УДК 517.95

Р. М. Таранец, А. Е. Шишков
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

СИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ ТОНКИХ ВЯЗКИХ ПЛЕНОК С НЕЛИНЕЙНОЙ КОНВЕКЦИЕЙ

For multidimensional equations of flow of thin cappilary films with nonlinear diffusion and convection, we prove the existence of a strong nonnegative generalized solution of the Cauchy problem whose initial function is a nonnegative Radon measure with a compact support. We establish the exact upper bound global in time for the speed of propogation of a support of this solution. We sepately consider cases where the degeneracy of the equation satisfies the conditions of “strong” and “weak” slippage to interface. In particular, in the case of “weak” slippage to interface, we obtain the exact estimate of the decay of L^2-norm of gradient of the solution that, as is well known, does no take place in the case of initial functions with noncompact supports..

Для багатовимірних рівнянь течії тонких капілярних плівок з нелінійною дифузією та конвекцією доведено існування сильного невід’ємного узагальненого розв’язку задачі Коші з початковою функцією — невід’ємною мірою Радона, яка має компактний носій. Знайдено точну глобальну за часом оцінку зверху для швидкості розповсюдження носія цього розв’язку. Розглянуто окремо випадки, коли виродження рівняння відповідає умовам „сильного” та „слабкого” проковзування. Зокрема, у випадку „слабкого” проковзування отримано точну оцінку згасання L^2-норми градієнта розв’язку, яка, як відомо, не має місця у випадку початкових функцій з некомпактними носіями.

1. Введение. Изучается задача Коши для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения четвертого порядка:

$$u_t + \operatorname{div}(a_0 u^n \nabla\Delta u - a_1 u^m \nabla u) = \overrightarrow{\chi} \cdot \nabla b(u), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = \mu_0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

$$|b'(z)| \leqslant c\,|z|^{\lambda-1} \quad \forall z \in \mathbb{R}^1, \quad b(0) = 0, \quad \lambda > 0, \quad c < \infty, \tag{1.3}$$

где $u = u(t,x)$, $n > 0$, $m \in \mathbb{R}^1$, $N \leqslant 3$, $a_0 > 0$, $a_1 \geqslant 0$, $\overrightarrow{\chi} = \overrightarrow{(\chi_1, \ldots, \chi_N)} \in \mathbb{R}^N$, μ_0 — неотрицательная мера Радона. Уравнения вида (1.1) появляются при моделировании различных физических процессов в теории материалов, теории пластичности, в частности, при описании течения тонких вязких пленок по твердой поверхности (см. [1–8]). В последней модели параметр $n > 0$ определяет характер контакта жидкости и твердой поверхности: при $n = 3$ — касание без проскальзывания, при $n \in [2,3)$ — „слабое” проскальзывание, при $n \in (0,2)$ — „сильное” проскальзывание.

Уравнение (1.1) не относится к классу квазилинейных дивергентных параболических уравнений высокого порядка, к которым применимы общие хорошо развитые методы, например методы теории монотонных операторов (см. [9]). Построение теории уравнений вида (1.1) было начато в известной работе F. Bernis и A. Friedman [10]. В ней изучалась смешанная задача Коши – Неймана для одномерного уравнения следующего вида:

$$u_t + \operatorname{div}(|u|^n \nabla\Delta u) = 0. \tag{1.4}$$

Было определено обобщенное решение этой задачи и доказано существование неотрицательного обобщенного решения при произвольной неотрицательной начальной функции из H^1. Важное свойство неотрицательности решения выделяет класс уравнений структуры (1.1) из множества параболических уравнений высокого порядка. Большое количество работ было посвящено описанию качественных свойств решений, зависящих от параметра $n > 0$ и связанных с указанной неотрицательностью строящихся решений, которая, в свою очередь, является естественной для конкретных физических приложений (см., например, [11 – 15]). В частности, в работе [13] показано, что при $n \in (0,3)$, $N = 1$ построенное неотрицательное решение для (1.4) имеет оптимальную регулярность. Регулярность этого решения соответствует регулярности решения типа источника (с $u(0,x) = \delta_0$, где δ_0 — функция Дирака), построенного в [16] при $N = 1$ и в [17] при $N = 2, 3$. В этих работах показано также, что при $n \geqslant 3$ такого решения с конечной массой не существует. Для одномерного уравнения (1.1) с $b(u) = 0$ при $n > 0$ и $0 < m < 1$ вопросы разрешимости и качественного поведения решений изучались в [3, 18 – 20], разрешимость и асимптотическое поведение границы носителя решения одномерного уравнения тонких пленок с нелинейной конвекцией ((1.1) с $a_1 = 0$) изучена в [21].

Первые исследования вырождающихся уравнений четвертого порядка типа уравнения тонких пленок и уравнения Каана – Хиллиарда были осуществлены, соответственно, в работах G. Grün [6] и C. M. Elliot, H. Garke [5], где были построены неотрицательные обобщенные решения соответствующих начально-граничных задач в многомерных областях. В дальнейшем эти исследования были продолжены для различных классов уравнений вида (1.1) в работах [22 – 26]. Так, решения задачи Коши с финитными неотрицательными начальными данными из пространства H^1 были построены для уравнения (1.4) при $N \leqslant 3$, $n \in (1/8, 3)$ в [11, 14, 23, 26], для уравнения (1.1) с $a_1 = 0$, $n \in (0,3)$, $N = 1$, $\lambda \in (\max\{3n/4 - 1, 1/8\}, 9/2)$ в [21], для уравнения (1.1) при $m > 0$, $n \in \big(1/8, 2\big)$, $\lambda \in (\max\{1, (3n-1)/4\}, (5N + +8)/(4N) + \min\{n, 5/4\})$, если $N < 3$, и $\lambda \in (\max\{1, (3n-1)/4\}, 2 + \min\{n, 5/4\})$, если $N = 3$, в [25].

В работе R. Dal Passo, H. Garcke [27] для уравнения (1.4) с $n \in (0,2)$, $N = 1$ было впервые построено неотрицательное обобщенное сохраняющее массу решение задачи (1.1) – (1.3) с начальной функцией — мерой Радона. На многомерные ($N \leqslant 3$) уравнения (1.1) с $b(u) = 0$ этот результат был обобщен в [24].

***Замечание* 1.1.** Отметим, что используемый в указанных работах термин „решение задачи Коши” имеет, в определенной степени, условный характер. Фактически речь идет о решениях задачи с неизвестной свободной границей $\partial \mathrm{P}$ ($\mathrm{P} = \{(t,x) : u(t,x) > 0\}$), на которой выполняются граничные условия:

$$u = \nabla u \cdot \vec{n} = (a_0 u^n \nabla \Delta u - a_1 u^m \nabla u - \vec{\chi} b(u)) \cdot \vec{n} = 0.$$

До сих пор остается открытой проблема описания точных классов функций, в которых построенные решения являются единственными. Поэтому вполне допустимо существование незнакоопределенных, с большей гладкостью, чем построенные выше, решений, имеющих, по этой причине, большее основание считаться решениями задачи Коши.

В настоящей работе в случае „сильного” проскальзывания ($0 < n < 2$) на основе результатов из [24, 25, 27] построено глобальное сильное неотрицательное решение задачи (1.1) – (1.3) с начальной функцией — произвольной мерой Радона, имеющей компактный носитель. Получены оценки убывания этого решения в различных интегральных нормах. В четвертом пункте изучен случай „слабого” проскальзывания ($2 \leqslant n < 3$). Построенное при этом решение является новым даже в случае многомерного ($N \leqslant 3$) уравнения (1.4) (т. е. при $a_1 = 0$, $b(u) = 0$). Основным в этом построении является не зависящая от ε доказанная в работе точная оценка (4.22) убывания по t нормы градиентов $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon(t,x)|^2 dx$ приближающих решений $u_\varepsilon(t,x)$, имеющих равномерную по ε оценку сверху скорости распространения по t носителей. Эта оценка является весьма деликатной. Как показано в [27], такая оценка в принципе не может иметь места $\Big($пример решения $u(t,x)$: $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(t,x)|^2 dx = \infty \ \forall\ t > 0\Big)$, если мера μ_0 имеет некомпактный носитель.

2. Формулировка основных результатов. Пусть $Q_{t_1}^{t_2} = (t_1,t_2)\times\mathbb{R}^N$, $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < r\}$, $D(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 < r\}$, для $N \times N$-матрицы A и векторов $a, b \in \mathbb{R}^N$ определим $\langle a, A, b\rangle := \sum_{i,j=1}^N a_i A_{ij} b_j$, χ_A — характеристическая функция множества A, для произвольной измеримой функции $v(t,x)$ определим множество положительности $\mathrm{P} := \mathrm{P}(v) = \{v > 0\} = \{(t,x) \in \mathrm{Dom}(v) : v(t,x) > 0\}$, $C_c^k(Q) := \{v \in C^k(Q) : \operatorname{supp} v \subset Q\}$, $H^k(\mathbb{R}^N) := W_2^k(\mathbb{R}^N)$; $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$,

$$\Psi_0(z) := \begin{cases} \dfrac{z^{m-n+2}}{(m-n+1)(m-n+2)} + \dfrac{R^{m-n+1}}{m-n+2} - \dfrac{R^{m-n+1}}{m-n+1} z, & \\ & m-n+2 \neq 0,1, \\ -\ln z + z - 1, & m-n+2 = 0, \\ z \ln z - z + 1, & m-n+2 = 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $R = 0$, если $m - n + 1 > 0$, и $R = 1$, если $m - n + 1 < 0$. В случаях, когда из контекста понятно, по какой области проводится интегрирование, соответствующие дифференциалы будем опускать.

Определение 2.1. *Пусть $N \leqslant 3$, μ_0 — неотрицательная мера Радона в $\mathbb{R}^N$, $m > 0$, $n > 0$, $\lambda > 0$. Будем называть неотрицательную функцию $u(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$ слабым обобщенным решением задачи* (1.1) – (1.3)*, если*:

1) *$\chi_\mathrm{P} u^{n-2}|\nabla u|^3$, $\chi_\mathrm{P} u^{n-1}|\nabla u|^2$, $u^n|\nabla u|$, $u^m|\nabla u|$ и $b(u)$ принадлежат пространству $L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty); L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$, где $P = P(u)$;*

2) *для любой функции $\zeta \in C_c^3([0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$ имеет место равенство*

$$-\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u\zeta_t - \int_{\mathbb{R}^N} \zeta(0,x)\, d\mu_0(x) + \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} \overrightarrow{\chi} \cdot \nabla\zeta\, b(u) =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} a_0 \iint\limits_{\mathrm{P}(u)} u^{n-2}|\nabla u|^2 \nabla u \nabla\zeta + \frac{n}{2} a_0 \iint\limits_{\mathrm{P}(u)} u^{n-1}|\nabla u|^2 \Delta\zeta +$$

$$+ na_0 \iint\limits_{\mathrm{P}(u)} u^{n-1} \left\langle \nabla u, D^2\zeta, \nabla u \right\rangle + a_0 \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^n \nabla u \nabla \Delta \zeta -$$

$$- a_1 \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^m \nabla u \nabla \zeta. \qquad (2.2)$$

***Замечание* 2.1.** Концепция слабых решений для многомерных уравнений типа тонких пленок была предложена в [5, 6, 22, 24].

Теорема 2.1. *Пусть* $m > 0$, $1/8 < n < 2$,

$$\max\left\{1, \frac{3n}{4}\right\} < \lambda < \frac{3nN+2}{4N} + \frac{1}{4}\max\left\{n + \frac{2}{N}, m\right\} \qquad (2.3)$$

и μ_0 *— неотрицательная мера Радона с конечной массой такая, что* $\operatorname{supp}(\mu_0)$ *компактен. Тогда существует решение* $u(t,x)$ *задачи* (1.1) – (1.3) *из определения* 2.1 *такое, что*:

i) *для любого* $q' \in \Delta_1 := \left(\max\left\{1, \frac{2}{n+1}\right\}, \frac{4N}{2N+n(N-2)}\right)$ ($\Delta_1 := \{2\}$, *если* $N = 1$) *существует вектор-функция* $\overrightarrow{J} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; L^{q'}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N))\ \forall\, q' \in \Delta_1$ *такая, что*

$$u_t = -\operatorname{div}\overrightarrow{J} + \overrightarrow{\chi} \cdot \nabla b(u) \text{ в } L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+; (W^1_q(\mathbb{R}^N))^*), \quad q = \frac{q'}{q'-1}; \qquad (2.4)$$

ii) *для произвольного*

$$\alpha \in \Delta_{n,\lambda} := \left((1/2-n)_+, \min\{(n+1)/3, 2-n\}\right), \qquad (2.5)$$

дополнительно удовлетворяющего условию $\lambda > \max\left\{\frac{3(\alpha+n)}{4}, 1\right\}$ (*легко проверить, что для* λ *из интервала* (2.3) *множество таких* α *непусто*), *имеют место включения:*

$$u^{m-n+2} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^N)), \qquad u^{\frac{\alpha+n+1}{4}} \in L^4_{\mathrm{loc}}([0,\infty); W^1_4(\mathbb{R}^N)),$$
$$u^{\frac{\alpha+n+1}{2}} \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^N)), \qquad u^{\frac{\alpha+m+1}{2}} \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^N));$$

iii) $u(t,.) \underset{t\to 0}{\overset{*}{\rightharpoonup}} \mu_0$, *т. е.* $\int_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\varphi(x)\,dx \underset{t\to 0}{\to} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x)\,d\mu_0(x)\ \forall\,\varphi \in C^0_c(\mathbb{R}^N)$;

iv) $\int_{\mathbb{R}^N} u(t) = \int_{\mathbb{R}^N} d\mu_0$ *для любого* $t > 0$.

Определение 2.2. *Сильным решением задачи* (1.1) – (1.3) *будем называть слабое решение* $u(t,x)$ *из определения* 2.1, *дополнительно имеющее регулярность* ii) *из теоремы* 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть* μ_0 *— неотрицательная мера Радона с компактным носителем и* $\operatorname{supp}(\mu_0) \subset D(0,R_0)$, $R_0 < \infty$. *Тогда построенное в теореме* 2.1 *сильное решение* $u(t,x)$ *имеет компактный носитель для всех* $t > 0$, *причем* $\operatorname{supp} u(t,.)$ *распространяется непрерывно по* t *так, что существует неубывающая непрерывная функция* $\Gamma(t)$, $\Gamma(0) = 0$, *такая, что* $\operatorname{supp} u(t,.) \subset D(0, R_0 + \Gamma(t))$ *и имеют место следующие оценки:*

a) *универсальные оценки фронта носителя:*

$$\Gamma(t) \leqslant c_1 \max\left\{\Gamma_0(t), t^{1-\frac{N(\lambda-1)}{nN+4}}\right\} \quad \forall\, t>0, \quad 1<\lambda\leqslant n+1+\frac{4}{N},$$

или

$$\Gamma(t) \leqslant c_1 \max\left\{\Gamma_0(t), t^{1-\frac{N(\lambda-1)}{mN+2}}\right\} \quad \forall\, t>0, \quad 1<\lambda\leqslant m+1+\frac{2}{N};$$

b) *оценки „медленного” фронта, соответствующего* $\chi_1 \geqslant 0$, $b(s)>0$*:*

i) *если* $\chi_1 = 0$ *или* $\chi_1>0$, $b(u)\geqslant d_0\, u^\lambda$, $d_0>0$ *и* $\lambda<\min\{n+1, m+1\}$, *то*

$$\Gamma(t)\leqslant c_3\Gamma_0(t) \quad \forall t>0;$$

ii) *если* $\chi_1>0$, $b(u)\geqslant d_0\, u^\lambda$, $d_0>0$ *и* $\lambda>\max\{n+1,m+1\}$, *то*

$$\Gamma(t)\leqslant c_2\min\left\{\Gamma_0(t), \max\left\{t^{\frac{\lambda-n-1}{4(\lambda-1)-n}}, t^{\frac{\lambda-m-1}{2(\lambda-1)-m}}\right\}\right\} \quad \forall\, t>0;$$

iii) *если* $\chi_1>0, b(u)\geqslant d_0\, u^\lambda, d_0>0$ *и* $n{+}1<\lambda<m{+}1$ (*или* $m{+}1<\lambda<n{+}1$), *то*

$$\Gamma(t)\leqslant c_4\Gamma_0(t)\ \forall\, t>0,$$

где $\Gamma_0(t) = \max\left\{t^{1/(nN+4)},\, t^{1/(mN+2)}\right\}$, $0<c_i=c_i(n,\, m,\, \lambda,\, N,\, d_0,\, \|\mu_0\|_1)$.

***Замечание* 2.2.** Выполняя соответствующую линейную замену координат, произвольное направление $\vec{\ell}$ можно перевести в направление $(x_1,0,0)$ и тем самым получить оценки распространения supp $u(t,.)$ в направлении $\vec{\ell}$.

Теорема 2.3. *Пусть* μ_0 *— неотрицательная мера Радона с компактным носителем и* supp $(\mu_0)\subset B(0,R_0)$, *кроме того,*

$$n\in[2,3), \quad \lambda\in\left(1+\frac{n}{4}, 2+\frac{1}{N}\right), \quad a_1=0. \tag{2.6}$$

Тогда существует локальное по $t\in(0,T_{\rm loc})$ *сильное решение* $u(t,x)$ *задачи* (1.1)–(1.3) *такое, что*:

i) *для произвольного* $\alpha\in(-1,2-n)$ *имеют место включения*

$$u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\in L^4_{\rm loc}((0,T_{\rm loc});W^1_4(\mathbb{R}^N)), \qquad u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\in L^2_{\rm loc}((0,T_{\rm loc});H^2(\mathbb{R}^N));$$

ii) supp $u(t,.)$ *компактен для любого* $t\in[0,T_{\rm loc}]$ *и* supp $u(t,.)\subset B(0,R_0+\Gamma(t))$ *с* $\Gamma(t)\leqslant ct^{\frac{1}{N(n+1)+3}}$, *где* $0<c=c(n,\,\lambda,\,N,\,\|\mu_0\|_1)$ *и* λ *из* (2.6) *дополнительно удовлетворяет условию* $\lambda>\dfrac{n+2}{2}$;

iii) *из теоремы* 2.1;

iv) *из теоремы* 2.1.

3. Случай „сильного” проскальзывания: $0<n<2$. ***Доказательство теоремы* 2.1** начнем с регуляризации начальной функции μ_0. Выберем последовательность $\{u_{0\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ неотрицательных функций из $H^1(\mathbb{R}^N)\cap L^{m-n+2}(\mathbb{R}^N)$ с компактным носителем таких, что

$$u_{0\varepsilon}\xrightarrow{*}\mu_0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N}u_{0\varepsilon}=\int\limits_{\mathbb{R}^N}d\mu_0, \ \operatorname{supp}(u_{0\varepsilon})\subset\operatorname{supp}(\mu_0)+B(0,\varepsilon). \tag{3.1}$$

Пусть $u_\varepsilon(t,x)$ — решение задачи (1.1) – (1.3) с начальной функцией $u_{0\varepsilon}$, построенное в теореме A.1. Из закона сохранения массы для u_ε следует, что последовательность

$$\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \quad \text{равномерно ограничена в} \quad L^\infty([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^N)). \tag{3.2}$$

Поскольку $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ удовлетворяет оценкам v) – vii) из леммы A.3 с правой частью, не зависящей от $\varepsilon > 0$, то

$$\{\nabla u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \quad \text{ограничена в} \quad L^\infty_{\text{loc}}((0,\infty); L^2(\mathbb{R}^N)), \tag{3.3}$$

$$\{\Psi_0(u_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0} \quad \text{ограничена в} \quad L^\infty_{\text{loc}}((0,\infty); L^1(\mathbb{R}^N)). \tag{3.4}$$

Из (3.3) в силу неравенства Ниренберга – Гальярдо [29] следует равномерная ограниченность

$$\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \text{ в } L^\infty_{\text{loc}}((0,\infty); L^q(\mathbb{R}^N)) \quad \forall q < \infty, \quad N < 3 \quad \text{и} \quad \forall q < 6, \quad N = 3. \tag{3.5}$$

Из неравенства (A.2) (с $\zeta = 1$) для любого α из (2.5) имеем

$$\{u_\varepsilon^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\}_{\varepsilon>0} \text{ ограничена в } L^2_{\text{loc}}((0,\infty); H^2(\mathbb{R}^N)), \tag{3.6}$$

$$\{u_\varepsilon^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\}_{\varepsilon>0} \text{ ограничена в } L^4_{\text{loc}}((0,\infty); W^1_4(\mathbb{R}^N)), \tag{3.7}$$

$$\{u_\varepsilon^{\frac{\alpha+m+1}{2}}\}_{\varepsilon>0} \text{ ограничена в } L^2_{\text{loc}}((0,\infty); H^1(\mathbb{R}^N)). \tag{3.8}$$

Из п. iv) теоремы A.1 в силу (A.3), оценок v) – vii) из леммы A.3 и неравенства iii) из леммы A.4 получаем

$$\{\overrightarrow{J}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \quad \text{равномерно ограничена в} \quad L^2_{\text{loc}}((0,\infty); L^{q'}(\mathbb{R}^N)) \tag{3.9}$$

для любого $q' \in \Delta_1$ (Δ_1 взято из п. i) теоремы 2.1) и λ из (2.3). Из (3.9) и неравенства ii) из леммы A.4, в частности, следует, что последовательность

$$\{\partial_t u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \quad \text{ограничена в} \quad L^2_{\text{loc}}((0,\infty); (W^1_q(\Omega))^*), \quad q = \frac{q'}{q'-1}. \tag{3.10}$$

Интегрируя по времени неравенства (A.3), находим, что

$$\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \quad \text{равномерно ограничена в} \quad L^q_{\text{loc}}([0,\infty); L^q(\mathbb{R}^N)) \tag{3.11}$$

для любого q: $1 < q < 1 + \max\{n + 4/N,\ m + 2/N\}$.

На основании априорных оценок (3.2) – (3.11), по аналогии с [24, 27], осуществляются предельные переходы по $\varepsilon \to 0$. Покажем такую сходимость в новом, по сравнению с [24], слагаемом из (2.2), связанном с конвективным переносом. Заметим, что

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \overrightarrow{\chi} \cdot \nabla\zeta\, b(u_\varepsilon) =$$

$$= \int_\sigma^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \overrightarrow{\chi} \cdot \nabla\zeta\, b(u_\varepsilon) + \int_0^\sigma \int_{\mathbb{R}^N} \overrightarrow{\chi} \cdot \nabla\zeta\, b(u_\varepsilon) =: I_1(\sigma) + I_2(\sigma) \quad \forall \sigma > 0.$$

Сначала перейдем к пределу по $\varepsilon \to 0$ в интегралах $I_i(\sigma)$. Очевидно, $b(u_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\to}$ $\underset{\varepsilon\to 0}{\to} b(u) \leqslant c\, u^\lambda$ почти всюду в $(0,\infty)\times\mathbb{R}^N$. Из (3.11) следует равномерная по $\varepsilon > 0$ ограниченность мажорирующей последовательности $\{u_\varepsilon^\lambda\}_{\varepsilon>0}$ в $L^{1+\gamma}_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$ для λ из (2.3) и достаточно малого $\gamma > 0$. Отсюда, учитывая, что $u_\varepsilon^\lambda \underset{\varepsilon\to 0}{\to} u^\lambda$ почти всюду в $(0,\infty)\times\mathbb{R}^N$, в силу теоремы Витали получаем

$$u_\varepsilon^\lambda \underset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} u^\lambda \quad \text{в} \quad L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times\mathbb{R}^N).$$

Применяя обобщенную лемму Лебега, устанавливаем

$$b(u_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} b(u) \quad \text{в} \quad L^1_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times\mathbb{R}^N),$$

откуда следует, что

$$I_1(\sigma) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \int\limits_\sigma^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^N} \overrightarrow{\chi}\cdot\nabla\zeta\, b(u).$$

Из неравенства i) леммы A.4 вытекает, что $|I_2(\sigma)| \leqslant \bar{\bar{o}}_\sigma$, где $\bar{\bar{o}}_\sigma$ равномерно ограничено по $\varepsilon > 0$ и $\bar{\bar{o}}_\sigma \underset{\sigma\to 0}{\to} 0$. Таким образом, учитывая произвольность выбора $\sigma > 0$, получаем необходимую сходимость.

Рассуждая, как и в [27], находим подпоследовательность $u_\varepsilon(t,x)$ решений задачи (1.1)–(1.3) с начальными функциями $u_{0\varepsilon}$, которые сходятся к решению $u(t,x)$ этой задачи, имеющему свойства i), ii) из теоремы 2.1.

Покажем справедливость свойства iii). Положим в тождестве (2.2) в качестве пробной функции $\zeta = \varphi_{h,t}(\tau,x)$, где

$$\varphi_{h,t}(\tau,x) = \varphi(x)\xi_{h,t}(\tau), \qquad \varphi(x)\in C_c^3(\mathbb{R}^N),$$

$$\xi_{h,t}(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau\leqslant t,\\ 1-\dfrac{\tau-t}{h}, & \text{если } t<\tau<t+h,\\ 0, & \text{если } \tau\geqslant t+h.\end{cases}$$

В силу (3.3), (3.10) и леммы о компактности J. Simon (см., например, [5]) решение $u(t,x)\in C^0_{\mathrm{loc}}((0,\infty);L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$, поэтому

$$-\lim_{h\to 0}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(\tau,x)(\varphi_{h,t}(\tau,x))_\tau\, dxd\tau =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int\limits_t^{t+h}\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(\tau,x)\varphi(x)\,dxd\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\varphi(x)\,dx$$

для всех t. Учитывая, что $\chi_{\mathrm{P}} u^{n-2}|\nabla u|^3$, $\chi_{\mathrm{P}} u^{n-1}|\nabla u|^2$, $u^n|\nabla u|$, $u^m|\nabla u|$ и $b(u)$ принадлежат пространству $L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty)\times\mathbb{R}^N)$, из равенства (2.2), после предельного перехода по $h\to 0$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(t,x)\varphi(x)\,dx \underset{t\to 0}{\to} \int\limits_{\mathbb{R}^N}\varphi(x)\,d\mu_0(x) \quad \forall\,\varphi\in C_c^3(\mathbb{R}^N).$$

Поскольку $u(t,x) \in C^0_{\text{loc}}((0,\infty); L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N))$, в тождестве (2.2) в качестве пробной функции, как легко проверить, можно положить $\zeta = \chi_{[0,\,t]}\varphi_R(x)$, $R \geqslant 1$, где $\varphi_R(x) \in C^3(\mathbb{R}^N)$ такая, что $\varphi_R(x) = 1$, если $x \in B(0,R)$, $\varphi_R(x) = 0$, если $x \in \mathbb{R}^N \backslash B(0,2R)$, $0 \leqslant \varphi_R(x) \leqslant 1$, если $x \in B(0,R) \backslash B(0,2R)$, и

$$|\nabla \varphi_R| \leqslant \frac{c}{R}, \qquad |D^2 \varphi_R| \leqslant \frac{c}{R^2}, \qquad |D^3 \varphi_R| \leqslant \frac{c}{R^3}.$$

Здесь постоянная c не зависит от R и x. Переходя в получающемся равенстве к пределу при $R \to \infty$, как и в работе [27], приходим к свойству iv).

Теорема 2.1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.2.** В работе [28] исследовалась эволюция носителя решения задачи (1.1) – (1.3) с начальной функцией из H^1 и были получены оценки a), ii) с постоянными, зависящими только от L^1-нормы начальной функции и параметров задачи. При их получении существенно использовалось локальное *энтропийное* неравенство (A.2). Таким образом, приближая, как и в теореме 2.1, начальную функцию μ_0 функциями $u_{0\varepsilon}$ из (3.1), затем переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$ в неравенстве (A.2) и применяя при этом оценку iv) из леммы A.4 к нелинейному конвективному члену, как и в работе [28], получаем необходимые оценки a), ii). Не зависящие от λ оценки i), iii) устанавливаются аналогично [24] в силу того, что в соответствующем локальном энтропийном неравенстве слагаемое, связанное с конвективным членом, входит в левую часть неравенства с положительным знаком и поэтому может быть опущено.

Аналогичные оценки движения фронта носителя решения задачи (1.1) – (1.3) для одномерного уравнения (1.1) с $a_1 = 0$ и начальной функцией из H^1 были найдены в работе [21].

4. Случай „слабого" проскальзывания: $2 \leqslant n < 3$. ***Доказательство теоремы* 2.3.** В начале докажем свойство конечности скорости распространения носителя произвольного *сильного* решения вспомогательной задачи Неймана для уравнения (1.1) с $a_1 = 0$ в ограниченной области Ω с гладкой границей и произвольной неотрицательной начальной функцией $u_0(x) \in H^1(\Omega)$ такой, что $\operatorname{supp} u_0(x) \subset \subset B(0,R_0) \Subset \Omega$.

Следуя [23], регуляризуем (параметры $\varepsilon_2 \to 0,\ \sigma_1 \to 0$) уравнение (1.1) с $a_1 = 0$ и введем в него „штрафующий" член (параметр $\varepsilon_1 \to 0$), связанный со значениями решения из произвольного интервала $[\delta, L]$, $\delta > 0$, $L < \infty$:

$$U_t + \operatorname{div}((|U|^n + \varepsilon_2)\nabla(\Delta U - \sigma_1 U_t)) + \frac{1}{\varepsilon_1}((U-L)_+ - (\delta - U)_+) =$$
$$= \overrightarrow{\chi}\nabla b(U),\ (t,x) \in (0,T) \times \Omega. \tag{4.1}$$

Решение $U(t,x) = U_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\sigma_1,\delta,L}$ задачи Неймана для уравнения (4.1) понимается в смысле интегрального тождества

$$0 = \iint\limits_{Q_T} U_t \zeta + \frac{1}{\varepsilon_1} \iint\limits_{Q_T} ((U-L)_+ - (\delta - U)_+)\zeta -$$
$$- \iint\limits_{Q_T} (|U|^n + \varepsilon_2)\nabla(\Delta U - \sigma_1 U_t)\nabla\zeta -$$

$$-\iint\limits_{Q_T} \overrightarrow{\chi} b'(U)\nabla U\zeta \quad \forall\zeta\in L^2(0,T;H^1(\Omega)). \tag{4.2}$$

Полагаем в равенстве (4.2) $\zeta = -\mathrm{div}(\varphi^6\nabla U)+\sigma_1\varphi^6 U_t$. После предельных переходов по $\varepsilon_1\to 0$, $\varepsilon_2\to 0$, $\sigma_1\to 0$, как и в [23], для предельного решения $\bar u(t,.):=U_{0,0,0,\delta,L}(t,.)\in K_{\delta,L}:=\{v\in L^2(\Omega): v\geqslant\delta$ и $v\leqslant L$ п. в. в $\Omega\}$ устанавливаем следующее соотношение:

$$\frac12\int\limits_\Omega \varphi^6|\nabla\bar u(T)|^2\,dx + c^{-1}\iint\limits_{Q_T}\varphi^6\bar u^n|\nabla\Delta\bar u|^2\leqslant$$

$$\le\frac12\int\limits_\Omega\varphi^6|\nabla u_0(x)|^2\,dx + c\Big\{\iint\limits_{Q_T}\varphi^2\bar u^n(\nabla\varphi\nabla\bar u)^2|\nabla\varphi|^2+$$

$$+\iint\limits_{Q_T}\varphi^4\bar u^n|D^2\varphi\nabla u|^2+\iint\limits_{Q_T}\varphi^4\bar u^n|D^2\bar u\nabla\varphi|^2+$$

$$+\iint\limits_{Q_T}\varphi^4\bar u^n|\Delta\bar u|^2|\nabla\varphi|^2+\iint\limits_{Q_T}\varphi^6\bar u^{\lambda-1}|\nabla\bar u\Delta\bar u|+$$

$$+\iint\limits_{Q_T}\varphi^5\bar u^\lambda|D^2\bar u\nabla\varphi|+\iint\limits_{Q_T}\varphi^4\bar u^\lambda|D^2\varphi\nabla\bar u|\Big\}=:$$

$$=:\frac12\int\limits_\Omega\varphi^6|\nabla u_0(x)|^2\,dx+\sum_{k=1}^7 I_k, \tag{4.3}$$

где $\varphi\in C^2(\Omega)$ — произвольная неотрицательная функция такая, что тангенциальная компонента $\nabla\varphi$ равна нулю на $\partial\Omega$. Применяя к правой части (4.3) неравенство Коши и лемму Б.3, получаем

$$I_5\leqslant\varepsilon\iint\limits_{Q_T}\varphi^6\bar u^{n-2}|D^2\bar u|^2|\nabla\bar u|^2+c\iint\limits_{Q_T}\varphi^6\bar u^{2\lambda-n}\leqslant$$

$$\le c\iint\limits_{Q_T}\varphi^6\bar u^{2\lambda-n}+\varepsilon\left\{\iint\limits_{Q_T}\varphi^6\bar u^n|\nabla\Delta\bar u|^2+\iint\limits_{Q_T}\bar u^{n+2}|\nabla\varphi|^6\right\}\quad\forall\varepsilon>0,$$

$$I_6\leqslant\varepsilon\iint\limits_{Q_T}\varphi^4\bar u^n|D^2\bar u\nabla\varphi|^2+c\iint\limits_{Q_T}\varphi^6\bar u^{2\lambda-n}\leqslant$$

$$\le c\iint\limits_{Q_T}\varphi^6\bar u^{2\lambda-n}+\varepsilon\left\{\iint\limits_{Q_T}\varphi^6\bar u^n|\nabla\Delta\bar u|^2+\iint\limits_{Q_T}\bar u^{n+2}|\nabla\varphi|^6\right\}\quad\forall\varepsilon>0,$$

$$I_7\leqslant\varepsilon\iint\limits_{Q_T}\varphi^4\bar u^n|D^2u\nabla\varphi|^2+c\iint\limits_{Q_T}\varphi^6\bar u^{2\lambda-n}\leqslant$$

$$\le\varepsilon\iint\limits_{Q_T}\varphi^6\bar u^{n-4}|\nabla\bar u|^6+c\iint\limits_{Q_T}\varphi^6\bar u^{2\lambda-n}+c\iint\limits_{Q_T}\bar u^{n+2}|\nabla\varphi|^6\quad\forall\varepsilon>0.$$

Остальные I_k оцениваются, как и в работе [23]. Правую часть (4.3) оцениваем описанным выше способом и выбираем $\varepsilon > 0$ достаточно малым. Переходя к пределу в полученном неравенстве по $\delta \to 0$, $L^{-1} \to 0$, для предельного решения $u(t,x)$ получаем следующую априорную *энергетическую* оценку:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \varphi^6 |\nabla u(t_2)|^2\,dx + c^{-1}\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} \varphi^6\{|\nabla u^{\frac{n+2}{6}}|^6 + |\nabla \Delta u^{\frac{n+2}{2}}|^2\} \leqslant$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \varphi^6 |\nabla u(t_2)|^2\,dx + c^{-1}\iint\limits_{\{u>0\}} \varphi^6 u^n |\nabla \Delta u|^2 \leqslant$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \varphi^6 |\nabla u(t_1)|^2\,dx + c\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\{\varphi>0\}} \varphi^6 u^{2\lambda-n} + c\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\{\varphi>0\}} u^{n+2}\Big\{|\nabla\varphi|^6 +$$

$$+\varphi^2|D^2\varphi|^2|\nabla\varphi|^2 + \varphi^3|\Delta\varphi|^3\Big\}, \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T_{\mathrm{loc}}, \tag{4.4}$$

где $t_1 = 0$, $t_2 = T_{\mathrm{loc}}$, $n \in \left(2 - \sqrt{1 - \dfrac{N}{N+8}}, 3\right)$, $\lambda > \dfrac{n}{2}$ $\left(\lambda < \dfrac{n+6}{2}\text{, если } N = 3\right)$ и $\varphi(x)$ взято из (4.3). Неравенство (4.4) для произвольных t_1, t_2 таких, что $0 \leqslant \leq t_1 < t_2 \leqslant T_{\mathrm{loc}}$, получаем аналогично (в (4.2) полагаем $\zeta = -\chi_{[t_1,t_2]}\mathrm{div}(\varphi^6\nabla U) + +\sigma_1\chi_{[t_1,t_2]}\varphi^6 U_t$).

Пусть $\{\ell_\mu(t)\}_{\mu>0} \subset C_c^\infty(0,T)$ такая, что $\ell_\mu \underset{\mu\to 0}{\to} \chi_{(0,T)}$. Возьмем в предельном интегральном тождестве для $u(t,.) := U_{0,0,0,0,0,0}(t,.)$, получающемся из (4.2) после предельного перехода по $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, $\sigma_1 \to 0$, $\delta \to 0$, $L^{-1} \to 0$, в качестве пробной функции $\zeta = -\ell_\mu(t)\varphi^4(u+\gamma)^\beta$, $\beta > \dfrac{1-n}{3}$, $\forall\gamma > 0$. После несложных преобразований и предельного перехода по $\mu \to 0$ и $\gamma \to 0$ (см., например, [21]), для $T \leqslant T_{\mathrm{loc}}$ получаем следующую оценку:

$$\frac{1}{\beta+1}\int\limits_{\Omega} \varphi^4 u^{\beta+1}(T)\,dx \leqslant$$

$$\leq \frac{1}{\beta+1}\int\limits_{\Omega} \varphi^4 u_0^{\beta+1}(x)\,dx + \varepsilon\iint\limits_{\{u>0\}} \varphi^6 u^n |\nabla\Delta u|^2 + \varepsilon\iint\limits_{Q_T} \varphi^6 |\nabla u^{\frac{n+2}{6}}|^6 +$$

$$+c\int\limits_0^T \int\limits_{\{\varphi(t)>0\}} \{u^{n+2\beta}|\nabla\varphi|^2 + u^{\lambda+\beta}|\nabla\varphi^4| + u^{n+3\beta-1}\}, \tag{4.5}$$

$$\beta > \frac{1-n}{3}, \quad \forall\varepsilon > 0,$$

где $n \in \left(2 - \sqrt{1 - \dfrac{N}{N+8}}, 3\right)$, $\lambda > 1$, $\varphi \in C^1(\Omega)$ — произвольная неотрицательная срезающая функция.

Пусть $\Omega(s) = \Omega\backslash B(0, R_0+s)$, $Q_T(s) = (0,T)\times\Omega(s)$ и supp $u_0 \subset B(0,R_0) \Subset \Omega$. Введем в рассмотрение неотрицательную срезающую функцию $\xi(\tau)$, принадлежащую пространству $C^2(\mathbb{R}^1)$ и имеющую следующие свойства: $\xi = 0$, если $\tau \leqslant 0$;

$\xi = 1$, если $\tau \geqslant 1$; $0 \leqslant \xi(\tau) \leqslant 1$ $\forall \tau \in \mathbb{R}^1$. Определим семейство основных срезающих функций:

$$\xi_{s,\delta}(x) = \xi\left(\frac{|x| - (R_0 + s)}{\delta}\right) \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \quad \delta > 0.$$

Здесь $\delta > 0$ такое, что $B(0, R_0 + s + \delta) \Subset \Omega$. Для всех x выполняются неравенства

$$|\nabla \xi_{s,\delta}| \leqslant \frac{c}{\delta}, \quad |\Delta \xi_{s,\delta}| \leqslant \frac{c}{\delta^2}.$$

Суммируя неравенства (4.4), (4.5) и полагая $\varphi(x) = \xi_{s,\delta}(x)$, после простых преобразований получаем

$$\int\limits_{\Omega(s+\delta)} |\nabla u(T)|^2\,dx + \int\limits_{\Omega(s+\delta)} u^{\beta+1}(T)\,dx + c^{-1} \iint\limits_{Q_T(s+\delta)} \{|\nabla u^{\frac{n+2}{6}}|^6 + |\nabla \Delta u^{\frac{n+2}{2}}|^2\} \leqslant$$

$$\leqslant c\Bigg\{\delta^{-6} \iint\limits_{Q_T(s)} u^{n+2} + \delta^{-2} \iint\limits_{Q_T(s)} u^{n+2\beta} +$$

$$+\delta^{-1} \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\lambda+\beta} + \iint\limits_{Q_T(s)} u^{n+3\beta-1} + \iint\limits_{Q_T(s)} u^{2\lambda-n}\Bigg\} =:$$

$$=: c\sum_{i=1}^{5} \delta^{-\alpha_i} \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\xi_i}. \tag{4.6}$$

Применим интерполяционное неравенство Ниренберга – Гальярдо (лемма Б.1) в области $\Omega(s+\delta)$ к функции $v := u^{\frac{n+2}{2}}$ с $a = \dfrac{2\xi_i}{n+2}$, $b = \dfrac{2(\beta+1)}{n+2}$, $d = 2$, $i = 0$, $j = 3$, $\theta_i = \dfrac{N(n+2)(\xi_i - \beta - 1)}{\xi_i(N(n+2) + (6-N)(\beta+1))}$ при условии

$$\beta < \xi_i - 1 \quad \text{для} \quad i = \overline{1,5}. \tag{4.7}$$

Интегрируя получающиеся неравенства по времени, с учетом (4.6) приходим к следующим соотношениям:

$$\iint\limits_{Q_T(s+\delta)} u^{\xi_i} \leqslant cT^{1-\frac{\theta_i\xi_i}{n+2}}\left(\sum_{i=1}^{5} \delta^{-\alpha_i} \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\xi_i}\right)^{1+\nu_i} + cT\left(\sum_{i=1}^{5} \delta^{-\alpha_i} \iint\limits_{Q_T(s)} u^{\xi_i}\right)^{\frac{\xi_i}{\beta+1}},$$

где $\nu_i = \dfrac{6(\xi_i - \beta - 1)}{N(n+2) + (6-N)(\beta+1)}$. Полученные неравенства имеют место при выполнении следующих соотношений:

$$\frac{\theta_i\xi_i}{n+2} < 1 \Leftrightarrow \beta > \frac{N(\xi_i - n - 2)}{6} - 1. \tag{4.8}$$

Простые вычисления показывают, что неравенства (4.7), (4.8) выполняются с некоторым $\beta > \dfrac{1-n}{3}$ в том и только в том случае, если

$$n \in \left(2 - \sqrt{1 - \frac{N}{N+8}}, 3\right), \qquad \lambda \in \left(1 + \frac{n}{4}, n + 1 + \frac{3(n+2)}{N}\right). \tag{4.9}$$

Поскольку все интегралы в правой части полученных интегральных неравенств стремятся к нулю при $T \to 0$, из леммы Б.2 с $s_1 = 0$ и достаточно малым T следует

$$\operatorname{supp} u(t,.) \subset B(0, R_0 + \Gamma(t)) \Subset \Omega \quad \forall t \leqslant T_{\mathrm{loc}} = T_{\mathrm{loc}}(R_0), \tag{4.10}$$

т. е. носитель нашего решения распространяется с конечной скоростью. Продолжая функцию $u(t,x)$ нулем вне ее носителя, получаем локальное по времени решение задачи (1.1)–(1.3).

Теперь установим оценку сверху для $\Gamma(t)$ из (4.10). Пусть $\Omega(s) = \mathbb{R}^N \backslash B(0,s)$, $Q_T(s) = (0,T) \times \Omega(s)$ $\forall s > R_0$, $\operatorname{supp} u_0 \subset B(0, R_0)$ и $\Gamma(T) = R(T) - R_0$. В силу малости временного интервала в (4.10) можно считать, что $R(T) < 2R_0$. Таким образом, для всех $s \in (R_0, 2R_0)$ в (4.4) можно взять (вплоть до регуляризации) $\varphi(x) = (|x| - s)_+$. В итоге получим

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega(s)} (|x|-s)_+^6 |\nabla u(T)|^2 \, dx + c^{-1} \delta^6 \iint\limits_{Q_T(s+\delta)} |\nabla \Delta u^{\frac{n+2}{2}}|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c \iint\limits_{Q_T(s)} \{u^{n+2} + (R(T)-s)_+^6 u^{2\lambda - n}\} \quad \forall T \leqslant T_{\mathrm{loc}}, \quad s \in (R_0, 2R_0). \tag{4.11}$$

Применяя неравенство Харди

$$\int\limits_{\Omega(s)} (|x|-s)_+^4 u^2 \, dx \leqslant c \int\limits_{\Omega(s)} (|x|-s)_+^6 |\nabla u|^2 \, dx,$$

приходим к следующей оценке:

$$\int\limits_{\Omega(s+\delta)} u \, dx \leqslant \left(\int\limits_{\Omega(s+\delta)} (|x|-s)_+^4 u^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega(s+\delta)} (|x|-s)_+^{-4} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c \left(\int\limits_{\Omega(s)} (|x|-s)_+^6 |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega(s+\delta)} (|x|-s)_+^{-4} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c(\delta^{N-4} + s^{N-1}\delta^{-3})^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega(s)} (|x|-s)_+^6 |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \delta > 0, \quad s \in (R_0, 2R_0),$$

откуда следует

$$\left(\int\limits_{\Omega(s+\delta)} u \, dx \right)^2 \leqslant c f(\delta, s) \int\limits_{\Omega(s)} (|x|-s)_+^6 |\nabla u|^2 \, dx, \quad f(\delta, s) := \delta^{N-4} + s^{N-1}\delta^{-3}. \tag{4.12}$$

Подставляя полученную оценку в (4.11), находим

$$\sup_{t \in (0,T)} \left(\int\limits_{\Omega(s+\delta)} u \, dx \right)^2 + c\delta^6 f(\delta, s) \iint\limits_{Q_T(s+\delta)} |D^3 u^{\frac{n+2}{2}}|^2 \leqslant$$

$$\leq cf(\delta,s)\iint\limits_{Q_T(s)}\{u^{n+2}+\Gamma^6(T)u^{2\lambda-n}\}=:$$

$$=: cf(\delta,s)\sum_{i=1}^{2}\Gamma^{\eta_i}(T)\iint\limits_{Q_T(s)}u^{\xi_i}\quad \forall T\leqslant T_{\rm loc},\quad s\in(R_0,2R_0). \tag{4.13}$$

Применяя неравенства Ниренберга – Гальярдо, Гельдера и Юнга, после простых вычислений для $\varepsilon>0$ получаем

$$\Gamma^{\eta_i}(T)\iint\limits_{Q_T(s)}u^{\xi_i}\leqslant \varepsilon\delta^6\iint\limits_{Q_T(s)}|D^3u^{\frac{n+2}{2}}|^2+c(\varepsilon)\frac{\Gamma^{\ell_i}(T)}{\delta^{\gamma_i}}\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega(s)}u\right)^{\frac{\xi_i(6-N)+N(n+2)}{N(n+2-\xi_i)+6}}.$$

Здесь $\ell_i=\dfrac{\eta_i(nN+N+6)}{N(n+2-\xi_i)+6}$, $\gamma_i=\dfrac{6N(\xi_i-1)}{N(n+2-\xi_i)+6}$ при условии, что $1<\xi_i<$ $<n+2+\dfrac{6}{N}$. Условия на ξ_i эквивалентны соотношению

$$\frac{n+1}{2}<\lambda<n+1+\frac{3}{N}.$$

Подставляя полученные выше оценки в (4.13) и проводя стандартную итерационную процедуру, приходим к неравенству

$$\sup_{t\in(0,T)}\left(\int\limits_{\Omega(s+\delta)}u\,dx\right)^2\leqslant cf(\delta,s)\sum_{i=1}^{2}\frac{G_T^{(i)}(s)}{\delta^{\gamma_i}},$$

$$G_T^{(i)}(s):=\Gamma^{\ell_i}(T)\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\Omega(s)}u\right)^{\frac{\xi_i(6-N)+N(n+2)}{N(n+2-\xi_i)+6}},$$

откуда для $\delta\leqslant R_0$ ($\Rightarrow f(\delta,s)\delta^{-\gamma_i}\leqslant c\,\delta^{-\gamma_i-3}\ \forall s\in(R_0,2R_0)$) имеем

$$G_T^{(i)}(s+\delta)\leqslant cT\Gamma^{\ell_i}(T)\left(\sum_{i=1}^{2}\frac{G_T^{(i)}(s)}{\delta^{\alpha_i}}\right)^{\beta_i}\quad \forall s\in(R_0,2R_0),\quad s>\delta>0, \tag{4.14}$$

где $\beta_i=\dfrac{\xi_i(6-N)+N(n+2)}{2(N(n+2-\xi_i)+6)}$, $\alpha_i=\gamma_i+3=\dfrac{3(\xi_iN+nN+6)}{N(n+2-\xi_i)+6}$. Применяя к (4.14) лемму Б.2, получаем $G_T^{(i)}(s_0(T))=0$, где

$$\Gamma(T)\leqslant s_0(T)=c(T^{\frac{1}{N(n+1)+3}}+T^{\alpha_2}\Gamma^{\frac{\ell_2}{\alpha_2}}(T)),\quad c=c(n,\ \lambda,\quad N,\ \|u_0\|_1)>0.$$

Поскольку $\dfrac{\ell_2}{\alpha_2}>1$, для произвольного $T\leqslant T_{\rm loc}$ имеем

$$\Gamma(T)\leqslant cT^{\frac{1}{N(n+1)+3}}. \tag{4.15}$$

***Замечание* 4.1.** При $N=1$ оценка (4.15) совпадает с полученной в [27] оценкой носителей решений уравнения (1.4) и с оценкой из [21] для уравнения

(1.1) с $a_1 = 0$. При $N > 1$ эта оценка является новой и наша гипотеза состоит в том, что она точна и достигается на классе мер Радона, сосредоточенных на сфере радиуса R_0.

Далее, как и при доказательстве теоремы 2.1, будем приближать решение задачи (1.1) – (1.3) с помощью сильных решений задачи Неймана, носители которых распространяются с конечной скоростью (свойство (4.10)). Выберем последовательность $\{u_{0\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ неотрицательных функций в $H^1(\mathbb{R}^N)$ с компактным носителем из (3.1). В силу (4.10) и (4.15) получаем, что $\operatorname{supp} u_\varepsilon(t,.) \subset B(0, R_{0\varepsilon} + \hat{c}t^{\frac{1}{N(n+1)+3}})$, где $u_\varepsilon(t,x)$ — локальное по времени решение задачи Коши для уравнения (1.1) с $a_1 = 0$. Для произвольного $\alpha \in (-1, 0)$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{\alpha+1}(t,x)\,dx \leqslant \|u_{0\varepsilon}\|_1^{\alpha+1} |\operatorname{supp} u_\varepsilon(t)|^{-\alpha} \leqslant c\|u_{0\varepsilon}\|_1^{\alpha+1} R_0^{-\alpha N}(t), \\ R_0(t) := |R_0 + \hat{c}t^{\frac{1}{N(n+1)+3}}|. \tag{4.16}$$

Здесь мы воспользовались тем, что для всех $t \leqslant T_{\text{loc}}$ имеет место закон сохранения массы. По аналогии с [23] доказывается существование *энтропийной* оценки вида

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left\{ \left| D^2 u_\varepsilon^{\frac{\alpha+n+1}{2}} \right|^2 + \left| \nabla u_\varepsilon^{\frac{\alpha+n+1}{4}} \right|^4 \right\} \leqslant \\ \leq \frac{c}{\alpha(\alpha+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_{0\varepsilon}^{\alpha+1}(x)dx - \frac{c}{\alpha(\alpha+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{\alpha+1}(T,x)\,dx \tag{4.17}$$

для всех $T \leqslant T_{\text{loc}}$ при $\alpha \in (-1, 2-n)$. Из (4.17) и (4.16), в силу компактности носителя решения и закона сохранения, следует свойство i) теоремы 2.3. Для решения $\bar{u}(t,.)$ из (4.3) при $n \in [2,3)$ и почти всех $t \leqslant T_{\text{loc}}$ справедлива следующая оценка:

$$\int\limits_\Omega |\nabla \bar{u}(t,x)|^2 \frac{\bar{u}^{\frac{n-4}{3}}}{\bar{u}^{\frac{n-4}{3}}}\,dx \leqslant c(n) \left(\int\limits_\Omega |\nabla \bar{u}^{\frac{n+2}{6}}(t)|^6\,dx \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int\limits_\Omega \bar{u}^{\frac{4-n}{2}}(t)\,dx \right)^{\frac{2}{3}} \leqslant \\ \leqslant c(n)\|u_{0\varepsilon}\|_1^{\frac{4-n}{3}} |\Omega|^{\frac{n-2}{3}} \left(\int\limits_\Omega |\nabla \bar{u}^{\frac{n+2}{6}}(t)|^6\,dx \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Возведем обе части этого неравенства в третью степень и проинтегрируем его по времени от t_1 до t_2. После предельных переходов по $\delta \to 0$, $L^{-1} \to 0$ для предельного решения $u_\varepsilon(t,x)$, имеющего свойство (4.10), получаем

$$c^{-1}(n)\|u_{0\varepsilon}\|_1^{n-4} R_0^{2-n}(T_{\text{loc}}) \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon(t,x)|^2 dx \right)^3 \leqslant \iint\limits_{Q_{t_1}^{t_2}} |\nabla u_\varepsilon^{\frac{n+2}{6}}(t)|^6\,dx. \tag{4.18}$$

Для почти всех $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T_{\mathrm{loc}}$ и $\lambda > \dfrac{n}{2}$ $\left(\lambda < \dfrac{n+6}{2}, \text{ если } N = 3\right)$, используя теоремы вложения и неравенство Юнга, находим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{2\lambda-n} \leqslant \gamma \int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon(t,x)|^2 dx\right)^3 + c(\gamma)(t_2-t_1) \quad \forall\, \gamma > 0. \tag{4.19}$$

Подставляя (4.18) и (4.19) в (4.4) с $\varphi = 1$, имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon(t_2)|^2\, dx + (c^{-1}(n)\|u_{0\varepsilon}\|_1^{n-4} R_0^{2-n}(T_{\mathrm{loc}}) - \gamma)\int\limits_{t_1}^{t_2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon(t,x)|^2 dx\right)^3 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon(t_1)|^2\, dx + c(\gamma)(t_2-t_1), \quad t_1 < t_2 \leqslant T_{\mathrm{loc}}. \tag{4.20}$$

Пусть $F(t) := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon(t)|^2\, dx - c(\gamma)t$. Выбирая в (4.20) $\gamma = \dfrac{1}{2}c^{-1}(n)\|u_{0\varepsilon}\|_1^{n-4} \times$ $\times R_0^{2-n}(T_{\mathrm{loc}})$ и полагая $t_1 = s$, $t_2 = s+\tau$, для невозрастающей функции $F(t)$ получаем оценку

$$c^{-1}(n)\|u_{0\varepsilon}\|_1^{n-4} R_0^{2-n}(T_{\mathrm{loc}})\tau\, F^3(s+\tau) \leqslant F(s),$$

откуда следует, что

$$F(s+\tau) \leqslant c(n)\|u_{0\varepsilon}\|_1^{\frac{4-n}{3}} R_0^{\frac{n-2}{3}}(T_{\mathrm{loc}})\left(\frac{F(s)}{\tau}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{4.21}$$

Применяя к (4.21) лемму Б.4, имеем необходимую оценку убывания:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon(t,x)|^2 dx \leqslant \tilde{c}(n) t^{-\frac{1}{2}} \|u_{0\varepsilon}\|_1^{\frac{4-n}{2}} R_0^{\frac{N(n-2)}{2}}(T_{\mathrm{loc}}) \quad \forall t \in (0, T_{\mathrm{loc}}]. \tag{4.22}$$

Применяя неравенство Ниренберга – Гальярдо (лемма Б.1), для всех $p \in (1,\infty)$, если $N = 1, 2$, и $p \in (1,6)$, если $N = 3$, в силу (4.22) находим

$$\|u_\varepsilon(t)\|_p \leqslant \|\nabla u_\varepsilon(t)\|_2^{\frac{2N(p-1)}{p(N+2)}} \|u_{0\varepsilon}\|_1^{\frac{2N+p(2-N)}{p(N+2)}} \leqslant$$

$$\leq c\|u_{0\varepsilon}\|_1^{1-\frac{2nN(p-1)}{4p(N+2)}} t^{-\frac{N(p-1)}{2p(N+2)}} (R_0(T_{\mathrm{loc}}))^{\frac{N^2(p-1)(n-2)}{2p(N+2)}}. \tag{4.23}$$

Используя (4.16) и (4.23), для всех $t \in (0, T_{\mathrm{loc}}]$ при выполнении (2.6) устанавливаем оценки всех нелинейных слагаемых в (2.2) и (4.4), необходимые для предельного перехода по $\varepsilon \to 0$. Покажем, например, получение оценки для нелинейного слагаемого из (2.2), связанного с наличием конвекции. Для $\lambda \in \left(\dfrac{1}{p}, 2 + \dfrac{1}{p} + \dfrac{4}{N}\right)$, $p > 1$, в силу (4.23) имеем

$$\int\limits_0^t \|b(u_\varepsilon(\tau))\|_p\, d\tau \leqslant c\int\limits_0^t \|u_\varepsilon(\tau))\|_{\lambda p}^\lambda\, d\tau \leqslant c\, t^{1-\frac{N(\lambda p-1)}{2p(N+2)}} \quad \forall t \in [0, T_{\mathrm{loc}}],$$

где $c = c(T_{\mathrm{loc}}, R_0, \|u_{0\varepsilon}\|_1, N, n) < \infty$. Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$, как и в теореме 2.1, получаем требуемое решение задачи Коши.

Приложение А.

Теорема А.1 [25]. *Пусть* $N \leqslant 3$, $m > 0$, $1/8 < n < 2$,

$$\begin{gathered}\max\left\{1, \frac{3n-1}{4}\right\} < \lambda < \frac{5N+8}{4N} + \min\left\{n, \frac{5}{4}\right\}, \quad \text{если} \quad N < 3; \\ \max\left\{1, \frac{3n-1}{4}\right\} < \lambda < 2 + \min\left\{n, \frac{5}{4}\right\}, \quad \text{если} \quad N = 3,\end{gathered} \tag{A.1}$$

и $u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^{m-n+2}(\mathbb{R}^N)$ *— неотрицательная функция с* $\operatorname{supp} u_0 \subset \subset B(0, R_0), R_0 < +\infty$. *Тогда существует решение* $u(t,x)$ *задачи* (1.1)–(1.3) *из определения* 2.1 *такое, что:*

i) $\operatorname{supp} u(t,.)$ *компактен для почти всех* $t > 0$ *и существует неубывающая непрерывная функция* $\Gamma(t)$, $\Gamma(0) = 0$, *такая, что* $\operatorname{supp} u(t,.) \subset D(0, R_0 + \Gamma(t))$ $\forall t > 0$;

ii) *для произвольного* α *из* (2.5), *дополнительно удовлетворяющего условиям*

$$\max\left\{\frac{3(\alpha+n)-1}{4}, 1\right\} < \lambda \leqslant \frac{N+2}{N} + \frac{3(\alpha+n)}{4} \quad \text{при} \quad N < 3;$$

$$\max\left\{\frac{3(\alpha+n)-1}{4}, 1\right\} < \lambda \leqslant \frac{3(\alpha+n)+7}{4} \quad \text{при} \quad N = 3$$

(*легко проверить, что в предположениях* (A.1) *множество таких* α *непусто*), *имеют место включения*

$$\begin{aligned} &u^{m-n+2} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^N)), && u^{\frac{\alpha+n+1}{4}} \in L^4_{\mathrm{loc}}([0,\infty); W^1_4(\mathbb{R}^N)), \\ &u^{\frac{\alpha+n+1}{2}} \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty); H^2(\mathbb{R}^N)), && u^{\frac{\alpha+m+1}{2}} \in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^N)); \end{aligned}$$

iii) *для почти всех* $0 \leqslant t_1 < t_2$ *и произвольной неотрицательной функции* $\zeta \in C^2([t_1,t_2]\times\mathbb{R}^N)$ *выполняется следующее локальное энтропийное неравенство:*

$$\begin{gathered} \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \zeta^4 u^{\alpha+1}(t_2,x)dx - \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} (\zeta^4)_t u^{\alpha+1} + \\ + c_3^{-1} \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \zeta^4 \left\{ \left|\nabla u^{\frac{\alpha+m+1}{2}}\right|^2 + \left|\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\right|^4 + \left|D^2 u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\right|^2 \right\} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \zeta^4 u^{\alpha+1}(t_1,x)dx + c_3 \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\{\zeta(t)>0\}} u^{\alpha+m+1}(\zeta^2 |\nabla\zeta|^2 + \zeta^3 |\Delta\zeta|) + \\ + c_3 \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\{\zeta(t)>0\}} u^{\alpha+n+1}(|\nabla\zeta|^4 + \zeta^2 |\Delta\zeta|^2) - \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\{\zeta(t)>0\}} \overrightarrow{\chi}\mathcal{B}^{(\alpha)}(u)\nabla\zeta^4, \end{gathered} \tag{A.2}$$

где $\mathcal{B}^{(\alpha)}(z) := \alpha^{-1} \int_0^z b'(\tau)\tau^\alpha \, d\tau$, α *взято из* ii);

iv) *для почти всех* $0 \leqslant t_1 < t_2$ ($t_1 = 0$, *если* $m - n + 2 \leqslant 0$) *при любом* $q' \in \left(1, \dfrac{4N}{2N + n(N-2)}\right)$ ($q' = 2$, *если* $N = 1$) *для потока* $\overrightarrow{J}$ *из* (2.4) *справедлива оценка*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left\| \overrightarrow{J}(t) \right\|_{q'}^2 dt \leqslant \sup_{t \in (t_1, t_2)} \|u^n(t)\|_{\frac{q'}{2-q'}} \left(\mathcal{E}(u(t_1)) - \iint\limits_{Q_{t_1}^{t_2}} \overrightarrow{\chi} \chi_{\mathrm{P}}\, b'(u) \nabla u \Delta u \right),$$

где $\mathcal{E}(u(t)) := \dfrac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \Psi_0(u(t))dx$, $\Psi_0(z)$ *взято из* (2.1);

v) $u(t,.) \underset{t \to 0}{\rightrightarrows} u_0(.)$ *в* $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Замечание **А.1.** Кроме того, в [25] теорема А.1 доказана для $t \in (0, T_{\mathrm{loc}})$ при более слабых ограничениях на параметр λ, а именно,

$$1 < \lambda < \kappa + 1 + \max\{n + \kappa, m\} \quad \text{при} \quad N < 3,$$

$$1 < \lambda < \min\left\{\frac{4n+7}{3}, 4\right\} \quad \text{при} \quad N = 3; \quad \kappa := \frac{2}{N}\min\left\{\frac{n+4}{3}, 3 - n\right\}.$$

Лемма А.1 [11]. *Пусть* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ — *непрерывная справа в* 0 *функция, такая, что* $f(t_2) - f(t_1) \leqslant M(t_2 - t_1)^a t_1^{-b}$ $\forall t_2 > t_1 > 0$, *где* $M > 0$, $a > b > 0$. *Тогда* $f(t) - f(0) \leqslant \dfrac{M}{1 - 2^{b-a}} t^{a-b}$ $\forall t > 0$.

Лемма А.2 [24, 26]. *Пусть* $u(t,x)$ — *сильное решение задачи* (1.1)–(1.3), *построенное в теореме* А.1. *Тогда для произвольного* $p \in (1, 3-n)$ *существует постоянная* $0 < c = c(n, m, p, N)$ *такая, что для произвольного* $t > 0$ *справедливы следующие оценки*:

$$\|u(t)\|_p \leqslant c\|u_0\|_1^{\frac{nN+4p}{p(nN+4)}} t^{-\frac{N(p-1)}{p(nN+4)}}, \qquad \|u(t)\|_p \leqslant c\|u_0\|_1^{\frac{mN+2p}{p(mN+2)}} t^{-\frac{N(p-1)}{p(mN+2)}}. \quad (\text{A.3})$$

Лемма А.3 [24]. *Пусть* $u(t,x)$ — *сильное решение задачи* (1.1)–(1.3), *построенное в теореме* А.1. *Тогда для произвольного* $t > 0$ *справедливы следующие оценки убывания*:

i) $\displaystyle\int_0^t \|u(\tau)\|_{\hat{p}}^{\gamma} d\tau \leqslant c_1 \|u_0\|_1^{\frac{\gamma(nN+4\hat{p})}{\hat{p}(nN+4)}} t^{1 - \frac{\gamma N(\hat{p}-1)}{\hat{p}(nN+4)}}$ $\forall \hat{p} > 1$, $\gamma \in \left(0, \dfrac{\hat{p}(nN+4)}{N(\hat{p}-1)}\right)$;

$\displaystyle\int_0^t \|u(\tau)\|_{\hat{p}}^{\gamma} d\tau \leqslant c_1 \|u_0\|_1^{\frac{\gamma(mN+2\hat{p})}{\hat{p}(mN+2)}} t^{1 - \frac{\gamma N(\hat{p}-1)}{\hat{p}(mN+2)}}$ $\forall \hat{p} > 1$ ($\hat{p} < 3(m - n + 3)$, *если* $N = 3$), $\gamma \in \left(0, \dfrac{\hat{p}(mN+2)}{N(\hat{p}-1)}\right)$;

ii) $\displaystyle\int_0^t \|\chi_{\mathrm{P}} u^{n-2}(\tau) |\nabla u(\tau)|^3\|_p d\tau \leqslant c_1 \|u_0\|_1^{\frac{nN + p(n+4)}{p(nN+4)}} t^{\frac{N - p(N-1)}{p(nN+4)}}$

$\forall p \in \left(\max\left\{\dfrac{4}{n+4}, \dfrac{8}{8n+5}\right\}, \dfrac{4}{3}\right)$;

iii) $\displaystyle\int_0^t \|\chi_{\mathrm{P}} u^{n-1}(\tau) |\nabla u(\tau)|^2\|_p d\tau \leqslant c_1 \|u_0\|_1^{\frac{nN + p(2n+4)}{p(nN+4)}} t^{\frac{N - p(N-2)}{p(nN+4)}}$

$\forall p \in \left(\dfrac{3}{n+3}, \dfrac{3}{2}\right)$;

iv) $\displaystyle\int_0^t \|\chi_{\mathrm{P}} u^n(\tau)\nabla u(\tau)\|_p\, d\tau \leqslant c_1 \|u_0\|_1^{\frac{nN+p(3n+4)}{p(nN+4)}}\, t^{\frac{N-p(N-3)}{p(nN+4)}}$
$\forall\, p \in \left(\dfrac{2}{n+2}, 2\right)$;
$\displaystyle\int_0^t \|u^m(\tau)\nabla u(\tau)\|_p\, d\tau \leqslant c_2 \|u_0\|_1^{\frac{mN+p(m+2)}{p(mN+2)}}\, t^{\frac{N-p(N-1)}{p(mN+2)}}$
$\forall\, p \in \left(\max\left\{\dfrac{2}{m+2}, \dfrac{4}{2m+2n+3}\right\}, \min\left\{\dfrac{N}{N-1}, 2\right\}\right)$;

v) $\mathcal{E}(u(t)) \leqslant c_2 \|u_0\|_1^{\frac{8+n(N-2)}{nN+4}}\, t^{-\frac{N+2}{nN+4}} + c_2 \|u_0\|_1^{\frac{mN+2(m-n+2)}{mN+2}}\, t^{-\frac{N(m-n+1)}{mN+2}}$, *если* $m-n+1>0$;

vi) $\mathcal{E}(u(t)) \leqslant c_2 \|u_0\|_1^{\frac{8+n(N-2)}{nN+4}}\, t^{-\frac{N+2}{nN+4}} + c_2 \|u_0\|_1^{\frac{mN+2s}{mN+2}}\, t^{-\frac{N(s-1)}{mN+2}}$ $\forall\, s \in (1, 3-n)$, *если* $m-n+1=0$;

vii) $\mathcal{E}(u(t)) \leqslant c_2 \|u_0\|_1^{\frac{8+n(N-2)}{nN+4}}\, t^{-\frac{N+2}{nN+4}}$, *если* $m-n+1<0$,

где $0 < c_1 = c_1(n, m, p, N)$, $0 < c_2 = c_2(n, m, N)$ (*кроме того, в* vii) *постоянная* c_2 *дополнительно зависит от* s), $\mathcal{E}(u(t))$ *взято из* iv) *теоремы* A.1.

Лемма A.4. *Пусть* $u(t,x)$ — *сильное решение задачи* (1.1)–(1.3), *построенное в теореме* A.1. *Тогда для произвольного* $t>0$ *справедливы следующие оценки*:

i) $\displaystyle\int_0^t \|b(u(\tau))\|_p\, d\tau \leqslant c\|u_0\|_1^{\frac{nN+4p\lambda}{p(nN+4)}}\, t^{1-\frac{N(\lambda p-1)}{p(nN+4)}}$ $\forall\, \lambda \in \left(\dfrac{1}{p}, n+\dfrac{1}{p}+\dfrac{4}{N}\right)$, $p>1$;
$\displaystyle\int_0^t \|b(u(\tau))\|_p\, d\tau \leqslant c\|u_0\|_1^{\frac{mN+2p\lambda}{p(mN+2)}}\, t^{1-\frac{N(\lambda p-1)}{p(mN+2)}}$ $\forall\, \lambda \in \left(\dfrac{1}{p}, m+\dfrac{1}{p}+\dfrac{2}{N}\right)$
$\left(\lambda < \dfrac{3}{p}(m-n+3)\ \text{\textit{при}}\ N=3\right)$, $p>1$;

ii) $\displaystyle\int_0^t \|b(u(\tau))\|_{q'}^2\, d\tau \leqslant c\|u_0\|_1^{\frac{2(nN+4\lambda q')}{q'(nN+4)}}\, t^{1-\frac{2N(\lambda q'-1)}{q'(nN+4)}}$
$\forall\, q' \in \Delta_1$, $\lambda \in \left(1, \dfrac{2N+8+n(3N-2)}{4N}\right)$;
$\displaystyle\int_0^t \|b(u(\tau))\|_{q'}^2\, d\tau \leqslant c\|u_0\|_1^{\frac{2(mN+2\lambda q')}{q'(mN+2)}}\, t^{1-\frac{2N(\lambda q'-1)}{q'(mN+2)}}$
$\forall\, q' \in \Delta_1$, $\lambda \in \left(1, \dfrac{2N+4+n(N-2)+2mN}{4N}\right)$
$\left(\lambda < \dfrac{(n+6)(m-n+3)}{4}\ \text{\textit{при}}\ N=3\right)$;

iii) $\displaystyle\iint_{Q_{t_1}^{t_2}} \overrightarrow{\chi}\chi_{\mathrm{P}}\, b'(u)\nabla u \Delta u \leqslant c\|u_0\|_1^{1+\frac{4\lambda-3(\alpha+n)+\alpha}{nN+4}}\, t^{\frac{1+N(n-\lambda)}{nN+4}}$
$\forall\, \lambda \in \left(\dfrac{3(\alpha+n)}{4}, n+\dfrac{1}{N}\right)$;
$\displaystyle\iint_{Q_{t_1}^{t_2}} \overrightarrow{\chi}\chi_{\mathrm{P}}\, b'(u)\nabla u \Delta u \leqslant c\|u_0\|_1^{1+\frac{4\lambda-3(\alpha+n)+\alpha}{mN+2}}\, t^{\frac{2+N(m+3n-4\lambda)}{4(mN+2)}}$
$\forall\, \lambda \in \left(\dfrac{3(\alpha+n)}{4}, \dfrac{m+3n}{4}+\dfrac{1}{2N}\right)$ $\left(\lambda < \dfrac{3(\alpha+m)+8}{4}\ \text{\textit{при}}\ N=3\right)$;

iv) $\displaystyle\int_0^t \|\mathcal{B}^{(\alpha)}(u(\tau))\|_p\, d\tau \leqslant c\|u_0\|_1^{\frac{nN+4p(\lambda+\alpha)}{p(nN+4)}} t^{1-\frac{N(p(\lambda+\alpha)-1)}{p(nN+4)}}$
$\forall\lambda \in \left(\dfrac{1}{p}-\alpha, n+\dfrac{1}{p}+\dfrac{4}{N}-\alpha\right)$, $p>1$;
$\displaystyle\int_0^t \|\mathcal{B}^{(\alpha)}(u(\tau))\|_p\, d\tau \leqslant c\|u_0\|_1^{\frac{mN+2p(\lambda+\alpha)}{p(mN+2)}} t^{1-\frac{N(p(\lambda+\alpha)-1)}{p(mN+2)}}$
$\forall\,\lambda \in \left(\dfrac{1}{p}-\alpha, m+\dfrac{1}{p}+\dfrac{2}{N}-\alpha\right)$ $\left(\lambda < \dfrac{3}{p}(m-n+3)-\alpha \text{ *при* } N=3\right)$ *и* $p>1$,

где $0<c=c(n,\,m,\,p,\,N)$, Δ_1 *взято из* i) *теоремы* 2.1, α — *из* (2.5), $\mathcal{B}^{(\alpha)}(z)$ — *из* (A.2).

***Доказательство леммы* A.4.**

i) Поскольку $b(z)\leqslant c\,z^\lambda$, то $\int_0^t \|b(u(\tau))\|_p\, d\tau \leqslant c\int_0^t \|u(\tau)\|_{\lambda p}^{\lambda}\, d\tau$. Применяя к правой части неравенства оценку i) из леммы A.3 с $\hat{p}=\lambda p$, $\gamma=\lambda$, получаем требуемые оценки.

ii) Из неравенства $\int_0^t \|b(u(\tau))\|_{q'}^2\, d\tau \leqslant c\int_0^t \|u(\tau)\|_{\lambda q'}^{2\lambda}\, d\tau$ и оценки i) из леммы A.3 с $\hat{p}=\lambda q'$, $\gamma=2\lambda$ следует требуемое.

iii) Так же, как и в работе [25], воспользуемся тождеством $u_{x_ix_j} = \gamma^{-1}u^{1-\gamma}(u^\gamma)_{x_ix_j}-(\gamma-1)u^{-1}u_{x_i}u_{x_j}$ с $\gamma=\dfrac{\alpha+n+1}{2}$ на положительных приближающих решениях. Тогда после необходимых предельных переходов для интеграла $I:=\iint_{Q_{t_1}^{t_2}} \overrightarrow{\chi}\chi_{\mathrm{P}}\, b'(u)\Delta u\nabla u$ получаем следующую оценку:

$$I\leqslant c\iint\limits_{Q_{t_1}^{t_2}} u^{\frac{4\lambda-3(\alpha+n)+1}{4}}\left|\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\right|^3 + c\iint\limits_{Q_{t_1}^{t_2}} u^{\frac{4\lambda-3(\alpha+n)+1}{4}}\left|\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\right|\left|\Delta u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\right|.$$

Применяя к первому слагаемому неравенство Гельдера с показателями 4, $\dfrac{4}{3}$, а ко второму — с показателями 4, 4 и 2, имеем

$$I\leqslant c\left(\iint\limits_{Q_{t_1}^{t_2}} u^{4\lambda-3(\alpha+n)+1}\right)^{\frac14}\left(\iint\limits_{Q_{t_1}^{t_2}}\left|\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\right|^4\right)^{\frac34}+$$
$$+c\left(\iint\limits_{Q_{t_1}^{t_2}}\left|\nabla u^{\frac{\alpha+n+1}{4}}\right|^4\right)^{\frac14}\left(\iint\limits_{Q_{t_1}^{t_2}} u^{4\lambda-3(\alpha+n)+1}\right)^{\frac14}\left(\iint\limits_{Q_{t_1}^{t_2}}\left|D^2u^{\frac{\alpha+n+1}{2}}\right|^2\right)^{\frac12}.$$

Отсюда, используя глобальное *энтропийное* неравенство (A.2) ($\zeta=1$), находим

$$I\leqslant c\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} u^{\alpha+1}(t_1)\right)^{\frac34}\left(\int\limits_{t_1}^{t_2}\|u(\tau)\|_{4\lambda-3(\alpha+n)+1}^{4\lambda-3(\alpha+n)+1}d\tau\right)^{\frac14}.$$

Применяя к первому множителю неравенство (A.3) с $p = \alpha + 1$, а ко второму — оценку i) из леммы A.3 с $\hat{p} = \gamma = 4\lambda - 3(\alpha + n) + 1$, получаем

$$I \leqslant c\|u_0\|_1^{1+\frac{4\lambda-3(\alpha+n)+\alpha}{nN+4}} t_1^{-b_1}(t_2 - t_1)^{a_1}, \ \frac{3(\alpha+n)}{4} < \lambda < \frac{3(\alpha+n)+n}{4} + \frac{1}{N};$$

$$I \leqslant c\|u_0\|_1^{1+\frac{4\lambda-3(\alpha+n)+\alpha}{2(mN+2)}} t_1^{-b_2}(t_2 - t_1)^{a_2},$$

$$\frac{3(\alpha+n)}{4} < \lambda < \frac{3(\alpha+n)+m}{4} + \frac{1}{2N}, \ \lambda < \frac{3(\alpha+m)+8}{4} \quad \text{при} \quad N = 3,$$

где $a_1 = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{N(4\lambda - 3(\alpha+n))}{nN+4}\right)$, $a_2 = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{N(4\lambda - 3(\alpha+n))}{mN+2}\right)$, $b_1 = \dfrac{3N\alpha}{4(nN+4)}$, $b_2 = \dfrac{3N\alpha}{4(mN+2)}$. Отсюда при условии, что $a_i - b_i > 0$, используя лемму A.1, получаем требуемые оценки.

iv) Поскольку $\mathcal{B}^{(\alpha)}(z) \leqslant c\, z^{\lambda+\alpha}$, то $\displaystyle\int_0^t \|\mathcal{B}^{(\alpha)}(u(\tau))\|_p\, d\tau \leqslant c \int_0^t \|u(\tau)\|_{p(\lambda+\alpha)}^{\lambda+\alpha}\, d\tau$.

Применяя к правой части неравенства оценку i) из леммы A.3 с $\hat{p} = p(\lambda + \alpha)$, $\gamma = \lambda + \alpha$, получаем необходимые оценки.

Приложение Б.

Лемма Б.1 [29]. *Если $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $a > 1$, $b \in (0, a)$, $d > 1$, $0 \leqslant i < j$, i и $j \in \mathbb{N}$, то существуют положительные постоянные d_1 и d_2 ($d_2 = 0$, если $\Omega = \mathbb{R}^N$), зависящие только от Ω, d, j, b и N, такие, что для любой функции $v(x) \in W_d^j(\Omega) \cap L^b(\Omega)$ выполняется неравенство*

$$\left\|D^i v\right\|_{L^a(\Omega)} \leqslant d_1 \left\|D^j v\right\|_{L^d(\Omega)}^{\theta} \|v\|_{L^b(\Omega)}^{1-\theta} + d_2 \|v\|_{L^b(\Omega)},$$

где $\theta = \dfrac{\dfrac{1}{b} + \dfrac{i}{N} - \dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{b} + \dfrac{j}{N} - \dfrac{1}{d}} \in \left[\dfrac{i}{j}, 1\right)$.

Лемма Б.2 [21]. *Пусть $(\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$ и $\beta = \prod_{j=1}^m \beta_j$, $\overline{\beta_i} = \dfrac{\beta}{\beta_i} = \displaystyle\prod_{j=1, j\neq i}^m \beta_j$. Предположим, что неотрицательные невозрастающие функции $G_i(s)$ удовлетворяют условиям*

$$G_i(s+\delta) \leqslant c_i \left(\sum_{i=1}^m \frac{G_i(s)}{\delta^{\alpha_i}}\right)^{\beta_i} \quad \forall s > 0, \quad \delta > 0, \quad i = \overline{1, m},$$

с действительными числами $c_i > 0$, $\beta_i > 1$, $\alpha_i \geqslant 0$ для $i = \overline{1, m}$ и $\alpha_i > 0$ для $i = \overline{1, \ell}$. Пусть $G(s) = \sum_{i=1}^m \overline{(c_i^{\overline{\beta}_i})}\, (G_i(s))^{\overline{\beta}_i}$ и предположим далее, что функция $H(s) = m^\beta \sum_{i=\ell+1}^m c_i^{\overline{\beta}_i} \overline{(c_i^{\overline{\beta}_i})}^{1-\beta_i} (G_i(s))^{\beta_i - 1}$ такая, что $H(s_1) < 1$ в некоторой точке $s_1 \geqslant 0$. Тогда существует положительная постоянная $c > 1$, зависящая от m, α_i, β_i, ℓ и $H(s_1)$, такая, что $G_i(s_0) \equiv 0$ для всех $i = \overline{1, \ell}$, где $s_0 = s_1 + c \sum_{i=1}^{\ell} \left(c_i^{\overline{\beta}_i} \overline{(c_i^{\overline{\beta}_i})}^{1-\beta_i} (G(s_1))^{\beta_i - 1}\right)^{\frac{1}{\alpha_i \beta}}$.

Лемма Б.3 [23]. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N < 6$, *— ограниченная выпуклая область с гладкой границей,* $n \in \left(2 - \sqrt{1 - \frac{N}{N+8}}, 3\right)$. *Тогда для произвольных строго положительных функций* $v \in H^2(\Omega)$ *таких, что* $\nabla v \cdot \vec{n} = 0$ *на* $\partial\Omega$ *и* $\int_\Omega v^n |\nabla \Delta v|^2 < < \infty$, *справедливы оценки*

$$\int\limits_\Omega \varphi^6 \{v^{n-4}|\nabla v|^6 + v^{n-2}|D^2 v|^2 |\nabla v|^2\} \leqslant$$

$$\leqslant c \left\{ \int\limits_\Omega \varphi^6 v^n |\nabla \Delta v|^2 + \int\limits_{\{\varphi>0\}} v^{n+2} |\nabla \varphi|^6 \right\},$$

$$\int\limits_\Omega \varphi^6 |\nabla \Delta v^{\frac{n+2}{2}}|^2 \leqslant c \left\{ \int\limits_\Omega \varphi^6 v^n |\nabla \Delta v|^2 + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\{\varphi>0\}} v^{n+2} \{|\nabla\varphi|^6 + \varphi^2 |D^2\varphi|^2 |\nabla\varphi|^2 + \varphi^3 |\Delta\varphi|^3\} \right\},$$

где $\varphi \in C^2(\Omega)$ *— произвольная неотрицательная функция такая, что тангенциальная компонента* $\nabla\varphi$ *равна нулю на* $\partial\Omega$; *постоянная* $c > 0$ *не зависит от* v.

Лемма Б.4 [30]. *Предположим, что неотрицательная неубывающая функция* $f(s) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условию*

$$f(s + \delta) \leqslant c_0 \left(\frac{f(s)}{\delta^\alpha} \right)^\beta \quad \forall\, s > 0, \quad \delta > 0,$$

с действительными числами $c_0 > 0$, $0 < \beta < 1$, $\alpha > 0$. *Тогда* $f(s) \leqslant \leqslant 2^{\frac{\alpha\beta}{1-\beta}} c_0^{\frac{1}{1-\beta}} s^{-\frac{\alpha\beta}{1-\beta}}$ $\forall s > 0$.

1. *Bernis F.* Viscous flows, fourth order nonlinear degenerate parabolic equations and singular elliptic problems // Free Boundary Problems: Theory and Appl. Pitman Res. Notes Math. / Eds J. I. Diaz, M. A. Herrero, A. Linan, J. L. Vazquez. – Harlow: Longman, 1995. – Vol. 323. – P. 40 – 56.
2. *Bertozzi A. L., Münch A., Shearer M.* Undercompressive shocks in thin film flows // Physica D. – 1999. – **134**. – P. 431 – 464.
3. *Bertozzi A. L., Pugh M.* The lubrication approximation for thin viscous films: the moving contact line with a porous media cutoff of the Van der Waals interactions // Nonlinearity. – 1994. – **7**. – P. 1535 – 1564.
4. *Bertozzi A. L., Pugh M.* Long-wave instabilities and saturation in thin film equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1998. – **51**, № 6. – P. 625 – 661.
5. *Elliot C. M., Garcke H.* On the Cahn – Hilliard equation with degenerate mobility // SIAM J. Math. Anal. – 1996. – **27**, № 2. – P. 404 – 423.
6. *Grün G.* Degenerate parabolic differential equations of fourth order and plasticity model with non-local hardening // Z. anal. Anwendungen. – 1995. – **14**. – S. 541 – 574.
7. *Bertozzi A. L., Münch A., Shearer M., Zumbrun K.* Stability of compressive and undercompressive thin film traveling waves. The dynamics of thin fluid films // Eur. J. Appl. Math. – 2001. – **12**, № 3. – P. 253 – 291.
8. *Bertozzi A. L., Shearer M.* Existence of undercompressive traveling waves in thin film equations // SIAM J. Math. Anal. – 2000. – **32**. – P. 194 – 213.
9. *Lions J.-L.* Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. – Dunod: Gauthier-Villars, 1969.

10. *Bernis F., Friedman A.* Higher order nonlinear degenerate parabolic equations // J. Different. Equat. – 1990. – **83**. – P. 179 – 206.
11. *Bernis F.* Finite speed of propagation and continuity of the interface for thin viscous flows // Adv. Different. Equat. – 1996. – **1**, № 3. – P. 337 – 368.
12. *Kersner R., Shishkov A.* Existence of free-boundaries in thin-film theory. – Donetsk, 1996. – 15 p. – (Preprint / NAS Ukraine. Inst. Appl. Math. and Mech., № 6).
13. *Beretta E., Bertsch M., Dal Passo R.* Nonnegative solutions of a fourth-order nonlinear degenerate parabolic equation // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1995. – **129**, № 2. – P. 175 – 200.
14. *Bernis F.* Finite speed of propagation for thin viscous flows when $2 \leqslant n < 3$ // C. r. Acad. sci. Ser. Math. – 1996. – **322**. – P. 1169 – 1174.
15. *Hulshof J., Shishkov A.* The thin film equation with $2 \leqslant n < 3$: Finite speed of propagation in terms of the L^1-norm // Adv. Different. Equat. – 1998. – **3**. – P. 625 – 642.
16. *Bernis F., Peletier L. A., Williams S. M.* Source type solutions of a fourth order nonlinear degenerate parabolic equation // Nonlinear Anal. – 1992. – **18**. – P. 217 – 234.
17. *Bernis F., Ferreira R.* Source-type solutions to thin-film equations in higher dimensions // Eur. J. Appl. Math. – 1997. – **8**. – P. 507 – 524.
18. *Beretta E.* Selfsimilar source solutions of a fourth order degenerate parabolic equation // Nonlinear Anal. – 1997. – **29**, № 7. – P. 741 – 760.
19. *Bertozzi A. L., Pugh M.* The lubrication approximation for thin viscous films: regularity and long time behavior of weak solutions // Communs Pure and Appl. Math. – 1994. – **49**, № 2. – P. 85 – 123.
20. *Giacomelli L.* A fourth-order degenerate parabolic equation describing thin viscous flows over an inclined plane // Appl. Math. Lett. – 1999. – **12**, № 8. – P. 107 – 111.
21. *Giacomelli L., Shishkov A.* Propagation of support in one-dimensional convected thin-film flow // Indiana Univ. Math. J. – 2005. – **54**, № 4. – P. 1181 – 1215.
22. *Dal Passo R., Garcke H., Grün G.* On a fourth-order degenerate parabolic equation: Global entropy estimates, existence and qualitative behavior of solutions // SIAM J. Math. Anal. – 1998. – **29**, № 2. – P. 321 – 342.
23. *Grün G.* On free boundary problems arising in thin film flow // Habilitat. Thesis. – Univ. Bonn, 2001 (accepted).
24. *Dal Passo R., Giacomelli L., Shishkov A.* The thin film equation with nonlinear diffusion // Communs Part. Different. Equat. – 2001. – **26**. – P. 1509 – 1557.
25. *Таранец Р. М., Шишков А. Е.* Об уравнении течения тонких пленок с нелинейной конвекцией в многомерных областях // Укр. мат. вісн. – 2004. – **1**, № 3. – С. 402 – 444.
26. *Bertsch M., Dal Passo R., Garcke H., Grün G.* The thin viscous flow equation in higher space dimension // Adv. Different. Equat. – 1998. – **3**. – P. 417 – 440.
27. *Dal Passo R., Garcke H.* Solutions of a fourth order degenerate parabolic equation with weak initial trace // Ann. S. N. S., Classe Sci. – 1999. – **28**. – P. 153 – 181.
28. *Таранец Р. М.* Разрешимость и качественные свойства решений уравнений тонких капиллярных пленок с нелинейной диффузией, конвекцией и абсорбцией: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Донецк, 2005. – 166 с.
29. *Nirenberg L.* An extended interpolation inequality // Ann. Scuola norm. super. Pisa. – 1966. – **20**. – P. 733 – 737.
30. *Stampacchia G.* Equations elliptiques du second order a coefficients discontinues // Press. Univ. Montreal. – Montreal, 1966.

Получено 01.11.2005