w(\tau,\cdot)\, d\tau$ в X_0. Отсюда получаем $JRKa = (2\pi)^{-1/2} \displaystyle\int w(\tau,\cdot)\, d\tau$ в $L_2(G,\, d\mu)$. Далее, поскольку вектор-функция $w(\tau,\lambda)$ аргументов $\tau \in \mathbb{R}$, $\lambda \in G$ является представителем суммируемой на $\mathbb{R}$ функции $w(\tau,\cdot)$ аргумента $\tau \in \mathbb{R}$ и принимающей значения в $L_2(G,\, d\mu)$, в виду последнего равенства и формул (2.19), (2.17) имеем [15, с. 218]

$$(JRKa)\,(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int w(\tau,\lambda)\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \sqrt{2\pi}\; \frac{\theta^2(\alpha(\lambda))\,(Ja)(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau)}\; d\tau =$$

$$= \theta^2(\alpha(\lambda))\,(Ja)(\lambda) \int \frac{d\tau}{\alpha^2(\lambda) + h^2(\tau)} = (Ja)(\lambda) \quad \text{для почти всех} \quad \lambda \in G. \tag{2.22}$$

Следовательно, $RKa = a$ для произвольного $a \in X_2$. Завершим доказательство леммы так. В силу (2.19) отображение $a \mapsto Ka = \mathcal{F}^{-1}(J^{-1}\, w(\tau,\cdot))$ $(a \in X_2)$ линейное. Далее, поскольку X_2 — плотное подмножество в X_ψ, из оценки (2.21) вытекает, что это отображение продолжается по непрерывности до линейного ограниченного оператора $K : X_\psi \to W(h,X)$. Значит, равенство $RKa = a$ $(a \in X_2)$ продолжается по непрерывности на все элементы $a \in X_\psi$. Таким образом, K — правый обратный оператор для R.

Лемма 2.6 доказана.

Теперь перейдем к доказательству теоремы.

***Доказательство теоремы* 2.1.** Пусть функция ψ удовлетворяет условию теоремы 2.1. Возьмем две произвольные допустимые пары $X = [X_0, X_1]$ и $Y = [Y_0, Y_1]$ гильбертовых пространств. Рассмотрим такой линейный ограниченный оператор $T : X_0 \to Y_0$, что его сужение на X_1 является ограниченным оператором $T : X_1 \to Y_1$. Покажем, что сужение отображения T на X_ψ является ограниченным оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$. Пусть функция h такая, как в формулировке леммы 2.2. В силу лемм 2.4, 2.6 существуют такие линейные ограниченные операторы $R_X \colon W(h, X) \to X_\psi$, $K_X \colon X_\psi \to W(h, X)$ и $R_Y \colon W(h, Y) \to Y_\psi$, $K_Y \colon Y_\psi \to W(h, Y)$, что $R_X\, K_X$ и $R_Y\, K_Y$ — тождественные операторы в X_ψ и Y_ψ соответственно. Отметим далее следующее. Возьмем $j = 0; 1$ и для произвольной функции $u : \mathbb{R} \to X_j$ рассмотрим функцию $Tu : \mathbb{R} \to Y_j$, которая каждому $t \in \mathbb{R}$ ставит в соответствие элемент $T(u(t)) \in Y_j$. Из ограниченности оператора $T : X_j \to Y_j$ непосредственно следует, что линейное отображение $u \mapsto Tu$ является ограниченным оператором $T : L_2(\mathbb{R}, X_j) \to L_2(\mathbb{R}, Y_j)$ при $j = 0; 1$. Покажем, что оператор $T : W(h, X) \to W(h, Y)$ ограничен. Возьмем произвольное $u \in W(h, X)$. Поскольку $u \in L_2(\mathbb{R}, X_1)$, то $\widehat{Tu} = T\,\widehat{u}$ в $L_2(\mathbb{R}, Y_1)$. Следовательно, $h\,\widehat{Tu} = h(T\,\widehat{u}) = T(h\,\widehat{u})$ и поэтому

$$\|Tu\|^2_{W(h,Y)} = \|T\,\widehat{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R},Y_1)} + \|T(h\,\widehat{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R},Y_0)} \le$$

$$\le c\left(\|\widehat{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R},X_1)} + \|h\widehat{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R},X_0)}\right) = c\|u\|^2_{W(h,X)},$$

где конечное число $c > 0$ не зависит от $u \in W(h, X)$. Таким образом, линейный оператор $T : W(h, X) \to W(h, Y)$ ограничен. Отсюда с помощью ограниченных операторов $K_X : X_\psi \to W(h, X)$ и $R_Y : W(h, Y) \to Y_\psi$ получаем ограниченный оператор

$$R_Y\, T\, K_X : X_\psi \to Y_\psi. \tag{2.23}$$

Осталось показать, что $R_Y\, T\, K_X\, a = T\, a$ для любого $a \in X_\psi$. Пусть $a \in X_\psi$, $u = K_X\, a \in W(h, X)$. Согласно лемме 2.3, существует такая последовательность $(u_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}, X_1)$, что $u_k \to u$ в $W(h, X)$ при $k \to \infty$. Поскольку $T\, u_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}, Y_1)$, то

$$R_Y\, T\, u_k = T(u_k(0)) = T\, R_X\, u_k. \tag{2.24}$$

Кроме того,

$$R_Y\, T\, u_k \to R_Y\, T\, u \quad \text{в} \quad Y_\psi \hookrightarrow Y_0 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{2.25}$$

и предел $R_X\, u_k \to R_X\, u$ в $X_\psi \hookrightarrow X_0$ при $k \to \infty$ влечет сходимость

$$T\, R_X\, u_k \to T\, R_X\, u \quad \text{в} \quad Y_0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{2.26}$$

Теперь из формул (2.24) – (2.26) получаем равенство $R_Y\, T\, u = T\, R_X\, u$. Отсюда в силу равенства $u = K_X\, a$ получаем $R_Y\, T\, K_X\, a = T\, R_X\, K_X\, a = T\, a$, поскольку K_X — правый обратный оператор к R_X. Таким образом, сужение отображения T на X_ψ совпадает с ограниченным оператором (2.23), т. е. оператор $T : X_\psi \to Y_\psi$ ограничен.

Теорема 2.1 доказана.

Отметим, что в дальнейшем нам неоднократно придется интерполировать прямые произведения конечного числа гильбертовых пространств. При этом будем ссылаться на следующий факт, вытекающий из определения пространства X_ψ (см. [6, с. 53], теорема 4).

Предложение 2.1. *Пусть дано конечное число k допустимых пар $\big[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}\big]$, $j = 1, \ldots, k$, гильбертовых пространств. Предположим, что функция ψ положительна и измерима по Борелю на $(0, +\infty)$. Тогда справедливо следующее равенство пространств с равенством норм в них*:

$$\left[\prod_{j=1}^{k} X_0^{(j)}, \prod_{j=1}^{k} X_1^{(j)}\right]_\psi = \prod_{j=1}^{k} \left[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}\right]_\psi.$$

1. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Эллиптические операторы в уточненной шкале функциональных пространств // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 5. – С. 689 – 696.
2. *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.
3. *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3 – 74.
4. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М.: Мир, 1986. – 447 с.
5. *Edmunds D. E., Triebel H.* Function spaces, entropy numbers, differential operators // Cambridge Tracts Math. – 1999. – № 120. – 252 p.
6. *Шлензак Г.* Эллиптические задачи в уточненной шкале пространств // Вестн. Моск. ун-та. – 1974. – № 4. – С. 48 – 58.
7. *De Haan L.* On regular variation and its application to the weak convergence of sample extremes // Math. Cent. Tracts. – 1970. – № 32. – 124 p.
8. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.
9. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.
10. *Geluk J. L., de Haan L.* Regular variation, extensions and Tauberian theorems // CWI Tract. – 1987. – № 40. – 132 p.
11. *Reshnick S. I.* Extreme values, regular variation and point processes. – New York: Springer, 1987. – 320 p.
12. *Maric V.* Regular variation and differential equations. – New York: Springer, 2000. – 127 p.
13. *Функциональный* анализ / Под общ. ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
14. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.
15. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. – Т. 1. Общая теория. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 896 с.; Т. 2. Спектральная теория. – М.: Мир, 1966. – 1064 с.

Получено 11.10.2005