УДК 517.946

А. Ф. Тедеев (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ. ЗАДАЧА НЕЙМАНА*

We investigate the behaviour of the total mass of a solution of the Neumann problem for a wide class of degenerate parabolic equations with damping in a space with a noncompact boundary. We find new critical indexes in the problem considered.

Досліджується поведінка тотальної маси розв'язку задачі Неймана для широкого класу вироджених параболічних рівнянь з демпфіруванням у просторах із некомпактною межею. Знайдено нові критичні показники в досліджуваній задачі.

1. Введение. В данной работе рассматривается задача Неймана

$$u_t = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}u_{x_i}\right) - a(x)\left|Du^{\nu}\right|^{q}, \qquad (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}u_{x_i}n_i = 0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,\infty), \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x\in\Omega, \tag{1.3}$$

где $\Omega \subset R^N$, $N \ge 2$, — неограниченная область с достаточно гладкой некомпактной границей, $n = (n_i)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $Du = \left(u_{x_1},\ldots,u_{x_N}\right)$. В дальнейшем предполагаем, что $a(x)$ и $u_0(x)$ — неотрицательные измеримые функции, причем $u_0 \in L_1(\Omega)$, т. е. u_0 имеет конечную массу. Кроме того,

$$m+\lambda-2 \ge 0, \qquad \lambda > 0, \qquad 1 < q < \lambda + 1, \qquad \nu q > m+\lambda-1. \tag{1.4}$$

Будем предполагать также дополнительные условия на данные задачи. Уравнение $u_t = \Delta u - |Du|^q + \delta u^p$, $\delta > 0$, было впервые исследовано в работе [1] с целью изучения влияния члена $-|Du|^q$ (или, иначе, демпфирования) на проблему существования или несуществования глобальных по времени решений задачи Дирихле. Подробный анализ результатов в этом направлении можно найти в обзорной работе [2]. Отметим также недавний цикл работ [3 – 6], где имеются дальнейшие ссылки.

Целью данной работы является нахождение условий на q, при которых масса решения (1.1) – (1.3) $\|u(\cdot,t)\|_{1,\Omega} \equiv \|u(\cdot,t)\|_{L_1(\Omega)}$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Отметим, что если $a(x) \equiv 0$, то для почти всех $t > 0$ $\|u(\cdot,t)\|_{1,\Omega} \equiv \|u_0\|_{1,\Omega}$ и, следовательно, масса не стремится к нулю при $t\to\infty$. Однако, как выяснилось, даже наличие сильного стока, т. е. демпфирования, в (1.1) не всегда гарантирует стремление к нулю массы решения (1.1) – (1.3). В случае $a(x) \equiv \text{const}$, $\Omega = R^N$ (задача Коши) задача (1.1), (1.3) исследовалась в работе [7], где дан ответ на вопрос: при каких условиях на параметры задачи масса решения стремится к нулю? А именно, найден критический показатель $q^* = (N(m+\lambda-1)+\lambda+1)/(N\nu+1)$. Это означает, что в случае $q \le q^*$ $\|u(\cdot,t)\|_{1,R^N} \to 0$ при $t\to\infty$, а в случае $q > q^*$ $\|u(\cdot,t)\|_{1,R^N} > c > 0$ при достаточно больших $t > t_0$. Кроме того, например, если $\operatorname{supp} u_0 < \infty$, то при достаточно больших значениях t доказаны следующие оценки:

---

* Выполнена при поддержке INTAS (грант 03-51-5007).

$$\|u(\cdot,t)\|_{1,R^N} \le ct^{-A} \quad \text{при} \quad q < q^*, \tag{1.5}$$

где

$$A = \frac{q^*-q}{H}(N\nu+1), \quad H = (\lambda+1)(\nu q-1) - q(m+\lambda-2)\cdot$$

и

$$\|u(\cdot,t)\|_{1,R^N} \le C(\ln t)^{-\frac{1}{\nu q-1}} \quad \text{при} \quad q = q^*. \tag{1.6}$$

Отметим, что задача (1.1) – (1.3) с $a(x) \equiv 0$ изучалась в работах [8 – 11], где были даны точные оценки $\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega}$ и геометрии носителя. Комбинируя подходы, изложенные в этих работах и работе [7], мы устанавливаем оценки типа (1.5) и (1.6), которые, как это будет видно из дальнейшего, существенно зависят от геометрии области и поведения $a(x)$ на бесконечности. Для формулировки основных результатов и их доказательств нам потребуется ряд определений и вспомогательных предложений. Всюду в дальнейшем через c будем обозначать постоянные, зависящие лишь от параметров задачи и не зависящие от размера области Q_t.

2. Вспомогательные утверждения и формулировки основных результатов. Выделим классы областей с некомпактной границей, удовлетворяющих условиям изопериметрического типа. Будем считать, что начало координат принадлежит Ω. Пусть $l(v) = \inf\{\operatorname{mes}_{N-1}(\partial Q \cap \Omega)\}$, где инфимум берется по всем открытым множествам $Q \subset \Omega$ с липшицевой границей; $\operatorname{mes}_N Q = v$. Будем говорить, что Ω принадлежит классу $B_1(g)$, если существует неубывающая непрерывная для всех $v > 0$ функция $g(v)$ такая, что $\dfrac{v^{(N-1)/N}}{g(v)}$ не убывает для всех $v > 0$. Далее, пусть $r_k(x) = \left(x_1^2 + \ldots + x_k^2\right)^{1/2}$, $1 \le k \le N$, и для заданного $\rho > 0$ $\Omega(\rho) = \Omega \cap \{r_k(x) < \rho\}$, $V(\rho) = \operatorname{mes}_N \Omega(\rho)$. Обозначим через R обратную к $V(\rho)$ функцию. Будем говорить, что Ω принадлежит классу $B_2(g)$, если $\Omega \in B_1(g)$ и существует постоянная $c_0 > 0$ такая, что

$$R(v) \ge c_0 \frac{v}{g(v)} \tag{2.1}$$

для всех $v > 0$. Легко видеть, что если $\Omega \in B_1(g)$, то справедливо обратное к (2.1) неравенство

$$R(v) \le N \frac{v}{g(v)} \tag{2.2}$$

для всех $v > 0$. Кроме того, из (2.1) и (2.2) следует, что

$$\frac{1}{N}\rho g(V(\rho)) \le V(\rho) \le \frac{1}{c_0}\rho g(V(\rho)) \tag{2.3}$$

для всех $\rho > 0$. В свою очередь, из (2.3) вытекает, что $\operatorname{mes}_N \Omega = \infty$. Классы областей $B_1(g)$, $B_2(g)$ были введены в [12], где получены точные оценки скорости стабилизации решения задачи Неймана для линейных параболических уравнений второго порядка. Типичным примером областей класса $B_2(g)$ является область типа параболоида $\Omega^h = \left\{x \in R^N : |x'| < x_1^h\right\}$, где $|x'| = \left(x_2^2 + \ldots + x_N^2\right)^{1/2}$, $x_1 > 1$, $0 \le h \le 1$. В этом случае (см. [9] для $N \ge 2$ и [12] при $N = 2$)

$$g(v) = c\min\left(v^{(N-1)/N}, v^{\gamma}\right), \quad \gamma = \frac{h(N-1)}{h(N-1)+1}. \tag{2.4}$$

Далее, чтобы избежать громоздких формулировок результатов, будем предполагать, что $a(x) \equiv a(r_k(x))$. Более того, предположим, что $a(\rho)$ — растущая функция для всех $\rho > 0$. Если $a_1(s)$ — убывающая перестановка функции $1/a(r_k(x))$, то согласно определению

$$a_1(s) = \left[\frac{1}{a(r_k(x))}\right]^* = \frac{1}{a(R(s))}. \tag{2.5}$$

Напомним, что под убывающей перестановкой измеримой функции $f(x)$ понимается следующее: $f(s)^* = \inf_\tau\{\mu(\tau) < s\}$, $\mu(\tau) = \operatorname{mes}_n\{x \in \Omega: f(x) > \tau\}$ (см., например, [13]). Предположим, что

$$\frac{s^q}{a(s)} \text{ возрастает для всех } s > 0. \tag{2.6}$$

Введем теперь понятие решения задачи (1.1) – (1.3) в $Q_\infty = \Omega \times (0, \infty)$. Будем говорить, что $u(x, t)$ — решение задачи (1.1) – (1.3) в Q_∞, если $u \geq 0$, $u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(Q_T) \cap C((0, T); L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega))$, $|Du^\sigma|^{\lambda+1}$, $a(x)|Du^\nu|^q \in L_{1,\mathrm{loc}}(Q_T)$, $\sigma = (m + \lambda - 1)/\lambda$, для любого $T > 0$ и для любой функции $\eta \in C_0^1(Q_T)$

$$\iint\limits_{Q_T} \left\{-u\eta_t + u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du\,D\eta + a\left|Du^\nu\right|^q\eta\right\}dx\,dt = 0. \tag{2.7}$$

Кроме того, $u(x, t) \to u_0$ при $t \to 0$ в $L_1(\Omega)$.

Вопрос о существовании решения задачи (1.1) – (1.3) представляет самостоятельный интерес и будет рассмотрен в отдельной работе.

Прежде чем перейти к точным формулировкам основных результатов, введем некоторые обозначения. Пусть P и φ — обратные соответственно к $V(s)^{m+\lambda-2}s^{\lambda+1}$ и $\left[s^H a^{m+\lambda-2}(s)\right]^{1/(\nu q-(m+\lambda-1))}$ функции. Здесь $H = (\lambda + 1)(\nu q - 1) - q(m + \lambda - 2)$. Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть* $u(x, t)$ — *решение задачи* (1.1) – (1.3) *в* Q_∞, $\operatorname{supp} u_0 \subset \overline{\Omega(\rho_0)}$, $\rho_0 < \infty$, $\Omega \in B_2(g)$ *и выполнены условия* (1.4) *с* $m + \lambda - 2 > 0$ *и* (2.6). *Тогда справедливы оценки*

$$E(t) \equiv \int\limits_\Omega u(\cdot, t)\,dx \leq cV(\varphi(t))\left(\frac{\varphi(t)^q}{a(\varphi(t))t}\right)^{1/(\nu q-1)}, \tag{2.8}$$

$$E(t) \leq c\left[\int\limits_1^t \frac{a(P(\tau))}{V(P(\tau))^{\nu q-1}P(\tau)^q}d\tau\right]^{-1/(\nu q-1)}, \tag{2.9}$$

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty,\Omega} \leq c\left(\frac{\varphi(t)^{\lambda+1}}{t}\right)^{1/(m+\lambda-2)} \tag{2.10}$$

для всех $t > t_0 = t_0\left(\rho_0, \|u_0\|_{1,\Omega}^{m+\lambda-2}\right)$.

Теорема 2.2. *Пусть* $u(x, t)$ — *решение задачи* (1.1) – (1.3) *в* $\Omega^h \times (0, \infty)$, $a(x) \equiv x_1^\alpha$, $0 \leq \alpha < q$, $\operatorname{supp} u_0 \subset \overline{\Omega_h(\rho_0)}$, *и выполнены условия* (1.4) *с* $m + \lambda - 2 > 0$,

$$q > q^* = \frac{N_h(m + \lambda - 1) + \lambda + 1 + \alpha}{N_h\nu + 1}, \tag{2.11}$$

где $N_h = (N - 1)h + 1$. *Тогда для достаточно больших* $t > t_1 = t_1\left(\rho_0, \|u_0\|_{1,\Omega}\right)$

$$E(t) \ge c > 0. \tag{2.12}$$

Теорема 2.3. *Пусть* $u(x,t)$ — *решение задачи* (1.1) – (1.3) *в* Q_∞, $\Omega \in B_2(g)$ *и выполнены условия* (1.4) *и* (2.6) *с* $\nu = \sigma = (m+\lambda-1)/\lambda$. *Тогда справедлива оценка*

$$E(t) \le c\left[\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\rho(t))} u_0\,dx + \frac{V(\rho(t))}{\rho(t)^{q/(q-\lambda)}\,a(\rho(t))^{\lambda/(q-\lambda)}}\right], \tag{2.13}$$

где $\rho(t)$ *для всех* $t>0$ *определяется следующим образом*:

$$\rho^{(q(m+\lambda-2)+(\lambda+1)(q-\lambda))/\lambda}a(\rho)^{m+\lambda-2} = t^{(q-\lambda)(m+\lambda-1)/\lambda}. \tag{2.14}$$

Приведем примеры. Пусть $\Omega = \Omega^h$, $\alpha \equiv x_1^\alpha$ для $x \ge 1$ и $a \equiv 1$ для $0 < x < 1$, $0 \le \alpha < q$. Тогда из (2.8) получаем

$$E(t) \le ct^{-\Lambda}, \tag{2.15}$$

где $\Lambda = \dfrac{(q^*-q)(N_h\nu+1)}{H_1}$, $H_1 = H + \alpha(m+\lambda-2)$; q^* определено в (2.11). Из (2.15) видно, что если $q < q^*$, то $E(t) \to 0$, $t \to \infty$. В тех же предположениях при $q = q^*$ из (2.9) следует оценка

$$E(t) \le c[\ln t]^{-1/(\nu q-1)}. \tag{2.16}$$

Далее, оценка (2.10) принимает вид

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} \le Ct^{-(\lambda+1+\alpha-q)/H_1}. \tag{2.17}$$

Из приведенных результатов следует, что $q = q^*$ играет роль критического показателя в задаче (1.1) – (1.3). Как видно, этот показатель зависит не только от m, λ, ν, но и от геометрии области и функции $a(x)$. Заметим при этом, что если $h = 1$, $a(x) \equiv 1$, то новый критический показатель совпадает с полученным в [7] для случая задачи Коши. Понятно, что случай задачи Коши не исключается из данного исследования. Отметим также следующий факт: оценки (2.17) и (2.10) не зависят от геометрии области. Точность приведенных результатов подтверждается тем, что функция $u(x,t) = (t+t_0)^{-(\lambda+1+\alpha-q)/H_1} f\left(|x|(t+t_0)^{-(\nu q-(m+\lambda-1))/H_1}\right)$ является решением уравнения (1.1) с $a = |x|^\alpha$. При этом $f(r)$ удовлетворяет уравнению $-\left(\dfrac{\lambda+1+\alpha-q}{H_1}f(r) + \dfrac{\nu q-(m+\lambda-1)}{H_1}rf_r\right) = r^{-(N-1)}\dfrac{d}{dr}\left(r^{N-1}f^{m-1}|f_r|^{\lambda-1}f_r\right) - r^\alpha\left|(f^\nu)_r\right|^q$.

Далее, теорема 2.3 справедлива и в невырожденном случае. Например, если $m+\lambda-2=0$, то $\rho(t) = t^{1/(\lambda+1)}$, и если $\operatorname{supp} u_0 < \infty$, то из (2.3) следует

$$E(t) \le cV\left(t^{1/(\lambda+1)}\right)t^{-q/[(q-\lambda)(\lambda+1)]}\left[a\left(t^{1/(\lambda+1)}\right)\right]^{-\lambda/(q-\lambda)}. \tag{2.18}$$

Заметим, что из условий (1.4) при $\nu = (m+\lambda-1)/\lambda$ получаем $\lambda < q < \lambda+1$. Критичность же показателя q в (2.18) определяется условием стремления к нулю при $t \to \infty$ правой части в (2.18). По-видимому, оценка (2.18) является новой даже в случае $\lambda = 1$.

В заключение этого пункта приведем вспомогательное утверждение, являющееся частным случаем леммы 3.1 [14].

Лемма 2.1. *Пусть* $\Omega \in B_1(g)$ *и выполнено условие*: $\dfrac{s^p}{a(s)}$ *возрастает для* $s > 0,\ p > 1$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\int_\Omega a\big(r_k(x)\big)|Du|^p\,dx \;\geq\; c\frac{E_p}{G\Big(E_\beta^{p/(p-\beta)} \Big/ E_p^{\beta/(p-\beta)}\Big)} \tag{2.19}$$

для

$$0 < \beta < p, \qquad G(s) = \left[\frac{s}{g(s)}\right]^p \frac{1}{a(R(s))}, \qquad E_\gamma = \int_\Omega |u|^\gamma\,dx.$$

Если $\operatorname{supp} u(x) \subset \overline{\Omega(\rho)}$, *то очевидным следствием* (2.19) *является неравенство Пуанкаре*

$$\int_{\Omega(\rho)} |u|^p\,dx \;\leq\; c\frac{\rho^p}{a(\rho)} \int_{\Omega(\rho)} a|Du|^p\,dx. \tag{2.20}$$

3. *Доказательство основных результатов. Доказательство теоремы* 2.1. Докажем сначала, что

$$Z(t) \;=\; \inf\big\{\, r > 0 : u(x,t) = 0, \ \text{ п. в. } \ x \in \Omega \setminus \Omega(r) \,\big\} \;\leq\; c\phi(t). \tag{3.1}$$

Рассмотрим последовательность $r_n = 2\rho(1 - 2^{-n-1}),\ n = 0, 1, \ldots,\ \rho > 2\rho_0$. Пусть $\zeta_n\big(r_k(x)\big)$ — последовательность гладких функций, удовлетворяющих условиям: $\zeta_n = 0$ при $x \in \Omega(r_n)$, $\zeta_n \equiv 1$ при $x \in \Omega \setminus \Omega(\bar r_n)$, где $\bar r_n = \dfrac{r_n + r_{n+1}}{2}$, и $\big|D\zeta_n\big| \leq c2^n\rho^{-1}$. Тогда, умножая обе части уравнения (1.1) на $\zeta_n^{\lambda+1}u^\theta,\ \theta > 0$, и интегрируя по Q_t, получаем

$$y_{n+1} \;\equiv\; \sup_{0<\tau<t} \int_{\overline{U}_n} u^{1+\theta}\,dx \;+\; \int_0^t \int_{\overline{U}_n} u^{m+\theta-2}|Du|^{\lambda+1}\,dx\,d\tau \;+$$

$$+\; \int_0^t \int_{\overline{U}_n} u^\theta \big|Du^\nu\big|^q\,dx\,d\tau \;\leq\; c\frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho^{\lambda+1}} \int_0^t \int_{U_n \setminus \overline{U}_n} u^{m+\lambda+\theta-1}\,dx\,d\tau, \tag{3.2}$$

где $U_n = \Omega \setminus \Omega(r_n)$, $\overline{U}_n = \Omega \setminus \Omega(\bar r_n)$. Точно так же, как в работе [9], доказывается неравенство

$$y_{n+1} \;\leq\; c\frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho^{\lambda+1}} t^{(1+\theta)(\lambda+1)/K_{1+\theta}}\, y_n^{1+(m+\lambda-2)(\lambda+1)/K_{1+\theta}}\, f_0\Big(t\, y_0^{(m+\lambda-2)/(1+\theta)}\Big), \tag{3.3}$$

где

$$f_0(s) \;=\; \left[F_1^{(-1)}\!\left(\frac{1}{s}\right) s^{N(1+\theta)/K_{1+\theta}}\right]^{(m+\lambda-2)/(1+\theta)},$$

$$K_{1+\theta} \;=\; N(m+\lambda-2) \;+\; (1+\theta)(\lambda+1),$$

$F_1^{(-1)}$ — обратная к $F_1(s) = s^{\lambda+(\lambda+1)/\beta} g(s^{-1})^{\lambda+1}$ функция. Перепишем (3.3) в виде

$$\frac{y_{n+1}^a}{A} \;\leq\; c2^{n(\lambda+1)}, \tag{3.4}$$

где

$$a = \left(1 + \frac{(m+\lambda-2)(\lambda+1)}{K_{1+\theta}}\right)^{-1},$$

$$A = \left[t^{(1+\theta)(\lambda+1)/K_{1+\theta}} \rho^{-\lambda-1} f_0\left(t\, y_0^{(m+\lambda-2)/(1+\theta)}\right)\right]^{-a}.$$

Нам потребуется еще одно рекуррентное неравенство. Поскольку известно [9], что

$$Z(t) \le c\left[P\left(t \| u_0 \|_{1,\Omega}^{m+\lambda-2}\right) + \rho_0 \right], \tag{3.5}$$

то, используя неравенство Пуанкаре (2.20) с $p = q$, получаем

$$\int_0^t \int_{U_n} w^q\, dx\, d\tau \le c\rho^q (a(\rho))^{-1} \int_0^t \int_{U_n} a|Dw|^q\, dx\, d\tau \le$$

$$\le c\frac{Z(t)^q}{a(Z(t))} y_n, \qquad w = u^{(\nu q+\theta)/q}. \tag{3.6}$$

Таким образом, применяя к правой части (3.2) неравенство Гельдера, в силу (3.6) находим

$$y_{n+1} \le c\frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho^{\lambda+1}} \int_0^t \int_{U_n} u^{m+\lambda+\theta-1}\, dx\, d\tau \le$$

$$\le c\frac{2^{n(\lambda+1)}}{\rho^{\lambda+1}} [tV(\rho)]^{(\nu q-(m+\lambda-1))/(\nu q+\theta)} \left[\frac{Z(t)^q}{a(Z(t))}\right]^{(m+\lambda+\theta-1)/(\nu q+\theta)} y_n^{(m+\lambda+\theta-1)/(\nu q+\theta)}. \tag{3.7}$$

Перепишем неравенство (3.7) в виде

$$\frac{y_{n+1}^b}{B} \le c2^{n(\lambda+1)} y_n, \tag{3.8}$$

где $b = \dfrac{\nu q+\theta}{m+\lambda+\theta-1} > 1$, поскольку

$$\nu q > m + \lambda - 1, \qquad B = \left\{[tV(\rho)]^{(\nu q-(m+\lambda-1))/(\nu q+\theta)} \rho^{-\lambda-1} \frac{Z(t)^q}{a(Z(t))}\right\}^b.$$

Объединяя теперь неравенства (3.4) и (3.8), с учетом неравенства Юнга получаем

$$\frac{y_{n+1}^{\varepsilon_1}}{A^{\varepsilon_1} B^{1-\varepsilon_1}} \le c\left(\frac{y_{n+1}^a}{A} + \frac{y_{n+1}^b}{B}\right) \le c2^{n(\lambda+1)} y_n,$$

где $\varepsilon_1 = \dfrac{b}{b+1-a} < 1$. Следовательно, в силу итеративной леммы 5.6 [15, с. 113] заключаем, что $y_n \to 0$, $n \to \infty$,

$$A(y_0 B)^{(1-a)/b} \le c_0. \tag{3.9}$$

Для оценки y_0 рассмотрим последовательность

$$y^{(n)} = \sup_{0<\tau<t} \int_{r_k(x)>\rho_n} u(\cdot,\tau)^{1+\theta} dx + \int_0^t \int_{r_k(x)>\rho_n} u^{m+\theta-2} |Du|^{\lambda+1} dx\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_{r_k(x)>\rho_n} u^\theta \left|Du^\nu\right|^q dx\, d\tau, \qquad \rho_n = \frac{\rho(1+2^n)}{2}.$$

Рассуждая точно так же, как при доказательстве (3.8), имеем $\left(y^{(n)}\right)^b \le$ $\le c2^{n(\lambda+1)}y^{(n+1)}B$. Итерируя последнее неравенство, получаем оценку

$$y_0 = y^{(0)} \le$$

$$\le ctV(\rho)\left[\frac{Z(t)^q}{a(Z(t))}\right]^{(m+\lambda+\theta-1)/(\nu q-(m+\lambda-1))} \rho^{-(\lambda+1)(\nu q+\theta)/(\nu q-(m+\lambda-1))}. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.9) и учитывая очевидное неравенство $Z(t) \le 2\rho$, приходим к выводу, что $u \equiv 0$, если $\rho^H a(\rho)^{m+\lambda-2} \ge c_1 t^{\nu q-(m+\lambda-1)}$. Это и доказывает оценку (3.1).

Далее, умножим обе части (1.1) на u^θ и проинтегрируем результат по $\Omega(\rho)$ с $\rho = Z(t)$. В результате получим

$$\frac{1}{\theta+1}\frac{d}{d\tau}\int_{\Omega(\rho)} u^{1+\theta}\,dx = -\theta\int_{\Omega(\rho)} u^{m+\theta-2}|Du|^{\lambda+1}\,dx -$$

$$- c\int_{\Omega(\rho)} a\left|Du^{(\nu q+\theta)/q}\right|^q dx \le -c\int_{\Omega(\rho)} a\left|Du^{(\nu q+\theta)/q}\right|^q dx. \tag{3.11}$$

Применяя теперь неравенства Гельдера и Пуанкаре, получаем

$$\int_{\Omega(\rho)} u^{1+\theta}\,dx \le V(\rho)^{(\nu q-1)/(\nu q+\theta)}\left(\int_{\Omega(\rho)} u^{\nu q+\theta}\,dx\right)^{(1+\theta)/(\nu q+\theta)} \le$$

$$\le cV(\rho)^{(\nu q-1)/(\nu q+\theta)}\left[\rho^q a(\rho)^{-1}\right]^{(1+\theta)/(\nu q+\theta)}\left(\int_{\Omega(\rho)} a\left|Du^{(\nu q+\theta)/q}\right|^q dx\right)^{(1+\theta)/(\nu q+\theta)}.$$

Следовательно, из (3.11) имеем

$$\frac{d}{d\tau}\int_{\Omega(\rho)} u^{1+\theta}dx \le -cV(\rho)^{-(\nu q-1)/(1+\theta)}a(\rho)\rho^{-q}\left(\int_{\Omega(\rho)} u^{1+\theta}\,dx\right)^{(\nu q+\theta)/(1+\theta)}.$$

Интегрируя это неравенство, легко находим

$$\int_{\Omega(\rho)} u^{1+\theta}\,dx \le cV(\rho)\left[\rho^q a(\rho)^{-1}t^{-1}\right]^{(1+\theta)/(\nu q-1)}.$$

Наконец, применяя неравенство Гельдера, с учетом предыдущего неравенства получаем

$$\int_{\Omega(Z(t))} u(\cdot,t)\,dx \le \left(\int_{\Omega(Z(t))} u^{1+\theta}\,dx\right)^{1/(1+\theta)} V(Z(t))^{\theta/(1+\theta)} \le$$

$$\le \left[V(Z(t))\left(Z(t)^q a(Z(t))^{-1}t^{-1}\right)^{(1+\theta)/(\nu q-1)}\right]^{1/(1+\theta)} V(Z(t))^{\theta/(1+\theta)} \le$$

$$\le cV(\varphi(t))\left[\varphi(t)^q a(\varphi(t))^{-1}t^{-1}\right]^{1/(\nu q-1)}.$$

Докажем оценку (2.9). Интегрируя уравнение (1.1) по $\Omega(\rho)$, $\rho = Z(t)$, получаем

$$\frac{dE(t)}{dt} = -D(t), \tag{3.12}$$

где

$$E(t) = \int\limits_{\Omega(\rho)} u(\cdot, t)\,dx, \qquad D(t) = \int\limits_{\Omega(\rho)} a\left|Du^{\nu}\right|^{q} dx.$$

Применяя неравенства Гельдера и Пуанкаре, имеем

$$E(t) \le \left(\int\limits_{\Omega(\rho)} u^{\nu q}\,dx\right)^{1/(\nu q)} V(\rho)^{(\nu q-1)/(\nu q)} \le c\left[\frac{\rho^{q}}{a(\rho)}D(t)\right]^{1/(\nu q)} V(\rho)^{(\nu q-1)/(\nu q)}. \quad (3.13)$$

Поскольку из (3.5) при достаточно больших $t > t_0$ следует, что $Z(t) \le cP(t)$, из неравенств (3.12) и (3.13) вытекает

$$\frac{dE(t)}{dt} \le -c\left[\frac{a(P(t))}{V(P(t))^{\nu q-1}P(t)^{q}}\right]E(t)^{\nu q}. \quad (3.14)$$

Следовательно, интегрируя (3.14) от t_0 до t, получаем

$$E(t) \le c\left[\int\limits_{t_0}^{t}\frac{a(P(\tau))}{V(P(\tau))^{\nu q-1}P(\tau)^{q}}\,d\tau\right]^{-1/(\nu q-1)}.$$

Теорема 2.1 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.2.** Для любых $0 < t_1 < t$ имеем

$$E(t_1) = E(t) + \int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_{\Omega} x_1^{\alpha}\left|Du^{\nu}\right|^{q} dx\,d\tau. \quad (3.15)$$

Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_{\Omega} x_1^{\alpha}\left|Du^{\nu}\right|^{q} dx\,d\tau \le \left[\int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_{\Omega} u^{m+\theta-2}|Du|^{\lambda+1}\,dx\,d\tau\right]^{q/(\lambda+1)} \times$$

$$\times\left[\int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_{\Omega} x_1^{\alpha(\lambda+1)/(\lambda+1-q)}\,u^{q((\lambda+1)\nu-(m+\lambda-1)-\theta)/(\lambda+1-q)}\,dx\,d\tau\right]^{(\lambda+1-q)/(\lambda+1)} \equiv$$

$$\equiv J_1^{q/(\lambda+1)}\,J_2^{(\lambda+1-q)/(\lambda+1)}, \quad (3.16)$$

где $\theta > 0$ — достаточно малое число. Умножая обе части (1.1) на u^{θ} и интегрируя по $\Omega \times (t_1, t)$, имеем

$$J_1 \le c\int\limits_{\Omega} u^{1+\theta}(\cdot, t_1)\,dx. \quad (3.17)$$

Далее нам потребуется следующая оценка для $\Omega \in B_1(g)$ [8, 9]:

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} \le c\,\frac{t^{-1}\int_{t/2}^{t}E(\tau)\,d\tau}{\psi\left(t\left(t^{-1}\int_{t/2}^{t}E(\tau)\,d\tau\right)^{m+\lambda-2}\right)}, \quad (3.18)$$

где ψ — обратная к $\Psi(z) = z^{m+\lambda-2}(z/g(z))^{\lambda+1}$ функция.

В частности, если $\Omega = \Omega^{h}$, то в силу (2.4) для $z > 1$ $\psi(z) = cz^{((m+\lambda-2)N_h+\lambda+1)/N_h}$. Следовательно, с учетом того, что $E(t) \le \|u_0\|_{1,\Omega}$ $\forall\, t > 0$, из (3.18) для $t > 1$ получаем

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\Omega} \le c\|u_0\|_{1,\Omega}^{(\lambda+1)/K_h}\,t^{-N_h/K_h}, \quad (3.19)$$

где $K_h = (m+\lambda-2)N_h + \lambda + 1$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} u^{1+\theta}(\cdot,t)\,dx \;\le\; E(t_1)\|u(\cdot,t_1)\|^{\theta}_{\infty,\Omega} \;\le\; cE(t_1)\|u_0\|^{(\lambda+1)\theta/K_h}_{1,\Omega}\, t^{-N_h\theta/K_h}. \tag{3.20}$$

Отметим еще, что для $\Omega = \Omega^h$ $Z(t) \le c\left(\rho_0 + \|u_0\|^{(m+\lambda-2)/K_h}_{1,\Omega} t^{1/K_h}\right) \le$ $\le 2c\|u_0\|^{(m+\lambda-2)/K_h}_{1,\Omega} t^{1/K_h} \equiv \tilde{Z}(t)$ для $t > t_0 = \rho_0^{K_h}\|u_0\|^{m+\lambda-2}_{1,\Omega}$. Следовательно, для $t_0 < t_1 < t$ имеем

$$J_2 \;\le\; c\int\limits_{t_1}^{t} E(\tau)\tilde{Z}(\tau)^{\alpha(\lambda+1)/(\lambda+1-q)}\|u(\cdot,\tau)\|^{(H-\theta q)/(\lambda+1-q)}_{\infty,\Omega}\,d\tau \;\le$$

$$\le\; c\|u_0\|^{((m+\lambda-2)\alpha+(H-\theta q)(\lambda+1))/(K_h(\lambda+1-q))}_{1,\Omega}\,E(t_1)\int\limits_{t_1}^{t}\tau^{-(HN_h-\theta q N_h-\alpha(\lambda+1))/[(\lambda+1-q)K_h]}\,d\tau. \tag{3.21}$$

Поскольку $q > q^*$, интеграл в правой части (3.21) сходится при $\theta <$ $< \dfrac{(q-q^*)(N_h\nu+1)}{qN_h}$. Объединяя оценки (3.15) – (3.17), (3.21), находим

$$E(t_1) \;\le\; E(t) + c^*\|u_0\|^{H/K_h}_{1,\Omega}\, t_1^{-(q-q^*)N_h/K_h} E(t_1) \tag{3.22}$$

для всех $t_1 > t_0$. Выберем теперь t_1:

$$t_1 \;=\; \max\left\{ t_0, \left(2c^*\|u_0\|^{H_1/K_h}_{1,\Omega}\right)^{K_h/\left[(q-q^*)(N_h\nu+1)\right]} \right\}.$$

Тогда из (3.22) легко выводим оценку $2E(t) \ge E(t_1)$ для всех $t > t_1$. Отметим также [7] (лемма 4.1), что случай $u(x,t_1) \equiv 0$ для всех $x \in R^N$ и некоторого $t_1 > 0$ не имеет места.

Теорема 2.2 доказана.

***Доказательство теоремы* 2.3.** Имеем

$$E(t) \;=\; \int\limits_{\Omega} u(\cdot,t)\,dx \;=\; \int\limits_{\Omega(\rho)} u(\cdot,t)\,dx \;+\; \int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\rho)} u(\cdot,t)\,dx \;\equiv\; I_1 + I_2. \tag{3.23}$$

Согласно неравенству Гельдера

$$I_1 \;\le\; \left(\int\limits_{\Omega(\rho)} u^{\nu q}\,dx\right)^{1/(\nu q)} V(\rho)^{(\nu q-1)/(\nu q)}. \tag{3.24}$$

Пусть $u^{\nu} = v$. Тогда, применяя лемму 2.1 с $\beta = \nu^{-1} < q$, $p = q$, получаем

$$D(t) \;\equiv\; \int\limits_{\Omega} a|Dv|^q\,dx \;\ge\; c\,\frac{F_q(t)}{G\left(E(t)^{\nu q/(\nu q-1)}F_q(t)^{-1/(\nu q-1)}\right)}, \tag{3.25}$$

где

$$F_q(t) \;=\; \int\limits_{\Omega} v(\cdot,t)^q\,dx, \qquad G(s) \;=\; \left[\frac{s}{g(s)}\right]^q (a(R(s)))^{-1}.$$

Напомним, что $\dfrac{s}{g(s)} \sim R(s)$ для $\Omega \in B_2(g)$. Из (3.25) следует, что

$$F_q(t) \le c\,E(t)^{\nu q}\left\{ G_1^{(-1)}\left(\frac{D(t)}{E(t)^{\nu q}} \right)\right\}^{\nu q-1}, \tag{3.26}$$

где $G_1(s) = \dfrac{s^{\nu q-1}}{G(s^{-1})}$, $G_1^{(-1)}$ — обратная к G_1 функция. Далее, интегрируя (1.1) по Ω, имеем $\dfrac{d}{dt}E(t) = -D(t)$. Таким образом, из (3.23), (3.24), (3.26) получаем неравенство

$$E(\tau) \le c\,E(\tau)V(\rho)^{(\nu q-1)/(\nu q)}\left\{ G_1^{(-1)}\left(\left(-\frac{d}{d\tau}E(\tau) \right)E(\tau)^{-(\nu q)}\right)\right\}^{(\nu q-1)/(\nu q)} + I_2(\tau). \tag{3.27}$$

Для оценки $I_2(\tau)$ поступим следующим образом. Пусть $\zeta(x) = \zeta(r_k(x))$ — гладкая функция, равная 1 при $r_k(x) > \rho$, нулю при $r_k(x) < \rho/2$, $0 \le \zeta \le 1$, $0 < r_k < \infty$. Кроме того, $|D\zeta| \le c/\rho$. Умножим обе части (1.1) на ζ^s, $s \ge \lambda + 1$, и результат проинтегрируем по Ω. В результате получим

$$\frac{d}{d\tau}\int_\Omega \zeta^s u(\cdot,\tau)\,dx + \int_\Omega a\left|Du^\nu\right|^q \zeta^s\,dx \le \frac{c}{\rho}\int_{\Omega(\rho)\setminus\Omega(\rho\setminus 2)} \zeta^{s-1}\left|Du^\nu\right|^q dx,$$

$$\nu = \frac{m+\lambda-1}{\lambda}.$$

Применяя к правой части неравенство Юнга, получаем

$$\frac{d}{d\tau}\int_\Omega \zeta^s u(x,\tau)\,dx + \int_\Omega a\left|Du^\nu\right|^q \zeta^s\,dx \le$$

$$\le c\frac{\lambda}{q}\varepsilon^{q/\lambda}\int_\Omega a\left|Du^\nu\right|^q dx + c\frac{q-\lambda}{q}\frac{\varepsilon^{-(q-\lambda)/\lambda}}{\rho^{q/(q-\lambda)}}\int_{\Omega(\rho)\setminus\Omega(\rho\setminus 2)} a(r_k(x))^{-\lambda/(q-\lambda)}dx.$$

Полагая $c\dfrac{\lambda}{q}\varepsilon^{q/\lambda} = 1/2$, из последнего неравенства имеем

$$\frac{d}{d\tau}\int_\Omega \zeta^s u(\cdot,\tau)\,dx \le c\frac{V(\rho)}{\rho^{q/(q-\lambda)}a(\rho)^{\lambda/(q-\lambda)}}.$$

Наконец, интегрируя это неравенство, находим

$$\int_\Omega \zeta^s u(x,\tau)\,dx \le \int_\Omega \zeta^s u_0\,dx + c\frac{\tau V(\rho)}{\rho^{q/(q-\lambda)}a(\rho)^{\lambda/(q-\lambda)}} \equiv$$

$$\equiv \tilde F(\rho,\tau) \le \tilde F(\rho,t), \qquad t_1 < \tau < t. \tag{3.28}$$

Далее, отметим, что $G_1(s) = s^{\varepsilon_0}\left[s^{(N-1)/N} g(s^{-1})\right]^q$, $\varepsilon_0 = \dfrac{N(\nu q-1)+q}{N}$. Значит, $\dfrac{G_1(s)}{s^{\varepsilon_0}}$ возрастает. Это означает, что функция $s\left(G_1^{(-1)}(s^{-\nu q})\right)^{(\nu q-1)/(\nu q)} = s^{qN/\varepsilon_0}\left[\left(G_1^{(-1)}(s^{-\nu q})\right)^{(\nu q-1)/(\nu q)} s^{(\nu q-1)/\varepsilon_0}\right]$ также возрастает. Таким образом, из (3.27) и (3.28) следует

$$\frac{dy}{d\tau} \le -c\,E(t_1)^{\nu q} G_1\left(\left(\frac{y(\tau)}{E(t_1)}\right)^{\nu q/(\nu q-1)} V(\rho)^{-1}\right) \le$$

$$\le -c\,E(t_1)^{\nu q-\nu q\varepsilon_0/(\nu q-1)}\,y(\tau)^{\nu q\varepsilon_0/(\nu q-1)} G_1\left(V(\rho)^{-1}\right), \tag{3.29}$$

где $y(\tau) = E(\tau) - \tilde{F}(\rho, t)$.

Итак, при $t_1 = \sigma t$, $\sigma \in (0, 1)$, интегрируя (3.29) от σt до t, получаем

$$E(t) \leq \leq c\, E(\sigma t)^{\delta} \sigma^{-(\nu q-1)/(\nu q\varepsilon_0-\nu q+1)} t^{-(\nu q-1)/(\nu q\varepsilon_0-\nu q+1)} \times$$

$$\times\, G_1\big(V(\rho)^{-1}\big)^{(\nu q-1)/(\nu q\varepsilon_0-\nu q+1)} + \tilde{F}(\rho, t), \tag{3.30}$$

где $\delta = \dfrac{\nu q^2}{\nu q^2 + N(\nu q-1)^2} < 1$. Наконец, итерируя (3.30) по σ, имеем

$$E(t) \leq c t^{-1/(\nu q-1)} G_1\big(V(\rho)^{-1}\big)^{-1/(\nu q-1)} + c\tilde{F}(\rho, t).$$

Замечая теперь, что $G_1\big(V(\rho)^{-1}\big) \sim V(\rho)\rho^{q/(\nu q-1)} a(\rho)^{-1/(\nu q-1)}$ и находя ρ из условия

$$\rho(t)^{(q(m+\lambda-2)+(\lambda+1)(q-\lambda))/\lambda} a(\rho(t))^{m+\lambda-2} = t^{(q-\lambda)(m+\lambda-1)/\lambda},$$

приходим к требуемому утверждению.

Теорема 2.3 доказана.

1. *Chipot M., Weissler F. B.* Some blow-up results for a nonlinear parabolic equation with a gradient term // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – **20**. – P. 886–907.
2. *Souplet Ph.* Resent results and open problems on parabolic equations with gradient nonlinearities // J. Different. Equat. – 2001. – № 20. – P. 1–19.
3. *Laurencot Ph., Souplet Ph.* On the growth of mass for a viscous Hamilton – Jacobi equation. – 2002. – Preprint.
4. *Ben-Arti M., Souplet Ph., Wessler F. B.* The local theory for viscous Hamilton – Jacobi equations in Lebesgus spaces // J. Math. Pures and Appl. – 2002. – **81**. – P. 343–378.
5. *Souplet Ph.* Gradient blow-up for multidimensional nonlinear parabolic equations with general boundary conditions. – 2002. – Preprint.
6. *Benachour S., Laurencot Ph., Schmidt D., Souplet Ph.* Extinction and non-extincion for viscous Hamilton – Jacobi equations in R^N. – 2002. – Preprint.
7. *Andreucci D., Tedeev A. F., Ughi M.* The Cauchy problem for degenerate parabolic eqautions with source and damping // Ukr. Math. Bull. – 2004. – **1**, № 1. – P. 1–23.
8. *Тедеев А. Ф.* Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 10. – С. 1795–1806.
9. *Andreucci D., Tedeev A. F.* A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary // J. Math. Anal. and Appl. – 1999. – **231**. – P. 543–567.
10. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Optimal bounds and blow-up phenomena for parabolic problems in narrowing domains // Proc. Poy. Soc. Edinburgh A. – 1998. – **128**, № 6. – P. 1163–1180.
11. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Sharp estimates and finite speed of propagation for a Neumann problem in domains narrowing at infinity // Adv. Different. Equat. – 2000. – **5**. – P. 833–860.
12. *Гущин А. К.* Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1973. – **126**. – С. 5–45.
13. *Talenti G.* Elliptic equations and rearrangements // Ann/ Scuola norm. super. Pisa. – 1976. – **4**, № 3. – P. 697–718.
14. *Andreucci D., Cirmi G. R., Leonardi S., Tedeev A. F.* Large time behavior of solutions to the Neumann problem for a quasilinear second order degenerate parabolic equations in domains with noncompact boundary // J. Different. Equat. – 2001. – **174**. – P. 253–288.
15. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Получено 10.10.2005