УДК 517.5

С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов (Акад. тамож. службы Украины, Днепропетровск)

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ S^p, $1 \le p < \infty$

Properties of smoothness characteristics $\Omega_m(f,t)_{S^p}$, $m \in \mathbb{N}$, $t > 0$, of functions $f(x)$ which belong to the space S^p, $1 \le p < \infty$, introduced by A. I. Stepanets are considered and investigated. Exact Jackson-type inequalities are obtained and exact values of widths of classes of functions defined by means of $\Omega_m(f,t)_{S^p}$ are computed.

Розглянуто та досліджено властивості гладкісних характеристик $\Omega_m(f,t)_{S^p}$, $m \in \mathbb{N}$, $t > 0$, функцій $f(x)$, що належать уведеному О. І. Степанцем простору S^p, $1 \le p < \infty$. Одержано точні нерівності типу Джексона та обчислено точні значення поперечників класів функцій, визначених за допомогою $\Omega_m(f,t)_{S^p}$.

1. Пусть $L_p \equiv L_p([-\pi,\pi])$, $1 \le p < \infty$, — пространство 2π-периодических измеримых на $[-\pi,\pi]$ функций $f(x)$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_p = \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

При решении в L_p многих задач теории аппроксимации функций в качестве характеристики скорости стремления к нулю величин их наилучших полиномиальных приближений используют, например, модуль непрерывности m-го порядка

$$\omega_m(f,t)_p = \sup\left\{\left\|\Delta_h^m f(\cdot)\right\|_p : 0 \le h \le t\right\}, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

где $\Delta_h^m f(x) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}C_m^j f(x+jh)$ — конечная разность m-го порядка функции f в точке x с шагом h. Однако в некоторых задачах наряду с (1) используется величина [1, 2]

$$\Omega_m(f,t)_p = \left\{\frac{1}{t}\int_0^t \left\|\Delta_h^m f(\cdot)\right\|_p^p dh\right\}^{1/p}, \quad t > 0. \tag{2}$$

Например, в работе [1] наилучшее приближение функций полиномами по системе Хаара оценивается не с помощью модуля непрерывности первого порядка, а посредством величины $\Omega_1(f,t)_p$, которая, как показано в [3], эквивалентна $\omega_1(f,t)_p$.

Для исследования поведения наилучшего приближения функций алгебраическими полиномами в пространстве $L_p([a,b])$, $p \ge 1$, и $C([a,b])$ К. Г. Иванов ввел в рассмотрение новый вид m-модулей непрерывности $\tau_m(f;w,\lambda)_{p',p}$, а также изучил их свойства и взаимосвязи с известными дифференциально-разностными характеристиками функций [4, 5].

Напомним, что τ-модулем непрерывности m-го порядка для $f(x) \in L_{\max(p',p)}$, где $p, p' \ge 1$, называют величину [5, 6]

$$\tau_m(f,w;\lambda)_{p',p} = \left\|w(\cdot)\omega_m(f,\cdot;\lambda(\cdot))_{p'}\right\|_p, \tag{3}$$

где $\lambda(x)$ — произвольная определенная на $[0, 2\pi]$ положительная 2π-периодическая функция, $w(x)$ — непрерывная неотрицательная периода 2π функция,

$$\omega_m(f, x; \lambda(x))_{p'} = \left\{ \frac{1}{2\lambda(x)} \int\limits_{-\lambda(x)}^{\lambda(x)} \left| \Delta_h^m f(x) \right|^{p'} dh \right\}^{1/p'}. \tag{4}$$

Если, например, $\lambda(x) \equiv t = \text{const}$, $f(x) \in L_p$, $w(x) \equiv 1$ и $p' \in [1, p]$, то $\tau_m(f, 1; t)_{p', p} \asymp \omega_m(f, t)_p$, где символ $\asymp$ означает отношение слабой эквивалентности.

Отметим, что величины $\tau_m(f, 1; t)_{2,2}$ были использованы в [6] для решения ряда экстремальных задач теории аппроксимации в L_2. Из (3), (4), в частности, следует

$$\tau_m(f, 1; t)_{p,p} = \left\{ \frac{1}{2t} \int\limits_{-t}^{t} \left\| \Delta_h^m f(\cdot) \right\|_p^p dh \right\}^{1/p}, \quad t > 0. \tag{5}$$

В силу (2), (5) и того факта, что

$$\left\| \Delta_h^m f(\cdot) \right\|_2^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2(f)(1 - \cos kh)^m,$$

где $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, а $a_k(f)$ и $b_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, имеем $\Omega_m(f, t)_2 = \tau_m(f, 1; t)_{2,2}$.

На основании изложенного определенный интерес, с нашей точки зрения, представляет использование характеристик вида (2) для решения экстремальных задач теории аппроксимации в нормированных пространствах S^p, введенных А. И. Степанцом в [7, 8].

2. Напомним, что под пространством S^p, $1 \le p < \infty$, понимают пространство 2π-периодических функций $f(x)$, для которых

$$\|f\|_{S^p} = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(k) \right|^p \right\}^{1/p} < \infty,$$

где

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \tag{6}$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе $(2\pi)^{-1/2} \exp(ikx)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\Psi(k)$ и $\beta(k) = \beta_k$, $k \in \mathbb{N}$, — сужение на $\mathbb{N}$ произвольных вещественных функций $\Psi(x)$ и $\beta(x)$, определенных на полусегменте $[1, \infty)$. Предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Psi(k)} \left\{ a_k(f) \cos(kx + \beta_k \pi/2) + b_k(f) \sin(kx + \beta_k \pi/2) \right\}$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, которую, согласно [9], обозначим символом $f_{\bar{\beta}}^{\Psi}(x)$ и назовем $(\Psi, \bar{\beta})$-производной функции $f(x)$.

Под $L^{\Psi}_{\beta}(S^p)$, $1 \le p < \infty$, понимаем множество функций $f(x) \in L^{\Psi}_{\beta}$, $(\Psi, \overline{\beta})$-производные $f^{\Psi}_{\overline{\beta}}(x)$ которых принадлежат пространству S^p. В частности, если $\Psi(x) = x^{-r}$, $0 < r < \infty$, и $\beta(x) \equiv r$, то используем обозначение $L^r(S^p)$.

Для произвольного элемента $f(x) \in S^p$, $1 \le p < \infty$, по аналогии с (2) рассмотрим величину

$$\Omega_m(f,t)_{S^p} = \left\{ \frac{1}{t} \int\limits_0^t \left\| \Delta_h^m f(\cdot) \right\|_{S^p}^p dh \right\}^{1/p}, \quad t > 0. \tag{7}$$

С учетом соотношения

$$\left\| \Delta_h^m f(\cdot) \right\|_{S^p}^p = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(k) \right|^p \left| \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} e^{ijkh} \right|^p =$$

$$= 2^{mp/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(k) \right|^p (1 - \cos kh)^{mp/2} \tag{8}$$

для аналога характеристики (5) в пространстве S^p, а именно,

$$\tau_m(f, 1; t)_{S^p} = \left\{ \frac{1}{2t} \int\limits_{-t}^t \left\| \Delta_h^m f(\cdot) \right\|_{S^p}^p dh \right\}^{1/p}, \quad t > 0,$$

имеем

$$\Omega_m(f,t)_{S^p} = \tau_m(f,1;t)_{S^p}.$$

3. Отметим некоторые свойства величины (7).

1. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *принадлежат пространству* S^p, $1 \le p < \infty$, *то*

$$\Omega_m(f+g,t)_{S^p} \le \Omega_m(f,t)_{S^p} + \Omega_m(g,t)_{S^p}, \quad t > 0.$$

2. *Если* $\omega_m(f,t)_{S^p} = \sup\left\{ \left\| \Delta_h^m f(\cdot) \right\|_{S^p} : 0 \le h \le t \right\}$, *то* $\Omega_m(f,t)_{S^p} \le \omega_m(f,t)_{S^p}$ *для произвольного* $t > 0$, *где* $f(x) \in S^p$, $1 \le p < \infty$.

Доказательства данных свойств не приводятся, поскольку они очевидны.

3. *Для любого* $n = 2, 3, \ldots$ *и произвольного* $t > 0$ *выполняется неравенство*

$$\Omega_m(f, nt)_{S^p} \le n^m \Omega_m(f,t)_{S^p},$$

где $f(x) \in S^p$, $1 \le p < \infty$.

Доказательство. Нам потребуется следующее соотношение, справедливое для любых натуральных чисел m и n [10, с. 158]:

$$\Delta_{nH}^m f(x) = \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} \ldots \sum_{j_m=0}^{n-1} \Delta_H^m f\left(x + H \sum_{\nu=1}^m j_\nu \right).$$

Отсюда имеем

$$\left\| \Delta_{nH}^m f(\cdot) \right\|_{S^p} \le \sum_{j_1=0}^{n-1} \sum_{j_2=0}^{n-1} \ldots \sum_{j_m=0}^{n-1} \left\| \Delta_H^m f\left(\cdot + H \sum_{\nu=1}^m j_\nu \right) \right\|_{S^p}. \tag{9}$$

Вводя мультииндекс $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_m)$, для которого $|\mathbf{j}| \overset{\text{df}}{=} \sum_{\nu=1}^{m} j_\nu$, и полагая $F_{|\mathbf{j}|}(x) \overset{\text{df}}{=} f\Big(x + H\sum_{\nu=1}^{m} j_\nu\Big)$, записываем

$$\widehat{\Delta_H^m F_{|\mathbf{j}|}}(k) = \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{m-\lambda}\binom{m}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\lambda H + H|\mathbf{j}|)e^{-ikx}dx =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{m-\lambda}\binom{m}{\lambda} e^{i\lambda k H}\,\hat{f}(k)\, e^{ikH|\mathbf{j}|}. \tag{10}$$

Тогда с учетом (8) и (10) имеем

$$\left\| \Delta_H^m F_{|\mathbf{j}|}(\cdot)\right\|_{S^p} = \left\| \Delta_H^m f(\cdot)\right\|_{S^p}. \tag{11}$$

В силу (9) и (11) получаем

$$\left\| \Delta_{nH}^m f(\cdot)\right\|_{S^p} \le n^m \left\| \Delta_H^m f(\cdot)\right\|_{S^p}. \tag{12}$$

Используя формулы (7) и (12), записываем

$$\Omega_m(f, nt)_{S^p} = \left\{\frac{1}{t}\int_0^t \left\| \Delta_{nH}^m f(\cdot)\right\|_{S^p}^p dH\right\}^{1/p} \le n^m \Omega_m(f,t)_{S^p}.$$

Свойство 3 доказано.

4. *Для произвольных чисел* $r, m \in \mathbb{N}$, $t > 0$ *и любой функции* $f(x) \in \in L^r(S^p)$, $1 \le p < \infty$, *выполнено неравенство*

$$\Omega_{r+m}(f,t)_{S^p} \le t^r \Omega_m(f^{(r)}, t)_{S^p}.$$

Доказательство. Для проведения дальнейших рассуждений воспользуемся следующей формулой [10, с. 159]:

$$\Delta_h^r f(x) = \int_0^h du_1 \int_0^h du_2 \ldots \int_0^h f^{(r)}(x + u_1 + u_2 + \ldots + u_r) du_r. \tag{13}$$

Учитывая, что

$$\Delta_h^{r+m} f(x) = \Delta_h^m(\Delta_h^r f(x)),$$

и используя (13), получаем

$$\Delta_h^{r+m} f(x) = \int_0^h du_1 \int_0^h du_2 \ldots \int_0^h \Delta_h^m f^{(r)}(x + u_1 + u_2 + \ldots + u_r) du_r. \tag{14}$$

Поскольку

$$\Delta_h^m f^{(r)}(x + u_1 + u_2 + \ldots + u_r) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j}\binom{m}{j} f^{(r)}(x + jh + u_1 + u_2 + \ldots + u_r),$$

из (14) имеем

$$\Delta_h^{r+m} f(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j}\binom{m}{j}\int_0^h du_1 \int_0^h du_2 \ldots \int_0^h f^{(r)}(x + jh + u_1 + u_2 + \ldots + u_r) du_r.$$

Тогда с учетом (6) записываем

$$\widehat{\Delta_h^{r+m} f}(k) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} e^{ijkh} \left\{ \frac{1}{ik}(e^{ikh}-1) \right\}^r \widehat{f^{(r)}}(k). \tag{15}$$

Нетрудно проверить, что в силу (8), очевидного соотношения

$$k^{-r}\left|e^{ikh}-1\right|^r = (2/k)^r \left|\sin\frac{kh}{2}\right|^r \le h^r$$

и формулы (15) получим

$$\left\| \Delta_h^{r+m} f(\cdot) \right\|_{S^p} \le h^r \left\| \Delta_h^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_{S^p}. \tag{16}$$

Из (7) и (16) имеем требуемое неравенство

$$\Omega_{r+m}(f,t)_{S^p} \le \left\{ \frac{1}{t}\int_0^t h^{rp} \left\| \Delta_h^m f^{(r)}(\cdot) \right\|_{S^p}^p dh \right\}^{1/p} \le t^r\, \Omega_m(f^{(r)},t)_{S^p}, \quad t > 0.$$

Свойство 4 доказано.

5. *Для произвольной функции* $f(x) \in S^p$, $1 \le p < \infty$, *и любых натуральных чисел* $n < m$ *имеет место неравенство*

$$\Omega_m(f,t)_{S^p} \le 2^{m-n}\Omega_n(f,t)_{S^p} \quad \forall\, t > 0.$$

Доказательство. Поскольку

$$\Delta_h^m f(x) = \Delta_h^{m-n}(\Delta_h^n f(x)) = \sum_{j=0}^{m-n} (-1)^{m-n-j} \binom{m-n}{j} \Delta_h^n f(x+jh),$$

то очевидно, что

$$\widehat{\Delta_h^m f}(k) = \sum_{j=0}^{m-n} (-1)^{m-n-j} \binom{m-n}{j} e^{ijkh}\, \widehat{\Delta_h^n f}(k).$$

Тогда

$$\left\| \Delta_h^m f(\cdot) \right\|_{S^p} \le \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \widehat{\Delta_h^n f}(k) \right|^p \left| \sum_{j=0}^{m-n} (-1)^{m-n-j} \binom{m-n}{j} e^{ijkh} \right|^p \right\}^{1/p} \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{m-n} \binom{m-n}{j} \left\| \Delta_h^n f(\cdot) \right\|_{S^p} = 2^{m-n} \left\| \Delta_h^n f(\cdot) \right\|_{S^p}. \tag{17}$$

Из (7) и (17) получаем неравенство

$$\Omega_m(f,t)_{S^p} \le 2^{m-n}\Omega_n(f,t)_{S^p},$$

связывающее между собой рассматриваемые характеристики различных порядков. Свойство 5 доказано.

4. Всюду в дальнейшем на определенную в п. 2 функцию $\Psi(x)$, $1 \le x < \infty$, налагаем ряд ограничений, а именно: $\Psi(x)$ *является положительной, монотонно убывающей к нулю при возрастании* x *и такой, что для всех* $x \in [1, \infty)$

существует первая производная $\Psi^{(1)}(x)$. *Полагаем, что функция* $\Psi^{(1)}(x)$ *в точках области определения удовлетворяет условию*

$$px\Psi^{(1)}(x) + \Psi(x) \leq 0. \tag{18}$$

Примерами функций, удовлетворяющих указанным требованиям, являются, в частности, $x^{-\gamma}$ и $e^{-\gamma x}$ при $1/p \leq \gamma < \infty$, а также $1/(x\ln(1+x))$.

Известно [10, с. 162], что в пространстве $C([-\pi, \pi])$ для функции $\sin x$ ее модуль непрерывности m-го порядка выражается соотношением

$$\omega_m(\sin x, u) = \left\{2^m \sin^m(u/2), \text{ если } 0 \leq u \leq \pi;\ 2^m, \text{ если } u \geq \pi\right\}.$$

Полагаем

$$\|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0,t])} \overset{\text{df}}{=} \left\{\frac{1}{t}\int_0^t \omega_m^p(\sin x, u)\,du\right\}^{1/p}, \quad t > 0.$$

Через $E_{n-1}(f)_{S^p}$ обозначим наилучшее приближение функции $f(x) \in S^p$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов порядка $n-1$ в метрике пространства S^p, т. е.

$$E_{n-1}(f)_{S^p} = \inf\left\{\|f - T_{n-1}\|_{S^p} : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{n-1}\right\}.$$

Для произвольного множества $\mathcal{M} \subset S^p$ полагаем

$$E_{n-1}(\mathcal{M})_{S^p} = \sup\left\{E_{n-1}(f)_{S^p} : f(x) \in \mathcal{M}\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть функция* $\Psi(x)$ *удовлетворяет сформулированным в п.* 4 *требованиям и ограничению* (18). *Тогда для произвольных чисел* $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ *и* $0 < t \leq \pi$ *имеют место равенства*

$$\sup_{\substack{f(x) \in L_\beta^\Psi(S^p) \\ f(x) \not\equiv \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)_{S^p}}{\Psi(n)\Omega_m(f_\beta^\Psi, t/n)_{S^p}} = \|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0,t])}^{-1}. \tag{19}$$

Пусть $\mathbb{B}$ — единичный шар в S^p; F — выпуклое центрально-симметричное подмножество в S^p; $\mathcal{L}_n \subset S^p$ — n-мерное подпространство; $\mathcal{L}^n \subset S^p$ — подпространство коразмерности n; $V : S^p \to \mathcal{L}_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства S^p в $\mathcal{L}_n$; $V^\perp : S^p \to \mathcal{L}_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования пространства S^p на подпространство $\mathcal{L}_n$. Величины

$$d_n(F, S^p) = \inf_{\mathcal{L}_n \subset S^p} \sup_{f \in F} \inf_{g \in \mathcal{L}_n} \|f - g\|_{S^p},$$

$$\delta_n(F, S^p) = \inf_{\mathcal{L}_n \subset S^p} \inf_{V : S^p \to \mathcal{L}_n} \sup_{f \in F} \|f - Vf\|_{S^p},$$

$$b_n(F, S^p) = \sup_{\mathcal{L}_{n+1} \subset S^p} \sup_{\varepsilon\mathbb{B} \cap \mathcal{L}_{n+1} \subset F} \{\varepsilon > 0\},$$

$$d^n(F, S^p) = \inf_{\mathcal{L}^n \subset S^p} \sup_{f \in F \bigcap \mathcal{L}^n} \|f\|_{S^p},$$

$$\text{п}_n(F, S^p) = \inf_{\mathcal{L}_n \subset S^p} \inf_{V^\perp : S^p \to \mathcal{L}_n} \sup_{f \in F} \left\| f - V^\perp f \right\|_{S^p}$$

называют соответственно колмогоровским, линейным, бернштейновским, гельфандовским и проекционным n-поперечниками множества F в пространстве S^p. Между указанными характеристиками выполняются следующие соотношения [11]:

$$b_n(F, S^p) \le \begin{matrix} d^n(F, S^p) \\ d_n(F, S^p) \end{matrix} \le \delta_n(F, S^p) \le \text{п}_n(F, S^p). \tag{20}$$

Вопросы, связанные с вычислением n-поперечников некоторых классов функций в пространствах S^p, $1 \le p < \infty$, рассматривались, например, в работах [12 – 15].

Через $\Phi(t)$ обозначим монотонно возрастающую непрерывную на полусегменте $0 \le t < \infty$ функцию такую, что $\Phi(0) = 0$. Под $L^{\Psi}_{\bar\beta}(S^p, \Omega_m, \Phi)$ понимаем класс функций $f(x) \in L^{\Psi}_{\bar\beta}(S^p)$, $(\Psi, \bar\beta)$-производные которых удовлетворяют при любом $t \in (0, 2\pi]$ условию $\Omega_m(f^{\Psi}_{\bar\beta}, t)_{S^p} \le \Phi(t)$.

Теорема 2. *Пусть для функции* $\Phi(t)$ *при некотором* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено условие*

$$\frac{\Phi(t)}{\Phi(\pi/2n)} \ge \frac{\|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0, tn])}}{\|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0, \pi/2])}}, \tag{21}$$

где $0 < t < \infty$, *а функция* $\Psi(x)$ *удовлетворяет требованиям, изложенным в формулировке теоремы* 1. *Тогда справедливы равенства*

$$g_{2n}(L^{\Psi}_{\bar\beta}(S^p, \Omega_m, \Phi); S^p) = g_{2n-1}(L^{\Psi}_{\bar\beta}(S^p, \Omega_m, \Phi); S^p) =$$

$$= E_{n-1}(L^{\Psi}_{\bar\beta}(S^p, \Omega_m, \Phi))_{S^p} = \|\omega_m(\sin x, \cdot)\|^{-1}_{L_p([0, \pi/2])} \Psi(n) \Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right), \tag{22}$$

где $g_n(\cdot)$ *— любой из рассмотренных ранее* n*-поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих ограничению* (21), *не пусто.*

5. ***Доказательство теоремы*** **1.** В [7] показано, что пространства S^p, $1 \le p < \infty$, наследуют такую важную особенность гильбертова пространства, как минимальное свойство частных сумм ряда Фурье. В частности [15],

$$E_{n-1}(f)_{S^p} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{S^p} = \left\{ \sum_{|k| \ge n} \left| \hat f(k) \right|^p \right\}^{1/p} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left\{ 2 \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^p(f) \right\}^{1/p}, \tag{23}$$

где

$$S_{n-1}(f, x) = \sum_{|k| \le n-1} \hat f(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

— частная сумма ряда Фурье

$$S(f, x) \sim \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat f(k) \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

функции $f(x) \in S^p$;

$$\rho_k(f) \overset{\text{df}}{=} \sqrt{a_k^2(f) + b_k^2(f)},$$

$a_k(f)$, $b_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Поскольку в силу (8)

$$\left\| \Delta_h^m f_{\bar\beta}^{\Psi}(\cdot) \right\|_{S^p}^p = \pi^{p/2} 2^{1+(m-1)p/2} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^p(f_{\bar\beta}^{\Psi})(1-\cos kh)^{mp/2}$$

и

$$\rho_k(f) = \Psi(k)\rho_k(f_{\bar\beta}^{\Psi}),$$

то, используя определение величины $\Omega_m(\cdot)_{S^p}$, получаем

$$\Omega_m^p(f_{\bar\beta}^{\Psi}, t/n)_{S^p} \geq \pi^{p/2} 2^{1+(m-1)p/2} n t^{-1} \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^p(f) \Psi^{-p}(k) \int_0^{t/n} (1-\cos kh)^{mp/2} dh.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\gamma(x) \overset{\text{df}}{=} \Psi^{-p}(x) \int_0^{t/n} (1-\cos xh)^{mp/2} dh,$$

где $1 \leq x < \infty$, и исследуем ее поведение. Для этого определим первую производную функции $\gamma(x)$, используя в ходе выкладок процедуру вычисления определенного интеграла по частям:

$$\gamma^{(1)}(x) = \frac{t}{xn}\left(1 - \cos\frac{xt}{n}\right)^{mp/2} -$$

$$- \frac{1}{x\Psi^{p+1}(x)}\left(px\Psi^{(1)}(x) + \Psi(x)\right) \int_0^{t/n} (1-\cos xh)^{mp/2} dh.$$

В силу (18) имеем $\gamma^{(1)}(x) \geq 0$, $1 \leq x < \infty$, т. е. $\gamma(x)$ является неубывающей функцией. Следовательно, $\min\{\gamma(x) : n \leq x < \infty\} = \gamma(n)$. Учитывая данный факт и используя формулу (23), записываем приведенную ранее оценку снизу величины $\Omega_m^p(f_{\bar\beta}^{\Psi}, t/n)_{S^p}$ в виде

$$\Omega_m^p(f_{\bar\beta}^{\Psi}, t/n)_{S^p} \geq \pi^{p/2} 2^{1+(m-1)p/2} \Psi^{-p}(n) \left\{ \frac{n}{t} \int_0^{t/n} (1-\cos nh)^{mp/2} dh \right\} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^p(f) \right\} =$$

$$= \Psi^{-p}(n) \| \omega_m(\sin x, \cdot) \|_{L_p([0,t])}^p E_{n-1}^p(f)_{S^p}.$$

Отсюда имеем оценку сверху

$$\sup_{\substack{f(x) \in L_{\bar\beta}^{\Psi}(S^p) \\ f(x) \not\equiv \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)_{S^p}}{\Psi(n)\Omega_m(f_{\bar\beta}^{\Psi}, t/n)_{S^p}} \leq \| \omega_m(\sin x, \cdot) \|_{L_p([0,t])}^{-1}. \tag{24}$$

Рассмотрим функцию $\tilde f(x) \overset{\text{df}}{=} \sqrt{2/\pi}\cos nx$, принадлежащую классу $L_{\bar\beta}^{\Psi}(S^p)$, для которой $E_{n-1}(\tilde f)_{S^p} = 2^{1/p}$, $\tilde f_{\bar\beta}^{\Psi}(x) = \sqrt{2/\pi}\,\Psi^{-1}(n)\cos(nx + \beta_n \pi/2)$ и

$$\left\| \Delta_h^m \tilde f_{\bar\beta}^{\Psi}(\cdot) \right\|_{S^p} = 2^{m/2+1/p} \Psi^{-1}(n)(1-\cos nh)^{m/2}. \tag{25}$$

Используя определение величины $\Omega_m(\cdot)_{S^p}$ и формулу (25), при $0 < t \le \pi$ получаем

$$\Omega(\tilde{f}_\beta^\Psi, t/n)_{S^p} = 2^{1/p}\Psi^{-1}(n)\|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0,t])}.$$

Отсюда следует оценка снизу

$$\sup_{\substack{f(x)\in L_\beta^\Psi(S^p)\\ f(x)\not\equiv\text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)_{S^p}}{\Psi(n)\Omega_m(f_\beta^\Psi, t/n)_{S^p}} \ge \frac{E_{n-1}(\tilde{f})_{S^p}}{\Psi(n)\Omega_m(\tilde{f}_\beta^\Psi, t/n)_{S^p}} = \|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0,t])}^{-1}. \tag{26}$$

Сравнивая оценки (24) и (26), получаем равенство (19).

Теорема 1 доказана.

6. *Доказательство теоремы* 2. Используя равенство (19), в котором полагаем $t = \pi/2$, а также соотношения (20) и (23), записываем оценки сверху

$$g_{2n}(L_\beta^\Psi(S^p, \Omega_m, \Phi); S^p) \le g_{2n-1}(L_\beta^\Psi(S^p, \Omega_m, \Phi); S^p) \le$$
$$\le \text{п}_{2n-1}(L_\beta^\Psi(S^p, \Omega_m, \Phi); S^p) \le E_{n-1}(L_\beta^\Psi(S^p, \Omega_m, \Phi))_{S^p} \le$$
$$\le \|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0,\pi/2])}^{-1}\Psi(n)\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{27}$$

Для получения оценок снизу, согласно (20), рассмотрим бернштейновский $2n$-поперечник класса $L_\beta^\Psi(S^p, \Omega_m, \Phi)$ в S^p и покажем принадлежность данному классу шара

$$\tilde{\mathbb{B}} \overset{\text{df}}{=} \left\{T_n(x) \in \mathcal{T}_n : \|T_n\|_{S^p} \le \|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0,\pi/2])}^{-1}\Psi(n)\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right\}.$$

Для этого нам потребуется неравенство [15]

$$\left\|(T_n)_\beta^\Psi\right\|_{S^p} \le \Psi^{-1}(n)\|T_n\|_{S^p}, \tag{28}$$

являющееся своеобразным аналогом неравенства С. Н. Бернштейна для тригонометрических полиномов в пространстве S^p. Очевидно, что

$$\left\|\Delta_h^m(T_n)_\beta^\Psi\right\|_{S^p} = 2^m\left\{\sum_{|k|\le n}\left|\widehat{(T_n)_\beta^\Psi}(k)\right|^p\left|\sin\frac{kh}{2}\right|^{mp}\right\}^{1/p}. \tag{29}$$

Полагаем

$$(\sin t)_* \overset{\text{df}}{=} \{\sin t, \text{ если } 0 \le t \le \pi/2;\ 1, \text{ если } t \ge \pi/2\}.$$

Учитывая, что для произвольного числа h и любого натурального числа $1 \le \le k \le n$ выполняется неравенство

$$\sin\frac{kh}{2} \le \left(\sin\frac{nh}{2}\right)_*,$$

а также используя (28), (29) и определение $\Omega_m(\cdot)_{S^p}$, записываем оценку сверху

$$\Omega_m\left((T_n)_\beta^\Psi, t\right)_{S^p} \le \Psi^{-1}(n)\|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0,tn])}\|T_n\|_{S^p}. \tag{30}$$

Для произвольного полинома $T_n(x) \in \tilde{\mathbb{B}}$ в силу (21) и (30) имеем

$$\Omega_m\Big((T_n)^{\Psi}_{\beta}, t\Big)_{S^p} \leq \frac{\|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0,tn])}}{\|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0,\pi/2])}}\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right) \leq \Phi(t),$$

где $0 < t \leq 2\pi$. Следовательно, справедливо включение $\tilde{\mathbb{B}} \subset L^{\Psi}_{\beta}(S^p, \Omega_m, \Phi)$. Используя (20), получаем

$$g_{2n}(L^{\Psi}_{\beta}(S^p, \Omega_m, \Phi); S^p) \geq b_{2n}(L^{\Psi}_{\beta}(S^p, \Omega_m, \Phi); S^p) \geq$$

$$\geq b_{2n}(\tilde{\mathbb{B}}, S^p) \geq \|\omega_m(\sin x, \cdot)\|^{-1}_{L_p([0,\pi/2])}\Psi(n)\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \tag{31}$$

Сопоставляя соотношения (27) и (31), имеем равенство (22).

В завершение доказательства теоремы 2 покажем, что множество мажорант $\Phi(t)$, удовлетворяющих условию (21), не пусто. Для этого убедимся в том, что функция $\tilde{\Phi}(t) \overset{\mathrm{df}}{=} t^{\alpha/p}$, где

$$\alpha \overset{\mathrm{df}}{=} 2^{mp/2}\|\omega_m(\sin x, \cdot)\|^{-p}_{L_p([0,\pi/2])} - 1, \tag{32}$$

удовлетворяет условию (21) при любом n. Учитывая приведенный в п. 4 вид модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m(\sin x, t)$, переписываем формулу (32) в виде

$$\alpha = \frac{\pi}{2^{1+mp/2}}\left\{\int\limits_0^{\pi/2}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{mp}dt\right\}^{-1} - 1 \tag{33}$$

и оцениваем величину α сверху и снизу. Используя соотношение $\sin(t/2) > \sqrt{2}t/\pi$, где $0 < t < \pi/2$, из (33) получаем неравенство $\alpha < mp$. Для оценки снизу величины α покажем выполнение неравенства

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi u}{4}\right) < u^{\pi/4},$$

где $0 < u < 1$. Полагая $G(u) \overset{\mathrm{df}}{=} u^{\pi/4} - \sqrt{2}\sin(\pi u/4)$, включаем в рассмотрение для удобства рассуждений точки $u = 0$ и $u = 1$. Очевидно, что в достаточно малой окрестности нуля

$$G(u) \overset{\mathrm{df}}{=} u^{\pi/4}\Big(1 - O\big(u^{1-\pi/4}\big)\Big) > 0.$$

Доказательство проведем методом от противного, полагая, что на интервале $(0, 1)$ существует некоторая точка η, в которой $G(u)$ меняет знак. Поскольку $G(0) = G(1) = 0$, согласно теореме Ролля первая производная

$$G^{(1)}(u) = \frac{\pi}{4}u^{\pi/4-1} - \frac{\pi}{2^{3/2}}\cos\left(\frac{\pi u}{4}\right)$$

должна иметь не менее двух различных нулей на множестве $(0, 1)$, а так как $G^{(1)}(1) = 0$, в силу указанной теоремы вторая производная

$$G^{(2)}(u) = \frac{\pi^2}{2^{7/2}}\sin\left(\frac{\pi u}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)u^{\pi/4-2}$$

также должна иметь на интервале $(0, 1)$ не менее двух различных нулей. Однако это невозможно в силу того, что $G^{(2)}(u)$, как разность выпуклой вверх и выпуклой вниз функций, может иметь на $(0, 1)$ не более одного нуля. Полученное противоречие доказывает требуемое неравенство. Полагая в нем $u = 2t/\pi$, где $0 < t < \pi/2$, имеем

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right) < \left(\frac{2t}{\pi}\right)^{\pi/4}.$$

Используя данное соотношение, из (33) получаем $\alpha > \pi mp/4$. Таким образом,

$$\pi mp/4 < \alpha < mp. \tag{34}$$

Для функции $\tilde{\Phi}(t)$ условие (21) примет вид

$$\left(\frac{2tn}{\pi}\right)^{\alpha} \geq \frac{\pi}{2tn}\frac{\int_0^{tn}(\sin\tau/2)_*^{mp}\,d\tau}{\int_0^{\pi/2}(\sin\tau/2)^{mp}\,d\tau}. \tag{35}$$

Выполняя в соотношении (35) замену $v = 2tn/\pi$, получаем неравенство

$$v^{\alpha+1} \geq \frac{\int_0^{\pi v/2}(\sin\tau/2)_*^{mp}\,d\tau}{\int_0^{\pi/2}(\sin\tau/2)^{mp}\,d\tau}, \tag{36}$$

где $0 < v < \infty$, которое нам и требуется доказать.

Обозначим

$$Q(v) \overset{\text{df}}{=} v^{\alpha+1} - \frac{\int_0^{\pi v/2}(\sin\tau/2)_*^{mp}\,d\tau}{\int_0^{\pi/2}(\sin\tau/2)^{mp}\,d\tau} \tag{37}$$

и рассмотрим эту функцию на отрезке $[0, 1]$, предварительно доопределив ее в точке $v = 0$ по непрерывности справа нулевым значением. Из (37) и (34) следует, что в достаточно малой окрестности нуля $Q(v) = v^{\alpha+1}(1 - O(v^{mp-\alpha})) > 0$. Рассуждая от противного, покажем, что $Q(v) > 0$ на интервале $0 < v < 1$. Предположим, что существует некоторая точка $\xi \in (0, 1)$, в которой $Q(v)$ меняет знак. Поскольку $Q(0) = Q(1) = 0$, в силу теоремы Ролля первая производная $Q^{(1)}(v)$ должна иметь на интервале $(0, 1)$, по крайней мере, два различных нуля. Учитывая формулу (33), записываем

$$Q^{(1)}(v) = (\alpha+1)\left\{v^{\alpha} - \left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi v}{4}\right)\right)^{mp}\right\}. \tag{38}$$

Из (38) очевидно, что $Q^{(1)}(0) = Q^{(1)}(1) = 0$. Следовательно, вторая производная

$$Q^{(2)}(v) = 2^{mp/2-3}\pi mp(\alpha+1)v^{\alpha-1}\left\{\frac{\alpha}{\pi mp2^{mp/2-3}} - \tilde{G}(v)\right\}, \tag{39}$$

где

$$\tilde{G}(v) \overset{\text{df}}{=} v^{1-\alpha}\sin\left(\frac{\pi v}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi v}{4}\right)^{mp-2},$$

должна иметь на интервале $(0, 1)$ не менее трех различных нулей. Очевидно, что количество перемен знака функции (39) определяется выражением, записанным в фигурных скобках. Исследуем для этого поведение функции $\tilde{G}(v)$, вычислив ее первую производную

$$\tilde{G}^{(1)}(v) = \frac{\pi}{2} v^{1-\alpha} \cos\left(\frac{\pi v}{2}\right)\left(\sin\frac{\pi v}{4}\right)^{mp-2} \mathcal{F}(v),$$

где

$$\mathcal{F}(v) \overset{\text{df}}{=} 1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi v}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi v}{4}\right)\left[\frac{mp}{2} - 1 - 2(\alpha - 1)\frac{\operatorname{tg}(\pi v/4)}{\pi v}\right].$$

С учетом (34) имеем

$$\lim_{v \to 0+} \mathcal{F}(v) = mp - \alpha > 0,$$
$$\lim_{v \to 1-0} \mathcal{F}(v) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi mp}{4} - \alpha - \frac{\pi}{2} - 1\right) < 0. \tag{40}$$

В силу (40) и монотонного возрастания функций $\operatorname{tg}(\pi v/2)\operatorname{ctg}(\pi v/4)$ и $\operatorname{tg}(\pi v/4)/(\pi v)$ нетрудно видеть, что $\mathcal{F}(v)$ меняет знак с плюса на минус при возрастании $v \in (0, 1)$. Следовательно, неотрицательная на отрезке $[0, 1]$ функция $\tilde{G}(v)$ является монотонно возрастающей при $0 \le v \le \lambda$ и монотонно убывающей при $\lambda < v \le 1$, где $\mathcal{F}(\lambda) = 0$. Но тогда записанная в фигурных скобках формулы (39) функция должна иметь не более двух различных нулей на интервале $(0, 1)$. Из полученного противоречия следует, что при $0 < v < 1$ выполняется неравенство $Q(v) > 0$.

Пусть $v \in [1, 2]$. Из соотношений (34) и (38) имеем

$$Q^{(1)}(2) = (\alpha+1)(2^{\alpha} - 2^{mp/2}) > (\alpha+1)(2^{mp\pi/4} - 2^{mp/2}) > 0. \tag{41}$$

На полусегменте $1 \le v < 2$ запишем формулу (38) в виде

$$Q^{(1)}(v) = (\alpha+1)2^{mp/2} v^{\alpha} \mathcal{Y}(v),$$

где

$$\mathcal{Y}(v) \overset{\text{df}}{=} 2^{-mp/2} - v^{-\alpha}\left(\sin\frac{\pi v}{4}\right)^{mp}, \tag{42}$$

и исследуем поведение функции (42). При этом

$$\mathcal{Y}^{(1)}(v) = -\frac{\pi}{4 v^{\alpha}} \cos\left(\frac{\pi v}{4}\right)\left(\sin\left(\frac{\pi v}{4}\right)\right)^{mp-1} \mathcal{X}(v),$$

где

$$\mathcal{X}(v) \overset{\text{df}}{=} mp - \frac{4\alpha}{\pi v} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi v}{4}\right).$$

Очевидно, что $\mathcal{X}(v)$ является монотонно убывающей функцией, для которой в силу (34) $\mathcal{X}(1) = 4(mp\pi/4 - \alpha)/\pi < 0$. Следовательно, $\mathcal{Y}^{(1)}(t) > 0$ при $1 \le v < 2$. Поскольку $\mathcal{Y}(1) = 0$, то $\mathcal{Y}(v) \ge 0$, когда $1 \le v < 2$, а это, с учетом (41), равносильно неравенству $Q^{(1)}(v) \ge 0$ для $1 \le v \le 2$. Значит, $Q(v)$ является неубывающей функцией на отрезке $[1, 2]$. Учитывая, что $Q(1) = 0$, получаем требуемое неравенство $Q(v) \ge 0$ при $1 \le v \le 2$.

Пусть теперь $2 \le v < \infty$. Тогда

$$Q(v) = v^{\alpha+1} - \frac{\int_0^{\pi} (\sin \tau/2)^{mp} d\tau + \pi(v-2)/2}{\int_0^{\pi/2} (\sin \tau/2)^{mp} d\tau}.$$

С учетом (33), (34) имеем

$$Q^{(1)}(v) = (\alpha+1)(v^{\alpha} - 2^{mp/2}) > 0. \qquad (43)$$

Поскольку $Q(2) \geq 0$, в силу (43) получаем $Q(v) > 0$ при $2 < v < \infty$.

Теорема 2 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть функция* $\Psi(x)$ *удовлетворяет требованиям теоремы* 1, *а величина* α *определяется соотношением* (32). *Тогда имеют место следующие равенства*:

$$g_{2n}\Big(L_\beta^\Psi(S^p, \Omega_m, \tilde{\Phi}); S^p\Big) = g_{2n-1}\Big(L_\beta^\Psi(S^p, \Omega_m, \tilde{\Phi}); S^p\Big) =$$

$$= E_{n-1}\Big(L_\beta^\Psi(S^p, \Omega_m, \tilde{\Phi})\Big)_{S^p} = \|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0,\pi/2])}^{-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\alpha/p}\Psi(n),$$

где $1 \leq p < \infty$; $g_n(\cdot)$ — *любой из рассмотренных в теореме* 2 n-*поперечников*.

7. Вопросы нахождения точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах функций действительного переменного изучались многими математиками (см., например, [15]). Аналогичная задача, с нашей точки зрения, представляет определенный интерес и в рассматриваемом здесь случае.

Предложение 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда имеют место следующие равенства*:

$$\sup_{\substack{f(x)\in L_\beta^\Psi(S^p,\Omega_m,\Phi)\\ f(x)\not\equiv\text{const}}} \left|\hat{f}(n)\right| = \sup_{\substack{f(x)\in L_\beta^\Psi(S^p,\Omega_m,\Phi)\\ f(x)\not\equiv\text{const}}} \left|\hat{f}(-n)\right| =$$

$$= 2^{-1/p}\|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0,\pi/2])}^{-1}\Psi(n)\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \qquad (44)$$

Доказательство. Из (23) и того факта, что $\left|\hat{f}(n)\right| = \left|\hat{f}(-n)\right|$, для $f(x) \in S^p$ получаем

$$E_{n-1}(f)_{S^p} \geq 2^{1/p}\left|\hat{f}(n)\right|.$$

Из (22) и данного неравенства следует оценка сверху

$$\sup_{\substack{f(x)\in L_\beta^\Psi(S^p,\Omega_m,\Phi)\\ f(x)\not\equiv\text{const}}} \left|\hat{f}(n)\right| \leq 2^{-1/p}E_{n-1}\Big(L_\beta^\Psi(S^p, \Omega_m, \Phi)\Big)_{S^p} \leq$$

$$\leq 2^{-1/p}\|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0,\pi/2])}^{-1}\Psi(n)\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \qquad (45)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$f_*(x) \overset{\text{df}}{=} 2^{-1/p}\|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0,\pi/2])}^{-1}\Psi(n)\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right)\left(\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}}\right).$$

Поскольку

$$\|f_*\|_{S^p} = \|\omega_m(\sin x, \cdot)\|_{L_p([0,\pi/2])}^{-1}\Psi(n)\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right),$$

$f_*(x)$ принадлежит шару $\tilde{\mathbb{B}}$ из теоремы 2, а значит, и классу $L_\beta^\Psi(S^p,\Omega_m,\Phi)$. Следовательно,

$$\sup_{\substack{f(x)\in L^{\Psi}_{\beta}(S^p,\Omega_m,\Phi)\\ f(x)\not\equiv \mathrm{const}}} \left|\hat{f}(n)\right| \;\geq\; \left|\hat{f}_*(n)\right| \;=\; 2^{-1/p}\|\,\omega_m(\sin x,\cdot)\|^{-1}_{L_p([0,\pi/2])}\,\Psi(n)\Phi\left(\frac{\pi}{2n}\right). \quad (46)$$

Сопоставляя соотношения (45) и (46), получаем формулу (44), что и завершает доказательство предложения 1.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия следствия* 1. *Тогда для любого натурального числа* n *и* $1 \leq p < \infty$ *справедливы равенства*

$$\sup_{\substack{f(x)\in L^{\Psi}_{\beta}(S^p,\Omega_m,\tilde{\Phi})\\ f(x)\not\equiv \mathrm{const}}} \left|\hat{f}(n)\right| \;=\; \sup_{\substack{f(x)\in L^{\Psi}_{\beta}(S^p,\Omega_m,\tilde{\Phi})\\ f(x)\not\equiv \mathrm{const}}} \left|\hat{f}(-n)\right| \;=$$

$$=\; 2^{-(1+\alpha)/p}\|\,\omega_m(\sin x,\cdot)\|^{-1}_{L_p([0,\pi/2])}\,\Psi(n)\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha/p}.$$

1. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1975. – **98**, № 3. – С. 395 – 415.
2. *Руновский К. В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Там же. – 1994. – **185**, № 8. – С. 81 – 102.
3. *Руновский К. В.* Об одной оценке для интегрального модуля гладкости // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 1. – С. 78 – 80.
4. *Ivanov K. G.* New estimates of errors of quadrature formulae, formulae of numerical differention and interpolation // Anal. Math. – 1980. – **6**, № 4. – P. 281 – 303.
5. *Ivanov K. G.* On a new characteristic of functions. I // Сердика Бълг. Мат. списание. – 1982. – **8**, № 3. – С. 262 – 279.
6. *Вакарчук С. Б.* О наилучших полиномиальных приближениях в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точных значениях их n-поперечников // Мат. заметки. – 2001. – **70**, № 3. – С. 334 – 345.
7. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392 – 416.
8. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p // Там же. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106 – 124.
9. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
10. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
11. *Тихомиров В. М.* Теория приближений // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1987. – **14**. – С. 103 – 260.
12. *Войцеховский В. Р.* Поперечники деяких класів з простору S^p // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2003. – **46**. – С. 17 – 26.
13. *Сердюк А. С.* Поперечники в просторі S^p класів функцій, що означаються модулями неперервності їх ψ-похідних // Там же. – С. 229 – 248.
14. *Вакарчук С. Б.* О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации в пространствах S^p $(1 \leq p < \infty)$ // Воронеж. зим. мат. школа „Современные методы теории функций и смежные проблемы” (Воронеж, 26 янв. – 2 февр. 2003 г.). – Воронеж: Воронеж. ун-т, 2003. – С. 47 – 48.
15. *Вакарчук С. Б.* Неравенства типа Джексона и точные значения поперечников классов функций в пространствах S^p, $1 \leq p < \infty$ // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 5. – С. 595 – 605.

Получено 29.06.2004